



HAL
open science

Cas d'existence de solutions d'EDP.

Samy Skander Bahoura

► **To cite this version:**

| Samy Skander Bahoura. Cas d'existence de solutions d'EDP.. 2017. hal-01559242v1

HAL Id: hal-01559242

<https://hal.science/hal-01559242v1>

Submitted on 10 Jul 2017 (v1), last revised 18 Jul 2022 (v17)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CAS D'EXISTENCE DE SOLUTIONS D'EDP.

SAMY SKANDER BAHOURA

1. CAS D'EXISTENCE DE SOLUTIONS D'EDP

Estimations uniformes pour l'équation de Yamabe, l'équation du type Yamabe, l'équation de la courbure scalaire prescrite, l'équation du type courbure scalaire prescrite, l'équation de Gauss. On se pose la question de savoir s'il y a des solutions.

En dimension 2 :

1) Les solutions de Liouville en fonction des fonctions holomorphes dont les dérivées ne s'annulent pas, voir le livre de C. Bandle.

2) Sur la boule unité, il y a des solutions radiales, nulle au bord, cela revient à résoudre une équation différentielle.

3) Si le domaine n'est plus une boule, par la méthode des sur et sous solutions, il y a des solutions au problème de Gelfand, $u = 0$ est sous solution et la fonction distance est une sur solution. (Voir Dupaigne).

4) Par la méthode variationnelle, il y a toujours des solutions, c'est lié à la compacité de l'injection de Moser-Trudinger dans L^1 .

Pour la dimension 2, sur des surfaces compactes sans bord, il y a des résultats d'existence dans le livre d'Aubin, par la méthode variationnelle si la courbure scalaire $S = -1$ on peut minorer les solutions, lorsque $S = 0$ il se peut qu'on ne puisse pas minorer les solutions.

Pour une courbure scalaire négative, on peut résoudre le problème de la courbure scalaire prescrite avec une courbure prescrite $f \leq 0$ par la méthode des sur et sous solutions, puis on rajoute une constante ou fonction petite $f + c$ ou $f + g$, $c, g > 0$. Dans ce cas, il se peut qu'on puisse minorer les solutions. C'est fait dans le livre d'Aubin.

Dans le cas nul (courbure scalaire nulle, par la méthode variationnelle), on peut résoudre le problème de la courbure prescrite, pour une courbure prescrite f changeant de signe et $\int f < 0$. Dans ce cas il se peut que les solutions ne soient pas minorables. C'est fait dans le livre d'Aubin.

En ce qui nous concerne, on se placera sur la partie positive de $f + c = c > 0$ et $f + g = g > 0$.

On peut résoudre le problème de la courbure scalaire sur une surface compacte non orientable, c'est fait dans le livre d'Aubin pour le Projectif réel de dimension 2, \mathbb{P}_2 .

En dimension ≥ 3 .

1) Pour l'équation de Yamabe (5 et 6) et l'équation de la courbure prescrite en dimension 4 : Quand la variété est compacte sans bord, les résultats existent par Aubin-Schoen en dimension 5 et 6.

Si on considère une fonction f changeant de signe et que la courbure scalaire $S_g = 0$ (et de métrique g), par la méthode variationnelle f est courbure scalaire d'une métrique conforme, voir le livre de Hebey (pour les dimensions 3, 4, le théorème d'Escobar-Schoen) et le livre d'Aubin (le Théorème d'Escobar-Schoen dans le cas conformément plat et le Théorème de Bismuth). Voir aussi dans le livre d'Aubin d'autres conditions sur f pour qu'elle soit courbure scalaire d'une métrique conforme. Dans le cas, changeant de signe on se placera sur l'ensemble $\{f > 0\}$. Ceci est valable en toute dimension ≥ 3 (conformément plat, Escobar-Schoen et Aubin et invariant de Yamabe positif).

Pour la dimension 6, on résout le problème de la courbure scalaire prescrite sur une variété de courbure scalaire $S_g = -1$ (de métrique g), pour une courbure prescrite $f \leq 0$, par exemple une cutoff avec $f = 0$ une boule, puis par un théorème dans le livre d'Aubin, il existe un voisinage de f dans C^α , dans lequel on peut résoudre le problème de la courbure prescrite. (La condition, voir dans le livre d'Aubin, de Rauzy Ouyang, Veron est que la valeur propre du Laplacien est plus grande que la courbure scalaire, or en prenant des petites boules, on a grâce au Théorème de

Levy-Bruhul, le comportement asymptotique des valeurs propres du Laplacien des petites boules géodésiques, voir le monographe de Leon Karp-Mark Pinsky).

Après avoir résolu le problème de la courbure prescrite pour des fonctions cutoff $f \leq 0$, par exemple (de boules petites), il suffit d'ajouter une constante positive petite pour avoir $f + c$ courbure prescrite d'une métrique conforme telle que $f + c = c > 0 =$ boule et $f + c$ est négative dans un autre ensemble. Alors on remarque que la ou la solution est minimum, alors elle est minorée par une constante strictement positive. On vient de construire un exemple de solutions minorées par une constante positive, qui est un exemple de solutions en dimension 6 pour la quelle le minimum est minoré par une constante positive et est solution de Yamabe dans la boule ou $f + c = c > 0$. (le minorant est $m = 1/(1 - c)$, si on suppose $0 \geq f \geq -1$, utiliser l'équation et le fait qu'en P point minimum de la solution u , $\Delta u(P) \leq 0$.)

Pour la dimension 4 et l'équation de la courbure prescrite, il suffit de suivre le même chemin que pour la dimension 6, en remplaçant $c > 0$ par une fonction positive voisine de c , $c > 0$ petite, alors les solutions sont minorées par une constante $m > 0$. (Voir Journal of Mathematical Analysis and Applications).

Quand la variété a un bord :

En dimension 5, il y a des solutions voir l'article de Z-C. Han et YY.Li, l'opérateur doit être de type positif, ce qui est possible si on considère des boules géodésiques, la courbure moyenne est alors presque constante et positive (proche de de la sphère), on choisit la courbure scalaire et de Ricci non constantes pour avoir un point non ombilique. (Journal of Functional Analysis).

2) Pour l'équation du type Yamabe : si $R = \frac{(n-2)}{4(n-1)} S_g$ avec S_g est la courbure scalaire et g la métrique.

Quand la variété est compacte sans bord, à partir de la dimension 4, il y a les résultats d'Aubin pour un opérateur du type $(\Delta + a$, avec $a < R$ en un point). (Bulletin des Sciences Mathématiques).

Quand la variété a un bord, à partir de la dimension 5, il y a les résultats de Holzman pour un opérateur du type $(\Delta + a$, avec $a < R$). (Bulletin des Sciences Mathématiques).

3) Pour l'équation du type courbure scalaire prescrite :

Dans le cas sous-critique tendant vers le critique, il y a des solutions par la méthode variationnelle car l'injection de Sobolev est compacte dans ce cas. (Travail de Thèse).

Il y a les résultats de Brezis-Nirenberg dans le cas d'un ouvert de l'espace euclidien en dimension ≥ 4 , pour une perturbation non linéaire sous critique de l'équation de Yamabe dans le cas d'un ouvert plat. (Voir travail de Thèse).

Pour l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4, on en a parlé ci-dessus, il suffit de considérer une courbure prescrite changeant de signe de telle manière que les solutions soient positives et minorées et se placer sur la partie positive de la courbure prescrite. (Voir Journal of Mathematical Analysis and Applications).

Pour la dimension 2, les estimations a priori ont pour but de prouver l'existence de solutions par la méthode du degré topologique de Leray-Schauder, comme dans De Figueiredo-Lions-Nussbaum, une des conditions est que l'opérateur compact M est nulle en 0, or ici cette condition n'est pas satisfaite car il y a une exponentielle. Cette méthode ne s'applique pas à l'exponentielle, mais ce cas particulier peut induire l'existence de solutions par la méthode des sur et sous solutions (voir Dupaigne), en fait ici on s'intéresse aux estimations a priori des solutions d'équations du type Gauss. On a une compacité à la Gromov des suites de métriques ou si on revient aux EDP, des estimations a priori elliptiques.

Pour les dimensions ≥ 3 , on se borne à dire qu'on a des inégalités du type Harnack, une particularité de ces équations à exposant critique de Sobolev comme pour les fonctions harmoniques.

Un des buts des estimations du type $\sup \times \inf$ est de prouver qu'il n'y a que des blow-up isolés simples pour les solutions de ces équations et donc elles convergent vers une fonction semblable à la fonction de Green, le Théorème de la masse positive s'il est vrai tout le temps, permet de dire que le terme constant est positif, alors que par l'identité de Pohozaev l'intégrale d'une certaine quantité serait à la fois positive ou nulle (blow-up isolés simples) et strictement négative (masse positive), ce qui n'est pas possible. Donc il n'y a pas de blow-up, c'est-à-dire que les solutions sont bornées dans C^2 et par un argument d'homotopie et degré topologique le degré serait non nul ce qui veut dire qu'il y a des solutions.

L'existence de solutions était déjà connu par la méthode variationnelle, on se borne à considérer que ce travail a pour but de chercher des estimations a priori et en particulier des inégalités du type Harnack, propriétés de ces solutions à exposant critique de Sobolev.

Donc, on suppose que les solutions existent, ce qui est le cas dans les différents cas considérés et on prouve certaines propriétés qualitatives de ces équations. (Convergence de métriques, à la Cheeger-Gromov, estimations a priori, compacité de solutions, inégalités du type Harnack)

Concernant les variétés qu'on considère, elles peuvent être non conformément plates, il y a quelques exemples de ces variétés.

1) Les variétés de dimension 1 et 2 sont localement conformément plates.

2) Les sphères, sommes connexes de sphères, produit de sphères et d'un cercle, l'espace hyperbolique et le produit d'une variété de courbure sectionnelle constante par un cercle, sont conformément plates.

Par le revêtement, les projectifs réels sont conformément plats car de courbure sectionnelle constante égale à 1 (Voir le livre d'Hebey, égalité des courbures sectionnelles, quand on a un revêtement riemannien). Les projectifs de dimension paire sont non orientables, les projectifs de dimension impaire sont orientables (voir le livre de Lafontaine).

3) Il existe une variété compacte de dimension 3, non conformément plate, plus précisément, elle ne possède pas de structure localement conformément plate. (William Goldman).

Si on considère une variété de courbure sectionnelle non constante et son produit par un cercle, alors la variété obtenue est non localement conformément plate.

4) Le projectif complexe de dimension 2 complexe donc de dimension 4 réelle est non conformément plat (métrique de Fubini-Study), il est d'Einstein et de courbure scalaire constante positive.

5) Les surfaces K3, non conformément plat de dimension 4 réelle. Il est d'Einstein de constante 0.

6) Le produit $S^2 \times S^2$ est de dimension 4 réelle et non conformément plat, d'Einstein, de courbure scalaire constante positive.

7) Les projectifs complexes de dimensions > 2 , non conformément plat. (Métrique de Fubini-Study).

8) Maintenant, si on veut que la courbure scalaire soit, -1, 0, 1, on utilise les procédés suivant :

-On construit des variétés produit à partir des variétés précédentes, elles sont alors soit plates soit non plate (il suffit qu'une ne soit pas plate, voir le Hebey).

-On utilise les sommes connexes, en se référant à un article de Dominic Joyce, sur les différentes combinaisons possibles des sommes connexes donnant des variétés de courbures scalaire -1, 0, 1. On construit de telles variétés et elles peuvent être plates ou non plates.

Exemple en dimension 4, cas non plat :

Soit S_2 la sphère de dimension 2. On considère une surface de genre grand, 2, la somme connexe de deux Tores $T_2 \# T_2$, on résout l'équation de la courbure prescrite constante $k = -1$, c'est fait dans le livre d'Aubin. On peut supposer qu'il existe une surface S de courbure scalaire constante (et donc sectionnelle constante $-3/2$) égale à -3 par exemple. On considère le produit $S_2 \times S$, il est non conformément plat par le théorème dans le livre d'Hebey (courbures sectionnelles non opposées) et de courbure scalaire -1. On peut alors appliquer le procédé d'existence de solutions pour l'équation de la courbure prescrite en dimension 4 minorées par $m > 0$ (pour la fonction cutoff nulle au voisinage du point P ou $Weyl(P) \neq 0$, est non nul). On obtient alors des solutions de l'équation de la courbure prescrite en dimension 4 minorées par une constante positive et sur une variété non localement plate.

Exemple en dimension 5 et 6, cas non plat:

On peut faire la même chose pour l'équation de Yamabe en dimension 5 et 6. On considère $S_1 \times S_2 \times S$ et $S_1 \times S_1 \times S_2 \times S$ qui sont non plate et de courbure scalaire -1.

Un autre exemple en dimension 5, cas non plat:

Soit S_3 la sphère de dimension 3 (courbure scalaire 6 et courbure sectionnelle 1) et S une surface de Riemann compacte de courbure scalaire -6 (donc sectionnelle -3). Alors le produit $S_3 \times S$ est non localement plat (voir théorème du livre d'Hebey, courbures sectionnelles constantes non opposées) et de courbure scalaire $R = 0$. En considérant une fonction changeant de signe et cutoff $f = \epsilon > 0$ dans une petite boule centrée en P tel que $Weyl(P) \neq 0$ et $f < 0$ ailleurs telle que $\int f < 0$ (ϵ petit). On peut appliquer le théorème de Bismuth en dimension 5 d'existence de

solutions de l'équation de la courbure prescrite f changeant de signe (avec une courbure scalaire nulle sur une variété compacte). Ici on n'a pas forcément un minorant du minimum des solutions.

On a un exemple de solutions de l'équation de Yamabe sur $\{f = \epsilon > 0\}$, sur une variété non conformement plate de dimension 5 ou on n'a pas forcément un minorant des solutions.

Un autre exemple en dimension 5:

Un théorème dans le livre d'Aubin dit que si on considère une variété M de dimension $n \geq 3$ non conformement difféomorphe à la sphère (en particulier non localement conformement plate), alors il existe $k > 1$, ne dépendant que de la variété M , tel que toute fonction $f > 0$ vérifiant:

$$\sup_M f \leq k \inf_M f,$$

est courbure scalaire d'une métrique conforme. On applique cela à $M = S_1 \times P_2(\mathbb{C})$ (le cercle fois le projectif complexe de dimension 2, M est non localement conformement plate par le théorème dans le livre d'Hebey, de courbure scalaire constante $R > 0$, $\dim(M) = 5$), et, f une fonction cutoff telle que $\frac{1+2\epsilon}{k} \leq f \leq 1+\epsilon$ et $f \equiv 1+\epsilon$ dans une boule centrée en P telle que $Weyl(P) \neq 0$.

Ici, on ne sait pas minorer les solutions.

Exemple en dimension 4, cas plat et équation de la courbure prescrite:

Soit S_4 la sphère de dimension 4. On considère une variété de courbure scalaire -1 si elle est conformement plate, c'est fini, on utilise le même procédé que précédemment dans le cas non plat. Si cette variété est non plate, on utilise la somme connexe avec la sphère S_4 de Dominic Joyce ; on obtient une variété de courbure scalaire -1 dans laquelle (la partie de S_4 , car on a soit la métrique de S_4 soit une fonction fois la métrique de S_4 et le tenseur de Weyl reste nul car on a un invariant conforme) est plate, on résout le problème de la courbure prescrite pour une fonction cutoff nulle au voisinage du point P ou la métrique est plate et négative ailleurs puis on rajoute une fonction $C^{0,1}$. Alors on a des solutions minorées et comme la métrique est plate au voisinage de P et que c'est l'équation de la courbure prescrite, en faisant un changement de métrique conforme, on obtient l'équation sur un ouvert de \mathbb{R}^4 avec des solutions minorées.

Davis, M, W, (1985), (Closed orientable hyperbolic 4-manifolds), montre l'existence d'une variété compacte sans bord orientable hyperbolique de dimension 4, c'est-à-dire de courbure sectionnelle constante -1, (en fait, comme pour le Tore, ces variétés sont obtenues par un revêtement riemannien du quotient de l'espace hyperbolique par un groupe discret d'isométries). Donc elle est localement conformement plate et de courbure scalaire constante strictement négative. On peut utiliser le même procédé d'existence de solutions minorées par une constante positive $m > 0$ et solutions de l'équation de la courbure prescrite. Par un changement de métrique conforme on se ramène à un ouvert de l'espace \mathbb{R}^4 .

Exemples en dimension 3, cas non plat et plat

Soit M_φ le Torus bundle de William Goldman. Cette variété compacte connexe orientable ne possède pas de structure localement plate. C'est à dire que toute métrique g sur cette variété est non localement plate. D'après Aubin, il existe une métrique g_1 de courbure scalaire $S_{g_1} = -1$ et à partir de cette métrique, pour toute fonction f strictement négative quelque part, il existe une métrique g_2 telle que $S_{g_2} = f$. Il suffit de prendre f changeant de signe.

Comme on peut résoudre le problème de la courbure prescrite avec H une courbure prescrite cutoff (autour de P tel que $C_{g_2}(P) \neq 0$, en dimension 3, le tenseur de Weyl est nul, on prend le tenseur de Cotton, C_{g_2} caractérise la courbure et c'est un invariant conforme), et $H \leq 0$, pour une courbure scalaire de départ égale à f relativement à la métrique g_2 , puis on rajoute à H une constante $c > 0$ ou une fonction $k > 0$, dans ce cas il se peut qu'on ne puisse pas minorer les solutions, car le point Q où le minimum est atteint peut être tel que $f(Q) \geq 0$.

Remarque: Pour trouver des solutions de l'équation de la courbure prescrite, on considère, $f \leq 0$ cutoff alors $\exists g_2$ telle que $S_{g_2} = f$, puis on résout le problème de la courbure prescrite avec $F \equiv -1$, c'est fait dans le livre d'Aubin, de plus la solution u_1 est unique. On considère la métrique $g_3 = u_1^{4/(n-2)} g_2$, sa courbure scalaire est -1. On résout le problème de la courbure prescrite (par les sous et sur solutions, c'est fait dans le livre d'Aubin), pour une courbure prescrite H cutoff, comme on l'a dit précédemment, puis on rajoute une constante positive c ou une fonction positive k . Dans ce cas les solutions u_c sont minorées par $m > 0$. Donc les solutions

au final sont du type $u_1 u_c$ sont minorées. Ce qu'on vient de voir c'est qu'il existe des solutions et elles sont minorées par $m > 0$ de :

$$-\Delta u + fu = (H + c)u^{N-1}, \quad u > 0, \quad (E_c)$$

Par contre ce qu'on ne sait pas est que si toutes les solutions sont minorables par $m > 0$.

Soit, u une solution de (E_c) alors elle n'est pas forcément minorable, car le point Q ou le minimum est atteint peut être tel que $f(Q) = 0$.

Dans le cas plat, il suffit de considérer $S_1 \times S_1 \times S_1$ qui est plat de courbure scalaire nulle (produit d'un Tore de courbure sectionnelle nulle et d'un cercle, avec la métrique produit) et utiliser le théorème du livre de Hebey, comme ce qu'on a fait pour la dimension 5. (Théorème de Schoen-Escobar d'existence de solutions changeant de signe).

Un exemple en dimension 3:

On résout le problème de la courbure prescrite sur la sphère S_2 de dimension 2 avec la courbure prescrite $R = 1 + (\langle x | e \rangle)^2$, $R(-x) = R(x)$, (c'est un résultat de Moser, voir le livre d'Aubin), R est non constante et donc la courbure sectionnelle associée est non constante.

On considère le produit $M_3 = S_1 \times S_2$ avec la métrique précédente sur S_2 de courbure sectionnelle non constante. Donc M_3 est non localement conformément plate par un résultat d'Hebey (courbure sectionnelle de S_2 non constante).

On utilise le théorème dans le livre d'Aubin, comme dans l'exemple 3 en dimension 5. ($\sup f \leq k \inf f$, $k > 1$). On choisit $f > 0$ telle ∇f non borné, tendant vers une fonction Heaviside, car un théorème de YY.Li-M.Zhu dit que tout est borné, si f est C^2 et en particulier les solutions sont minorées).

Dans ce cas on n'a pas forcément un minorant des solutions de l'équation de Yamabe dans la boule ou $C_g(P) \neq 0$, (tenseur de Cotton), sur une variété non conformément plate.

On utilise le résultat d'Escobar-Schoen en dimension 3, pour une fonction $f = \epsilon > 0$ cutoff changeant de signe. (voir le livre d'Hebey).

Dans ce cas aussi, on ne peut pas minorer les solutions sur une variété compacte non localement conformément plate de dimension 3.

Ici aussi, on ne sait pas minorer les solutions.

Exemples en dimension 4, cas plat et non plat

On prend une surface de Riemann S de courbure scalaire $R = -2$ (donc sectionnelle -1) et la sphère S_2 de courbure scalaire 2 (donc sectionnelle 1). Le produit $S_2 \times S$ est conformément plat et de courbure scalaire nulle, par le théorème du livre d'Hebey (courbures sectionnelles constantes opposées). On peut appliquer le théorème d'existence de solutions pour des courbures prescrites changeant de signe en dimension 4, sur une variété compacte de courbure scalaire nulle (Résultat d'Escobar-Schoen). On pouvait prendre aussi, le produit de 2 Tores, muni de la métrique produit (courbures sectionnelles nulles donc opposées), $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ de courbure scalaire nulle. Ici, on ne sait pas minorer les solutions.

Dans le cas non plat, il suffit de considérer la surface $K3$ munie d'une métrique non localement conformément plate, de courbure scalaire nulle. On fait la même chose que dans le cas plat. Ici, on ne sait pas minorer les solutions.

On peut prendre $P_2(\mathbb{C})$ de dimension réelle 4 non localement conformément plat et de courbure scalaire constante positive, on applique le théorème d'Aubin comme en dimension 5, dans le cas d'invariant de Yamabe positif. Ici aussi, on ne sait pas minorer les solutions.

Exemples en dimension $n \geq 3$, cas plat

Sur le Tore \mathbb{T}^n , $n \geq 3$, il existe une métrique plate (voir, Gallot-Hulin-Lafontaine) et donc de courbure scalaire $R = 0$. Le théorème dans le livre d'Hebey d'existence de solutions pour des courbures scalaires prescrites changeant de signe et d'intégrales négative, sur une variété compacte de courbure scalaire nulle, n'est pas forcément vrai, sauf en dimensions 3 et 4 (Escobar-Schoen) et en dimension 5 par Bismuth avec des conditions supplémentaires, dans le cas non conformément plat.

Par contre dans le cas conformément plat (ce qui nous intéresse ici), ce théorème est vrai en prenant des fonctions cutoff changeant de signe, c'est un théorème d'Escobar-Schoen.

On pouvait résoudre une équation différentielle sur une boule de l'espace euclidien avec ou sans condition au bord (attention à la formule de Pohozaev).

Par exemple, dans des couronnes, Kazdan-Warner montrent l'existence de solutions avec conditions de Dirichlet.

Il y a aussi le resultat de Coron dans des domaines à trous, on peut modifier un peu le domaine pour avoir une infinité de solutions pour une infinité de domaines à trous, par exemple on enleve des disques.

On a aussi les solutions de Caffarelli-Gidas-Spruck.

Ici, on ne sait pas minorer les solutions.

Exemple en dimension 2 pour l'equation avec singularité au bord: sur la boule unité.

Ici, $\Delta = -(\partial_{11} + \partial_{22})$.

Soit $\mu \geq 0$ tel que:

$$\mu = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \int_{\Omega} \frac{V e^u}{|x - x_0|^{2\alpha}} dx = 1, u \in H_0^1(\Omega) \right\}$$

Ici, $\Omega = B_1(0)$, la boule unité.

1) On prouve que cet ensemble est non vide:

On considere, $u_{\beta}(r) = \beta(1 - r^2)$ et $0 < \epsilon \leq V \leq 2\epsilon$. On prend d'abord la fonction nulle $u \equiv 0$. Alors, on choisit $\epsilon > 0$ petit tel que:

$$\int_{\Omega} V e^u / |x - x_0|^{2\alpha} dx \leq 2\epsilon \int_{\Omega} 1 / |x - x_0|^{2\alpha} dx < 1.$$

On utilise u_{β} , on utilise les coordonnes polaires:

$$\int_{\Omega} V e^u / |x - x_0|^{2\alpha} dx \geq \int_{B_1(0)} V e^{u_{\beta}} / |x - x_0|^{2\alpha} dx \geq \frac{2\pi\epsilon}{2^{2\alpha}} \int_0^1 r e^{\beta(1-r^2)} dr$$

Donc en prenant β grand, on a:

$$\int_{\Omega} V e^u / |x - x_0|^{2\alpha} dx \geq \frac{2\pi\epsilon}{2^{2\alpha+1}\beta} e^{\beta}(1 - e^{-\beta}) \rightarrow +\infty.$$

Donc, il existe $\beta_0 \leq \beta_{max} = \beta_{max}(\epsilon, \alpha)$ tel que:

$$\int_{\Omega} V e^{u_{\beta_0}} / |x - x_0|^{2\alpha} dx = 1.$$

Donc μ est bien definit.

2) En utilisant une suite minimisante et l'injection compacte de Moser-Trudinger dans L^1 . μ est atteint et par les multiplicateurs de Lagrange on a l'existence de u et λ tels que:

$$\Delta u = \lambda V e^u / |x - x_0|^{2\alpha}, u \in H_0^1, \int_{\Omega} V e^u / |x - x_0|^{2\alpha} dx = 1.$$

u est reguliere. Si $\lambda \leq 0$ par le principe du maximum $u \leq 0$ et donc:

$$\int_{\Omega} V e^u / |x - x_0|^{2\alpha} dx < 1.$$

Ce n'est pas possible.

Donc $\lambda > 0$ et $u > 0$. En utilisant la premiere fonction propre du Laplacien φ_1 (dans le probleme variationnel) et u_{β_0} on a $\mu \leq C(\beta_{max})$ et $\lambda \leq C(\beta_{max}, \epsilon, \varphi_1) = C(\alpha, \epsilon, \varphi_1)$.

On vient de construire une solution du probleme variationnel avec singularité au bord et ces solutions (puisque λ est uniformément borné) verifient des conditions du probleme du type Brezis-Merle avec bornes uniformes.

REFERENCES

- [1] T. Aubin. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 1998.
- [2] C. Bandle. Isoperimetric Inequalities and Applications. Pitman, 1980.
- [3] H. Brezis, L. Nirenberg. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. Comm. Pure and Appl. Math. Volume 36, 4, pp 437-477. (1983).
- [4] Davis.M.W. A hyperbolic 4-manifold Proc. Amer. Math. Soc.93 (1985), pp.325-328.
- [5] Dupaigne. Stable Solutions of Elliptic Partial Differential Equations (Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics). 2011.

- [6] J. Escobar. R. Schoen. Conformal metrics with prescribed scalar curvature. *Inventiones mathematicae* (1986) 86, page 243-254.
- [7] Gallot. Hulin. Lafontaine. *Riemannian Geometry*.
- [8] E. Hebey. *Introduction à l'analyse non-linéaire sur les variétés*. Diderot Editions.
- [9] D. Holzman. Solutions nodales sur les variétés riemanniennes non localement conformement plates à bord. *Comment. Math. Helv.* 76 (2001), no. 3, 373-387.
- [10] D. Huybrechts. *Lecture on K3 surfaces*.
- [11] D. Joyce. Constant scalar curvature metrics on connected sums. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*.(2003), Issue 7, pp 405-450.
- [12] Karp. L, Pinsky. M. The first eigenvalue of a small geodesic ball in a Riemannian manifold. *Bull. Sci. Math.* (2)111 (1987), no. 2, 229-239.
- [13] Lafontaine. *Introduction à la géométrie Différentielle*.
- [14] J.G. Ratcliffe. S.T. Tschantz. On the Davis hyperbolic 4-manifold. *Topology and its Applications* Volume 111, Issue 3. pp 327-342

2. OPERATEURS D'ORDRE 2.

1) Inégalités de Harnack pour les solutions, les sur-solutions, les sous-solutions: ces estimations se font à l'aide du procédé d'itération de De Giorgi-Nash-Moser.

2) Existence de solutions: formulation variationnelle et théorèmes du type Lax-Milgram dans les Hilberts.

3) Existence des solutions pour des EDP elliptiques avec opérateur Laplacien: Potentiel Newtonien, régularité en se ramenant (par soustraction du potentiel Newtonien) aux fonctions harmoniques qu'on sait régulières par le Théorème de Weyl (conditions minimales L^1 , mais la formulation variationnelle on sait qu'on a mieux). pour la régularité au bord, on suppose la condition de Dirichlet, alors les fonctions harmoniques (on se ramène à ce cas par soustraction du potentiel Newtonien) sont prolongeables grâce à la formule de la moyenne qu'on étend à travers le demi-espace par symétrisation). La régularité C^2 se fait grâce à la régularité du noyau Newtonien (se fait par calcul explicite de dérivées sous le signe somme), puis par soustraction, on se ramène aux fonctions harmoniques).

4) On dispose des théorèmes d'existence et régularité pour le problème de Dirichlet pour le Laplacien. Pour le cas d'un opérateur elliptique d'ordre 2, on utilise la méthode de continuité pour prouver l'existence de solutions avec régularité de Schauder. Puis on compare par le principe du maximum dans $W_0^{1,2}$ ces solutions régulières aux solutions obtenues par la formulation variationnelle. Si le coefficient devant le terme linéaire $c \leq 0$, alors le principe du maximum donne l'unicité des solutions, d'où la régularité de Schauder, intérieures et sur le bord. Par une alternative de Fredholm on étend au cas où c non nécessairement négatif ou nul.

5) Régularité $W^{2,p}$ d'Agmon, elles se font par la méthode des quotients différentiels, elles sont intérieures et au bord pour des fonctions tests $C_c^2(\Omega)$ pour la régularité intérieures (au sens des distributions) et pour des fonctions $C_0^2(\Omega)$ (C^2 et nulles au bord) pour la régularité au bord.

Les estimations uniformes $W^{2,p}$ peuvent être obtenues (en plus de ce que dit Agmon) par le procédé de Calderon-Zygmund, qui consiste à obtenir une estimation L^p pour les dérivées secondes à partir de celle du noyau Newtonien. C'est une décomposition en n -cubes de Calderon-Zygmund et l'utilisation du théorème d'interpolation $(L^1, L^2) \rightarrow L^p(1 < p < 2)$ (et par dualité $L^p, p > 2$) de Marcienewicz-Thorin. Puis on ramène l'estimation pour l'opérateur L à une estimation pour un opérateur à coefficient constant comme le Laplacien par exemple.

Les théorèmes d'Agmon et de régularité sont utilisés dans la construction des fonctions de Green.

3. FONCTIONS DE GREEN.

Le monographe de Druet-Hebey-Robert est assez clair et précis. On donne quelques explications sur les fonctions de Green et sur le fait que le dernier terme dans la décomposition de cette fonction est de classe C^1 . C'est essentiellement dû au fait que le premier terme est donné explicitement et on utilise une récurrence pour prouver que les termes de la décomposition sont Sobolev et continues en dehors de la diagonale. (Ou bien comme dans le monographe de Druet-Hebey-Robert, on fait la différence des fonctions en deux points et on remarque qu'on a des fonctions Lipschitziennes, Notons comme c'est écrit dans Ambrosio-Fusco-Pallara, pour pouvoir savoir si une fonction est Sobolev, il suffit qu'on ait des dérivées directionnelles).

Soit (\bar{W}, g) une variété Riemannienne compacte avec ou sans bord. Dans le cas sans bord, on la note (M, g) .

Soit H la fonction définie comme dans le livre d'Aubin. Cette fonction ne dépend pas de la fonction rayon d'injectivité dans le cas d'une variété compacte sans bord. Elle dépend (à gauche en P) du rayon d'injectivité dans le cas d'une variété à bord. On sait que la fonction rayon d'injectivité est continue sur W avec $\delta(P) \leq d(P, \partial W)$, on peut alors la prolonger par 0 sur ∂W . Alors $\delta(P)$ est continue sur \bar{W} .

On pose:

$$\Gamma_1(P, Q) = -\Delta_Q H(P, Q), \quad \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_W \Gamma_i(P, R) \Gamma_1(R, Q) dR.$$

Alors,

$$|\Gamma_1| \leq C[d(P, Q)]^{2-n}.$$

Explicitement et par récurrence les Γ_i sont continues en dehors de la diagonale et pour P ou Q proche du bord, elles sont nulles (conditions au bord). On les prolonge par 0 au bord. Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on prouve qu'elles sont $W^{1,\infty}$ en dehors de la diagonale en Q car elles sont Sobolev est leur dérivées bornées. La fonction $d(P, Q) = d_P(Q)$ est régulière en Q en dehors de P et en fixant Q elle est Lipschitzienne en P , on alors le fait que $(R, Q) \rightarrow \partial_Q d_R(Q)$ est continue en dehors de la diagonale et L_{loc}^∞ . Donc, par le théorème de convergence dominée (enlever de petites boules) $\Gamma_i * \partial_Q \Gamma_1$ et $\Gamma_i * \partial_Q H$ sont C^0 en dehors de la diagonale. Donc, les Γ_i et $\Gamma_i * H$ sont C^1 en dehors de la diagonale. (Le point essentiel est la fonction distance). (Concernant la fonction distance, $(R_i, Q) \rightarrow d(R_i, Q) = d(R_i, \exp_{R_i}(r\theta))$, $Q = \exp_{R_i}(r\theta)$, $\epsilon_0/2 \leq r \leq \delta(R_i)/3$, $\theta \in \mathbb{S}_{n-1}$ et la carte de référence est $[B(R_0, \delta(R_0)/3), \exp_{R_0}]$ avec $R_i \rightarrow R_0$. On voit alors qu'en coordonnées géométriques polaires centrées en R_i un calcul de $\Delta_{g,Q} d(R_i, Q) \in L^\infty$ et $d(R_i, \cdot) \rightarrow d(R_0, \cdot)$ et par les estimations elliptiques on a $\partial_Q d(R_i, Q) \rightarrow \partial_Q d(R_0, Q)$ pour $d(R_i, Q) \geq \epsilon_0 > 0$.)

Dans le cas où $W = M$ sans bord:

D'après sa formule explicite H est C^1 en dehors de la diagonale. Elle est $W^{1,1+\epsilon}$ de chaque variable pour un $\epsilon > 0$ assez petit, par récurrence et par Fubini, Fubini-Tonnelli:

$$\partial_P \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_M \partial_P \Gamma_i(P, R) \Gamma_1(R, Q) dR,$$

et,

$$\partial_Q \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_M \Gamma_i(P, R) \partial_Q \Gamma_1(R, Q) dR.$$

Pour une variété avec bord, on ne peut pas dériver par rapport P , car l'expression de Γ_i et en particulier de Γ_1 contient δ_P qu'on sait seulement continue et pas forcément différentiable. Dans le cas avec bord, les fonctions Γ_i sont continues en P en dehors de la diagonales et $L^{1+\epsilon}$, $\epsilon > 0$ seulement, mais ceci suffit pour prouver la symétrie par le théorème d'Agmon)

On a aussi, les estimées de Giraud. Ainsi de proche en proche, les Γ_i deviennent de plus en plus régulières. on utilise le théorème de Giraud pour prouver que $\Gamma_k = r^{\lambda-n} * r^{2-n}$ avec $\lambda + 2 > n$ (donc $\geq n + 1$ car λ est entier puisqu'on dérive les Γ_i). (Si $\lambda > n - 1$ ($\lambda \geq n$) c'est fini (on regarde Γ_{k-1}), si $\lambda = n - 1$ alors: $\Gamma_k = r^{-1} * r^{2-n}$ et $\partial_P \Gamma_k = r^{-2} * r^{2-n}$ et $\partial_Q \Gamma_k = r^{-1} * r^{1-n}$ qui est en log par Giraud et donc $\partial_P \Gamma_{k+1}$ et $\partial_Q \Gamma_{k+1}$ sont $C^0(M \times M)$ par Giraud et donc Γ_{k+1} est $C^1(M \times M)$. Dans le cas avec bord, Γ_k continue implique que Γ_{k+1} est $W^{1,\infty}$ en Q . (On a mieux C^1 en Q car la fonction $(R, Q) \rightarrow \partial_Q d(R, Q)$ est C^0 en dehors de la diagonale de W et H est à support compact (elle s'annule avant le bord) et donc $(\Gamma_k * \partial_Q H$ est C^0 en dehors de la diagonale de \bar{W})).

Dans le cas d'un opérateur $-L = -\Delta + h$, la régularité de Γ_{k+1} dépend de celle de h . Si par exemple h est C^1 alors comme précédemment Γ_{k+1} est C^1 de P et Q . Bien sur le Γ_1 change:

$$\Gamma_1(P, Q) = -\Delta_Q H(P, Q) + h(Q)H(P, Q).$$

On peut faire plus, on remarque que par exemple que pour les variétés à bord, la paramétrix est solution d'une EDP elliptique en dehors de la singularité, on utilise les théorèmes d'Agmon

et de régularité dans la construction complète de la fonction de Green dans le cas des variétés à bord, voir le monographe de F.Robert (que je n'ai pas cité ici).

4. PRINCIPE DU MAXIMUM.

4.1. La méthode "moving-plane" et "moving-sphere". La méthode "moving-plane" consiste à rechercher, si possible, les points de symétrie pour des E.D.P définies sur des domaines ayant des axes de symétries, puis, de caractériser ces solutions. On part de "l'infini", un point très loin, puis, on considère la fonction et son symétrisée par rapport au plan contenant ce point, puis on ramène, le plan jusqu'à l'annulation de la différence entre cette fonction et son symétrisée, si c'est le cas, le plan limite est le plan de symétrie. Ici, on suppose les solutions dans $C^{2,\alpha}$, $\alpha > 0$.

Notons que certains des auteurs suivants, utilisent les propriétés du principe du maximum.

L'idée est qu'on doit utiliser les propriétés du principe du maximum.

1-Le principe du maximum lui-même et le lemme de Hopf.

2-Le minimum est atteint sur le bord, (YY.Li-L-Zhang), ils passent d'un opérateur du type $L+c$ à un opérateur du type L en résolvant un problème de Dirichlet (ils éliminent c en considérant le produit par une fonction) avec Alexandrov-Bekelman-Pucci et le principe du maximum de Gidas-Nirenberg.

Exemple 1: Gidas-Nirenberg.

Sur la boule unité B de \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, on considère le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)-\epsilon} & \text{dans } B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, \\ u > 0 & \text{dans } B_1(0) \\ u = 0 & \text{sur } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Où $\epsilon > 0$ est très petit.

Gidas-Nirenberg: La solution u du problème précédent est radiale et strictement décroissante.

Exemple 2: De Figueiredo-Lions-Nussbaum et Chen-Li, Ma-Wei.

Sur un ouvert régulier en dimension 2, on considère:

$$\begin{cases} -\Delta u = V e^u, & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec,

$$0 \leq V \leq b, \text{ sur } \bar{\Omega},$$

et,

$$|\nabla V| \leq A, \text{ sur } \bar{\Omega}.$$

Estimations de De Figueiredo-Lions-Nussbaum: ce sont des estimations uniformes au voisinage du bord, on les prouve grâce à la méthode moving-plane. C'est essentiellement une transformation de Kelvin, pour rendre le voisinage du bord convexe, et une application du principe du maximum (suivant la direction normale).

Par la méthode moving-plane on prouve que les points critiques sont loin du bord, en se plaçant suivant la normale, après avoir utilisé la transformée de Kelvin. Voir les articles de Chen-Li et Ma-Wei.

En utilisant la transformée de Kelvin et le principe du maximum, on classe les solutions de l'équation :

Exemple 3: Caffarelli-Gidas-Spruck et Chen-Li.

Caffarelli-Gidas-Spruck. Les solutions de:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)}, & u > 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \\ u(0) = 1, \nabla u(0) = 0. \end{cases}$$

Sont:

$$u(x) = (1 + \gamma|x|^2)^{(2-n)/2}, \quad \gamma > 0$$

La preuve de Chen-Li est plus courte et elle utilise les memes arguments que ceux de Caffarelli-Gidas-Spruck, c'est essentiellement une transformation de Kelvin pour avoir un comportement asymptotique et aussi l'utilisation du principe du minimum pour des fonctions regulieres singulieres en un point puis l'argument moving-plane basé sur le principe du maximum.

On presente le resultat de Classification par la methode moving-plane des solutions d'une EDP elliptique nonlineaire en dimension 2:

Chen-Li: pour $K > 0$, les solutions de:

$$\begin{cases} -\Delta u = Ke^u, & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ u(0) = 0, \nabla u(0) = 0, \\ \int_{\mathbb{R}^2} e^u < +\infty. \end{cases}$$

Sont:

$$u(x) = -2 \log(1 + \gamma|x|^2), \quad \gamma = \sqrt{(K/8)}$$

Cette preuve utilise des estimees asymptotiques specifiques a la dimension 2 et le principe du maximum et lemme de Hopf.

Exemple 4: Han.

Si on remplace B par un ouvert régulier quelconque, noté Ω , en maintenant la même équation, les solutions ne sont pas forcément radiales.

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)-\epsilon} & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où $\epsilon > 0$ est très petit.

Han Il existe un voisinage du bord ω ne dépendant que de la géométrie du domaine Ω et de la dimension n , ainsi qu'une constante $c = c(\Omega, n) > 0$ telle que:

$$\|u\|_{L^\infty(\omega)} \leq c.$$

Où u est la solution du problème précédent.

Exemple 5: Chen-Lin.

En utilisant la méthode moving-plane, Chen et Lin ont prouvé une estimation a priori sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , $n \geq 3$:

Si u est solution de:

$$-\Delta u = Vu^{(n+2)/(n-2)},$$

avec,

$$0 < a \leq V(x) \leq b < +\infty$$

$$\|\nabla^\alpha V\| \leq C_\alpha \|\nabla V\|^{\beta(\alpha)}, \quad \text{avec } \alpha \leq n - 2.$$

alors,

$$\sup_K u \times \inf_\Omega u \leq c = c(a, b, C_\alpha, n, K, \Omega).$$

La preuve de Chen-Lin consiste a utiliser le principe du maximum et le lemme de Hopf pour prouver que la symétrisee d'une certaine fonction est positive et que la derivee de cette fonction est strictement positive alors que par le raisonnement par l'absurde ("blow-up") cette fonction a maximum local (point critique), ce qui est absurde.

Exemple 6: Brezis-Li-Shafir.

En dimension 2, la methode "moving-sphere" donne pour les solutions de:

$$-\Delta u = Ve^u,$$

On suppose $0 < a \leq V(x) \leq b < +\infty$ et que V est uniformément Lipschitzienne,

$$\sup_K u + \inf_\Omega u \leq c = c(a, b, \|\nabla V\|_\infty, K, \Omega).$$

Exemple 7: Korevaar-Mazzeo-Pacard-Schoen.

La methode "moving-sphere" donne:

Sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, on considère l'équation de Yamabe:

$$-\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)}, \quad u > 0.$$

Alors: pour tout compact K de Ω , on a:

$$\sup_K u \times \inf_\Omega u \leq c = c(K, n, \Omega).$$

La preuve est basee sur le fait qu'on ne pas pas avoir une certaine condition au bord par le principe du maximum et le lemme de Hopf.

Exemple 8: Li-Zhang.

La methode "moving-sphere" donne:

Sur une variété Riemannienne quelconque (M, g) (non nécessairement compacte), de dimension $n \geq 3$ et de courbure scalaire S_g , on considère l'équation de Yamabe:

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = u^{(n+2)/(n-2)}, \quad u > 0.$$

Alors: en dimensions 3, 4, pour tout compact K de M , on a:

$$\sup_K u \times \inf_M u \leq c = c(K, M, g, n = 3 \text{ ou } n = 4).$$

Après avoir utiliser la transformation de Kelvin, Li-Zhang prouvent que la positivite de la fonction obtenue par symetrisation implique la positivite de la fonction limite (obtenue par symetrisation) et dans ce cas elle serait constante, ce qui n'est pas possible par le resultat de Caffarelli-Gidas-Spruck. (La fonction limite est due au "blow-up").

4.2. Principe du maximum dans $W_0^{1,1}(\Omega)$. Le principe du maximum dans $W_0^{1,1}(\Omega)$ est basé sur l'inegalite de Kato.

Kato: si $u \in W^{1,1}(\Omega)$ et $\Delta u \in L^1(\Omega)$, alors on a au sens des distributions:

$$\Delta u^+ \geq \chi_{\{u \geq 0\}} \Delta u.$$

On remarquera qu'en utilisant la fonction $f_\epsilon(t) = \sqrt{(t^2 + \epsilon^2)}$, on prouve que $\text{Trace}(|u|) = |\text{Trace}(u)|$ et $\text{Trace}(u^+) = (\text{Trace}(u))^+$ et donc si $u \in W_0^{1,1}$ alors $u^+ \in W_0^{1,1}$ et appliquer a u^+ ce qui est considéré comme le principe de comparaison dans le monograph de Brezis-Marcus-Ponce. (il suffit de consider la fonction $-\Delta \xi = 1$ avec condition de Dirichlet).

Exemple 1: Brezis-Merle.

On considère deux suites de fonctions (u_i, V_i) solutions de:

$$-\Delta u_i = V_i e^{u_i},$$

avec,

$$V_i \geq 0, \quad \|V_i\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1, \quad \|e^{u_i}\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C_2,$$

avec, $1 < p \leq +\infty$. Alors, on a, ou bien

$$\sup_K |u_i| \leq c = c(K, C_1, C_2, \Omega)$$

ou bien,

$$u_i \rightarrow -\infty, \text{ sur tout compact de } \Omega,$$

ou bien,

Il existe un ensemble fini de points S tel que $u_i \rightarrow -\infty$ uniformément sur tout compact de $\Omega - S$ et $u_i \rightarrow +\infty$ sur S et, au sens faible, on a,

$$V_i e^{u_i} \rightarrow \sum_j \alpha_j \delta_{a_j}, \text{ avec } \alpha_j \geq 4\pi/p', \text{ et } a_j \in S.$$

Comme corollaire de ce résultat, on a:

$$\sup_K u \leq c = c(\inf_{\Omega} V, \|V\|_{L^\infty(\Omega)}, \inf_{\Omega} u, K, \Omega).$$

REFERENCES

- [1] T. Aubin. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, 1998.
- [2] Ambrosio. L, Fusco. N, Pallara. D. *Functions of Bounded variations and Free discontinuity Problems*, Oxford Press. 2000.
- [3] C. Bandle. *Isoperimetric Inequalities and Applications*. Pitman, 1980.
- [4] L. Boccardo, T. Gallouet. Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data. *J. Funct. Anal.* 87 no 1, (1989), 149-169.
- [5] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle et Applications*. 1983.
- [6] Brezis. H, Marcus. M, Ponce. A. C. Nonlinear elliptic equations with measures revisited. *Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations*, 55-109, *Ann. of Math. Stud.*, 163, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.
- [7] H. Brezis, F. Merle. Uniform estimates and Blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimension. *Commun. in Partial Differential Equations*, 16 (8 and 9), 1223-1253(1991).
- [8] H. Brezis, W. A. Strauss. Semi-linear second-order elliptic equations in L1. *J. Math. Soc. Japan* 25 (1973), 565-590.
- [9] H. Brezis, YY. Li , I. Shafrir. A sup+inf inequality for some nonlinear elliptic equations involving exponential nonlinearities. *J.Funct.Anal.* 115 (1993) 344-358.
- [10] Brezis. H, Marcus. M, Ponce. A. C. Nonlinear elliptic equations with measures revisited. *Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations*, 55-109, *Ann. of Math. Stud.*, 163, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.
- [11] H.Brezis and F.Merle, Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V e^u$ in two dimensions, *Commun Partial Differential Equations* 16 (1991), 1223-1253.
- [12] L. Caffarelli, B. Gidas, J. Spruck. Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth. *Comm. Pure Appl. Math.* 37 (1984) 369-402.
- [13] Chen. W, Li, C. Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations. *Duke Math. J.* 63 (1991), no. 3, 615-622.
- [14] W. Chen, C. Li. A priori Estimates for solutions to Nonlinear Elliptic Equations. *Arch. Rational. Mech. Anal.* 122 (1993) 145-157.
- [15] C-C.Chen, C-S. Lin. Estimates of the conformal scalar curvature equation via the method of moving planes. *Comm. Pure Appl. Math.* L(1997) 0971-1017.
- [16] de Figueiredo, D. G, Lions, P-L, Nussbaum, R. D. A priori estimates and existence of positive solutions of semi-linear elliptic equations. *J. Math. Pures Appl.* (9) 61 (1982), no. 1, 41-63.
- [17] O. Druet, E. Hebey, F.Robert, *Blow-up theory in Riemannian Geometry*, Princeton University Press 2004.
- [18] B. Gidas, W-M. Ni, L. Nirenberg. Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle. *Commun. Math. Phys.* 68, 209-243 (1979).
- [19] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second order*, Berlin Springer-Verlag, Second edition, Grundlehern Math. Wiss.,224, 1983.
- [20] Han Z-C. Asymptotic approach to singular solutions for nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent. *Ann. Inst. Henri Poincaré. Analyse non lineaire* 8 (1991) 159-174.
- [21] E. Hebey, *Analyse non lineaire sur les Variétés*, Editions Diderot.
- [22] N. Korevaar, F. Pacard, R. Mazzeo, R. Schoen. Refined asymptotics for constant scalar curvature metrics with isolated singularities. *Invent. Math.* 135 (1999), no. 2, 233-272.
- [23] YY. Li. Harnack Type Inequality: the Method of Moving Planes. *Commun. Math. Phys.* 200,421-444 (1999).
- [24] YY. Li, L. Zhang. A Harnack type inequality for the Yamabe equation in low dimensions. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 20 (2004), no. 2, 133-151.
- [25] L. Ma, J-C. Wei. Convergence for a Liouville equation. *Comment. Math. Helv.* 76 (2001) 506-514.
- [26] J. Serrin, A symmetry problem in potential theory, *Arch. Rational Mech. Anal.* 43 (1971), 304-318.

EQUIPED' ANALYSE COMPLEXE ET GEOMETRIE, UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, 75005, PARIS, FRANCE.