



HAL
open science

L'opérateur de Dirac sur les tenseurs et les principes d'unification.

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. L'opérateur de Dirac sur les tenseurs et les principes d'unification. : Tenseur. [Rapport de recherche] Académie de Versailles; Rectorat de versailles. 2017. hal-01559016

HAL Id: hal-01559016

<https://hal.science/hal-01559016>

Submitted on 10 Jul 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'OPÉRATEUR DE DIRAC SUR LES TENSEURS ET LES PRINCIPES D'UNIFICATION

JEAN LOUIS JONOT

ABSTRACT. La question posée dans cet article est la suivante:” Peut-on décrire l'équation relativiste de Dirac et l'équation relativiste d'Einstein à partir d'un seul opérateur?” Pour répondre à cette question on définit la notion de section de Dirac sur un fibré vectoriel ζ . A partir d'une connexion de Koszul, on construit les opérateurs de Dirac de rang $n \geq 1$ et leurs extensions $H_n^{p,q}$ aux fibrés $\zeta^{p,q} = \zeta^{*\otimes p} \otimes \zeta^{\otimes q}$. Ces extensions permettent de définir les équations de Dirac de rang n . On applique les résultats obtenus au fibré tangent de \mathbf{W} , noté $\xi_{\mathbf{W}}$, et aux extensions sur $\xi_{\mathbf{W}}^{2,0}$. On peut écrire, sous certaines conditions sur la section γ , l'équation relativiste d'Einstein sous la forme d'une équation de Dirac de rang 2. Si γ vérifie

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{I}_4$$

l'équation de Dirac de rang 1 complexifiée décrit l'équation relativiste de Dirac.

L'autre approche consiste à remarquer que l'opérateur de Dirac de rang 2 fait intervenir la courbure de la connexion ∇ sous la forme

$$H_2 = \gamma_2 \otimes R^\nabla$$

si on fait l'hypothèse sur les commutateurs

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \mathcal{H}^{\mu\nu}(\lambda), \lambda = -\frac{1}{2}R + \Lambda$$

alors l'équation relativiste d'Einstein s'écrit sous forme d'opérateurs

$$H_2 = \kappa T.$$

1. L'ÉQUATION DE DIRAC SUR LES FIBRÉS VECTORIELS

Soit $\zeta = (E(\zeta), \pi, \mathbf{W}, F)$ un fibré vectoriel de dimension finie, de base une variété lisse de dimension $\dim \mathbf{W} \geq 4$. Une section de Dirac γ est une section du fibré $\text{Hom}(\xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \zeta, \zeta)$. Pour chaque événement $w \in \mathbf{W}$, il existe un morphisme

$$\gamma(w) : E_w^*(\xi_{\mathbf{W}}) \otimes E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\zeta), \xi_{\mathbf{W}}^*$$

où $\xi_{\mathbf{W}}^*$ est le fibré dual du fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}}$ de \mathbf{W} , $E_w^*(\xi_{\mathbf{W}}) \otimes E_w(\zeta)$ et $E_w(\zeta)$ sont les fibres en w des fibrés $\xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \zeta$ et ζ . Pour chaque section locale d du fibré $\xi_{\mathbf{W}}^*$, on définit l'endomorphisme de Dirac

$$\gamma^d \in \Gamma(\text{End}(\zeta)), \gamma^d(w) : E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\zeta)$$

où $\gamma^d(w)(x) = \gamma(w)(d(w) \otimes x)$, $\forall x \in E_w(\zeta)$ et $d(w) \otimes x$ s'identifie à une application linéaire

$$d(w) \otimes x : T_w(\mathbf{W}) \rightarrow E_w(\zeta), (d(w) \otimes x)(y) = d(w)(y) \cdot x.$$

Date: 10/07/2017.

1991 Mathematics Subject Classification. 18F15,55R05,83C05,81R05,81R50.

Key words and phrases. Section de Dirac, Tenseur métrique, Tenseur énergie-impulsion, Endomorphisme de Dirac, Connexion de Levi-Civita. Tenseur de courbure.

Si s est une section sur \mathbf{W} du fibré ζ , on pose

$$\gamma^d(s) = \gamma(d \otimes s), \quad \gamma^d(s)(w) = \gamma(w)(d(w) \otimes s(w)), \quad \forall w \in \mathbf{W}$$

et $d \otimes s$ s'identifie à une section du fibré $\text{Hom}(\xi_{\mathbf{W}}, \zeta)$. Soit ∇ une connexion de Koszul sur ζ , l'opérateur de Dirac de rang 1 est l'opérateur H_1 défini par

$$H_1(s) = \gamma \otimes \nabla(s), \quad (\gamma \otimes \nabla(s))(w) = \gamma(w)(\nabla s(w)), \quad \forall w \in \mathbf{W}$$

et si $\nabla s = \lambda_\mu^\nu d^\mu \otimes s_\nu$ alors $H_1(s) = \lambda_\mu^\nu \gamma^\mu(s_\nu)$ où $\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$ pour des sections locales s_ν , s et des formes différentielles locales d^μ .

Definition 1. Une équation locale sur W de Dirac de rang 1 est une équation de la forme

$$H_1(s) = \lambda s, \quad (1.1)$$

où λ est une C^∞ -application propre de H_1 définie sur W .

Remark 1. L'opérateur H_1 n'est pas localement $C^\infty(W)$ -linéaire,

$$H_1(\lambda s) = \gamma^{d\lambda}(s) + \lambda H_1(s), \quad d\lambda(X) = \mathcal{L}_X \lambda \quad (1.2)$$

le défaut de $C^\infty(W)$ -linéaire est $\gamma^{d\lambda}$ pour λ où $\mathcal{L}_X \lambda$ est la dérivée de Lie le long du champ X . Si $H_\lambda(s) = \lambda s$ alors l'équation 1.2 s'écrit

$$[H_1, H_\lambda] = \gamma^{d\lambda},$$

$\gamma^{d\lambda}$ est aussi appelé le défaut de commutativité de l'opérateur H_1 par rapport aux λ -homothéties [5], [9]. De l'équation 1.2, on en déduit que l'opérateur H_1 est \mathbb{R} -linéaire, quand on parle de C^∞ -application propre de H_1 , on sous-entend que pour tout $w \in W$, l'opérateur linéaire $H_1(w)$ a pour valeur propre $\lambda(w)$.

Soit ζ^* est le fibré dual de ζ , on note $\zeta^{p,q}$ le fibré

$$\zeta^{p,q} = \zeta^{*\otimes p} \otimes \zeta^{\otimes q},$$

ces fibrés jouent un rôle fondamental dans le principe de quantification des fibrés des états de l'univers [4], [2]. L'opérateur H_1 s'étend à un opérateur de Dirac sur $\Gamma(\zeta^*)$, il suffit de définir la connexion duale de ∇ , notée ∇^* , et la section de Dirac duale γ^* . La connexion duale ∇^* peut se définir à partir de la dérivée covariante le long d'un champ X en posant

$$\mathcal{L}_X(s^* \otimes s) = s^* \otimes \nabla_X s + \nabla_X^* s^* \otimes s, \quad s^* \otimes s(w) = s^*(w)(s(w)) \quad \forall w \in W \subset \mathbf{W},$$

on définit l'extension de la connexion ∇ par la règle

$$\widehat{\nabla}(s \otimes t) = \widetilde{\nabla}^*(s) \otimes t + s \otimes \widetilde{\nabla}(t), \quad s \in \Gamma(\zeta^{*\otimes p}) \quad \text{et} \quad t \in \Gamma(\zeta^{\otimes p})$$

où

$$\widetilde{\nabla}^*(s \otimes t) = \widetilde{\nabla}^*(s) \otimes t + s \otimes \widetilde{\nabla}^*(t) \quad \text{si} \quad s, t \in \Gamma(\zeta^{*\otimes p})$$

et

$$\widetilde{\nabla}(s \otimes t) = \widetilde{\nabla}(s) \otimes t + s \otimes \widetilde{\nabla}(t) \quad \text{si} \quad s, t \in \Gamma(\zeta^{\otimes p}),$$

on peut ainsi définir une extension de la connexion de Koszul ∇ sur le fibré $\zeta^{p,q}$, notée $\nabla^{p,q}$. La section duale γ^* de γ est définie, en posant pour chaque événement $w \in W \subset \mathbf{W}$,

$$\gamma^*(w) : T_w^* \mathbf{W} \otimes E_w(\zeta^*) \rightarrow E_w(\zeta^*)$$

avec

$$\gamma^*(w)(d(w) \otimes s^*(w))(u) = s^*(w)(\gamma(w)(d(w) \otimes u)), \quad \forall u \in E_w(\zeta). \quad (1.3)$$

Pour γ_j , $j = 1, 2$ deux sections de Dirac sur des fibrés ζ_1 et ζ_2 , sur le fibré $\zeta_1 \otimes \zeta_2$ le produit tensoriel de γ_1 et γ_2 est défini de la façon suivante, pour chaque événement $w \in W \subset \mathbf{W}$ les applications

$$\gamma_j(w) : T_w^* \mathbf{W} \otimes E_w(\zeta_j) \rightarrow E_w(\zeta_j)$$

permettent de définir le produit tensoriel noté

$$\gamma_1(w) \boxtimes \gamma_2(w) : (T_w^* \mathbf{W} \otimes E_w(\zeta_1)) \otimes (T_w^* \mathbf{W} \otimes E_w(\zeta_2)) \rightarrow E_w(\zeta_1) \otimes E_w(\zeta_2)$$

or il y a un isomorphisme canonique $\rho(w)$,

$$\rho(w) : (T_w^* \mathbf{W} \otimes T_w^* \mathbf{W}) \otimes (E_w(\zeta_1) \otimes E_w(\zeta_2)) \rightarrow (T_w^* \mathbf{W} \otimes E_w(\zeta_1)) \otimes (T_w^* \mathbf{W} \otimes E_w(\zeta_2))$$

et on pose $\chi(w)$ l'application

$$\chi(w) : T_w^* \mathbf{W} \otimes (E_w(\zeta_1) \otimes E_w(\zeta_2)) \rightarrow (T_w^* \mathbf{W} \otimes T_w^* \mathbf{W}) \otimes (E_w(\zeta_1) \otimes E_w(\zeta_2))$$

définie par

$$\chi(w)(d(w) \otimes (s_1(w) \otimes s_2(w))) = (d(w) \otimes d(w)) \otimes (s_1(w) \otimes s_2(w)),$$

on note

$$\gamma_1 \otimes \gamma_2(w) = (\gamma_1(w) \boxtimes \gamma_2(w)) \circ \rho(w) \circ \chi(w) \quad (1.4)$$

alors

$$\gamma_1 \otimes \gamma_2 = (\gamma_1 \boxtimes \gamma_2) \circ \rho \circ \chi$$

est une section de Dirac sur le fibré $\zeta_1 \otimes \zeta_2$. On peut donc étendre la section de Dirac γ aux fibrés $\zeta^{p,q} = \zeta^{*\otimes p} \otimes \zeta^{\otimes q}$ en posant

$$\gamma^{p,q} = (\gamma^*)^{\otimes p} \otimes \gamma^{\otimes q},$$

on a vu précédemment que l'on pouvait étendre la connexion de Koszul au fibré $\zeta^{p,q}$ que l'on note $\nabla^{p,q}$ et définir ainsi l'extension de l'opérateur de Dirac H_1 de rang 1, noté $H_1^{p,q}$ par

$$H_1^{p,q} = \gamma^{p,q} \otimes \nabla^{p,q}.$$

Theorem 1. *Il existe une extension de l'opérateur de Dirac H_1 de rang 1 au fibré $\zeta^{p,q}$,*

$$H_1^{p,q} = \gamma^{p,q} \otimes \nabla^{p,q},$$

où $\nabla^{p,q}$ est l'extension de la connexion de Koszul ∇ et $\gamma^{p,q}$ est l'extension tensoriel de la section de Dirac γ au fibré $\zeta^{p,q}$.

Si ζ est le fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}}$, on munit ce fibré d'une section de Dirac γ qui est métrisable. Dans une carte de trivialisatation $W \subset \mathbf{W}$, de local frame $\{\partial_\nu\}$, le tenseur de Poisson

$$\gamma^{\nu\mu} = \text{Trace}(\gamma^\nu \gamma^\mu), \quad \gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$$

où $\{d^\mu\}$ est le local frame dual de $\{\partial_\nu\}$, définit un tenseur métrique $g^{\nu\mu} = \frac{1}{4} \gamma^{\nu\mu}$. Ce tenseur métrique permet de définir la connexion de Levi-Civita, on peut ainsi définir l'opérateur de rang 1 sur le fibré des tenseurs p fois covariants et q fois contravariants $\xi_{\mathbf{W}}^{p,q} = \xi_{\mathbf{W}}^{*\otimes p} \otimes \xi_{\mathbf{W}}^{\otimes q}$, noté $H_1^{p,q} = \gamma^{p,q} \otimes \nabla^{p,q}$. On se place sur le fibré $\xi_{\mathbf{W}}^{2,0}$, si $W \subset \mathbf{W}$ est une carte de trivialisatation du fibré tangent, la base de sections locales sur W est définie par $\{d^\mu \otimes d^\nu\}$ où $\{d^\nu\}$ est le local frame dual de $\{\partial_\mu\}$ sur W . Toute section locale sur W , $g \in \Gamma_W(\xi_{\mathbf{W}}^{2,0})$ s'écrit sous la forme

$$g = g_{\mu\nu} d^\mu \otimes d^\nu,$$

on pose

$$\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\tau \partial_\tau, \quad (1.5)$$

$\Gamma_{\mu\nu}^\tau$ sont les symbole de Christoffel et si g est un tenseur métrique alors

$$\Gamma_{\mu\nu}^\tau = \frac{1}{2} g^{\tau\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}),$$

le tenseur de Ricci R vérifie

$$R = R_{\mu\nu} d^\mu \otimes d^\nu, \\ R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda.$$

Quelles conditions sur la section de Dirac γ pour que le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ défini par

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$$

vérifie l'équation tensorielle

$$H_1^{2,0}(g) = R - \kappa T. \quad (1.6)$$

Peut-on choisir cette section de Dirac γ telle que

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu) \mathbf{I}_4? \quad (1.7)$$

Pour répondre à cette question, on développe dans ce qui suit l'équation de Dirac de rang 1 dans le fibré $\xi_{\mathbf{W}}^{2,0}$.

2. L'ÉQUATION DE DIRAC DE RANG 1 SUR $\xi_{\mathbf{W}}^{2,0}$

Pour le calcul tensoriel on peut consulter [8], [1]. On se fixe une section de Dirac γ métrisable sur $\xi_{\mathbf{W}}$, on a

$$\nabla^{2,0}(d^\mu \otimes d^\nu) = \nabla^*(d^\mu) \otimes d^\nu + d^\mu \otimes \nabla^*(d^\nu),$$

la connexion duale est définie par

$$\mathcal{L}_{\partial_\tau}(d^\mu \otimes \partial_\sigma) = d^\mu \otimes \nabla_{\partial_\tau} \partial_\sigma + \nabla_{\partial_\tau}^* d^\mu \otimes \partial_\sigma, \\ d^\mu \otimes \partial_\sigma(w) = d^\mu(w) (\partial_\sigma(w)) = \delta_\sigma^\mu, \forall w \in W \subset \mathbf{W}$$

et de 1.5, on a

$$0 = \Gamma_{\tau\sigma}^\rho \delta_\rho^\mu + \nabla_{\partial_\tau}^* d^\mu \otimes \partial_\sigma \text{ et } \nabla_{\partial_\tau}^* d^\mu \otimes \partial_\sigma = -\Gamma_{\tau\sigma}^\mu \\ \nabla_{\partial_\tau}^* d^\mu = -\Gamma_{\tau\sigma}^\mu d^\sigma, \nabla^* d^\mu = -\Gamma_{\tau\sigma}^\mu d^\sigma \otimes d^\tau$$

la connexion $\nabla^{2,0}$ s'écrit

$$\nabla_{\partial_\tau}^{2,0}(d^\mu \otimes d^\nu) = -\Gamma_{\tau\sigma}^\mu d^\sigma \otimes d^\nu - \Gamma_{\tau\sigma}^\nu d^\mu \otimes d^\sigma \\ = -(\Gamma_{\tau\alpha}^\mu + \Gamma_{\tau\beta}^\nu) d^\alpha \otimes d^\beta \\ = \Gamma_{\tau\alpha\beta}^{\mu\nu} d^\alpha \otimes d^\beta$$

en conclusion, on obtient pour équation

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} = -(\Gamma_{\beta\alpha}^\mu + \Gamma_{\gamma\beta}^\nu),$$

on en déduit le calcul de la connexion de Koszul $\nabla^{2,0}$ induite par la connexion de Levi-Civita ∇ définie par la section de Dirac γ ,

$$\nabla^{2,0}(d^\mu \otimes d^\nu) = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} d^\alpha \otimes d^\beta \otimes d^\gamma, \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} = -(\Gamma_{\beta\alpha}^\mu + \Gamma_{\gamma\beta}^\nu).$$

On calcule $\gamma^{2,0}$,

$$\gamma^{2,0} = \gamma^* \otimes \gamma^*$$

et

$$\begin{aligned} (\gamma^*)^\mu (d^\nu) &= (\gamma^*)_{\tau}^{\mu\nu} d^\tau, \\ (\gamma^*)^\mu (d^\nu) (\partial_\rho) &= (\gamma^*)_{\rho}^{\mu\nu} = d^\nu (\gamma^\mu (\partial_\rho)) \\ &= d^\nu (\gamma_{\rho}^{\mu\alpha} \partial_\alpha) = \gamma_{\rho}^{\mu\nu} \text{ et} \\ (\gamma^*)_{\rho}^{\mu\nu} &= \gamma_{\rho}^{\mu\nu}, \\ (\gamma^{2,0})^\mu &= (\gamma^*)^\mu \otimes (\gamma^*)^\mu \\ (\gamma^{2,0})^\mu (d^\nu \otimes d^\tau) &= \gamma_{\alpha\beta}^{\mu\nu\tau} d^\alpha \otimes d^\beta \\ &= (\gamma^*)^\mu (d^\nu) \otimes (\gamma^*)^\mu (d^\tau) \\ &= \gamma_{\alpha}^{\mu\nu} \gamma_{\beta}^{\mu\tau} d^\alpha \otimes d^\beta \text{ et} \\ \gamma_{\alpha\beta}^{\mu\nu\tau} &= \gamma_{\alpha}^{\mu\nu} \gamma_{\beta}^{\mu\tau}, \end{aligned}$$

on peut calculer $H_1^{2,0} (d^\nu \otimes d^\mu)$ dans la base de sections locales sur W donnée par $\{d^\alpha \otimes d^\beta\}$,

$$\begin{aligned} H_1^{2,0} (d^\nu \otimes d^\mu) &= \gamma^{2,0} (\nabla^{2,0} (d^\mu \otimes d^\nu)) \\ &= \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} (\gamma^{2,0})^\alpha (d^\beta \otimes d^\gamma) \\ &= \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} \gamma_{ab}^{\alpha\beta\gamma} d^a \otimes d^b \end{aligned}$$

on en déduit que si $g = g_{\mu\nu} d^\nu \otimes d^\mu$ alors en utilisant le défaut de $C^\infty(W)$ -linéarité on a

$$H_1^{2,0} (g) = \gamma_{\mu\nu}^{2,0} (d^\nu \otimes d^\mu) + g_{\mu\nu} H_1^{2,0} (d^\nu \otimes d^\mu), \quad \gamma_{\mu\nu}^{2,0} = (\gamma^{2,0})^{dg_{\mu\nu}}$$

si on pose $dg_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,r} d^r$ alors

$$\begin{aligned} (\gamma^{2,0})^{dg_{\mu\nu}} (d^\nu \otimes d^\mu) &= g_{\mu\nu,r} (\gamma^{2,0})^r (d^\nu \otimes d^\mu) \\ &= g_{\mu\nu,r} \gamma_{\alpha\beta}^{r\nu\mu} d^\alpha \otimes d^\beta, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H_1^{2,0} (g) &= g_{\mu\nu,r} \gamma_{\alpha\beta}^{r\nu\mu} d^\alpha \otimes d^\beta + g_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} \gamma_{ab}^{\alpha\beta\gamma} d^a \otimes d^b \\ &= g_{\mu\nu,r} \gamma_{ab}^{r\nu\mu} d^a \otimes d^b + g_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} \gamma_{ab}^{\alpha\beta\gamma} d^a \otimes d^b \\ &= \left(g_{\mu\nu,r} \gamma_{ab}^{r\nu\mu} + g_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} \gamma_{ab}^{\alpha\beta\gamma} \right) d^a \otimes d^b. \end{aligned}$$

Remark 2. $g_{\mu\nu,r}$ est la dérivée de Lie de $g_{\mu\nu}$ le long du champ ∂_r .

Theorem 2. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une section γ de Dirac sur le fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}}$, pour laquelle l'équation 1.6 est vérifiée, sont données par les équations

$$R_{ab} - \kappa T_{ab} = g_{\mu\nu,r} \gamma_{ab}^{r\nu\mu} + g_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} \gamma_{ab}^{\alpha\beta\gamma},$$

où

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} = - \left(\Gamma_{\beta\alpha}^\mu + \Gamma_{\gamma\beta}^\nu \right) \text{ et } \gamma_{\alpha\beta}^{\mu\nu\tau} = \gamma_{\alpha}^{\mu\nu} \gamma_{\beta}^{\mu\tau},$$

$g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique défini par $g^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \text{Trace} (\gamma^\nu \gamma^\mu)$, $\Gamma_{\beta\alpha}^\mu$ sont les symboles de Christoffel associés à cette métrique et $(\gamma_{\alpha}^{\mu\nu})$ est la matrice γ^μ dans le local frame.

Corollary 1. *Sous les hypothèses du théorème précédent, l'équation relativiste d'Einstein est une équation de Dirac de rang 1 pour la fonction propre et l'opérateur $H_1^{2,0}$,*

$$\lambda = \frac{1}{2}R - \Lambda$$

où R est la courbure scalaire et Λ la constante universelle.

3. LES PRINCIPES D'UNIFICATION

Les principes d'unification proposés sont basés sur l'existence d'une section de Dirac métrisable sur le fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}}$, munie de la connexion de Levi-Civita, permettant de décrire les équations relativistes de Dirac et d'Einstein à l'aide des opérateurs de Dirac de rang $n \geq 1$ ou de leurs extensions aux fibrés tensoriels. Le premier principe d'unification peut s'énoncer ainsi, si une section de Dirac γ vérifie

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu) \mathbf{I}_4,$$

$$R_{ab} - \kappa T_{ab} = g_{\mu\nu, r} \gamma_{ab}^{r\nu\mu} + g_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} \gamma_{ab}^{\alpha\beta\gamma} \quad (3.1)$$

avec les conditions

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} = - \left(\Gamma_{\beta\alpha}^\mu + \Gamma_{\gamma\beta}^\nu \right) \text{ et } \gamma_{\alpha\beta}^{\mu\nu\tau} = \gamma_\alpha^{\mu\nu} \gamma_\beta^{\mu\tau}, \quad (3.2)$$

on peut unifier les équations de Dirac et d'Einstein en posant pour l'équation relativiste de Dirac sur les champs complexes

$$\overline{H}_1(Z) = \rho Z$$

où $Z \in \Gamma_W(\xi_{\mathbf{W}} \otimes \mathbb{C})$ et

$$\overline{H}_1(Z) = H_1(X) + iH_1(Y), \quad Z = X + iY$$

avec $H_1 = H_1^{0,1}$ est l'opérateur de Dirac de rang 1 et $\rho \in C^\infty(W, \mathbb{C})$ est une fonction propre de l'opérateur \overline{H}_1 . L'équation relativiste d'Einstein s'écrit comme une équation de Dirac de rang 1 associée à l'opérateur $H_1^{2,0}$ de fonction propre

$$\lambda = \frac{1}{2}R - \Lambda, \quad H_1^{2,0}(g) = \lambda g.$$

Remark 3. *On définit le champ $\partial_{ab}^{\nu\mu} = \gamma_{ab}^{r\nu\mu} \partial_r$ alors d'après 3.1, $g_{\mu\nu}$ est une solution g de l'équation différentielle*

$$\mathcal{L}_{\partial_{ab}^{\nu\mu}} g + g \Gamma_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu} \gamma_{ab}^{\alpha\beta\gamma} = R_{ab} - \kappa T_{ab},$$

pour des coefficients vérifiant 3.2. De façon plus générale, g est solution d'une équation de la forme

$$\mathcal{L}_X g = \psi g + \varphi$$

pour un choix convenable du champ local X et des C^∞ -applications ψ et φ définies sur W .

Le second principe d'unification a été développé dans [6] et [7]. On rappelle que l'opérateur de Dirac de rang 2, $H_2 = \gamma_2 \otimes R^\nabla$ fait apparaître la courbure de la connexion de Levi-Civita. Sur un ouvert de trivialisatoin W du fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}}$

de \mathbf{W} et un fibré ζ de dimension finie, si $s = s^\alpha e_\alpha$, où $\{e_\alpha\}$ est une base de sections locales de $\Gamma_W(\zeta)$, alors

$$H_2(s^\alpha e_\alpha) = \frac{1}{2}(\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) R_{\mu\nu\tau}^j s^\tau e_k,$$

$$R_{\nu\mu\sigma}^\tau e_\tau = (\nabla_{\partial_\nu} \nabla_{\partial_\mu} - \nabla_{\partial_\mu} \nabla_{\partial_\nu}) e_\sigma,$$

on en déduit le théorème suivant.

Theorem 3. *Si on pose*

$$R_{\mu\nu\alpha}^j = [\nabla_\nu, \nabla_\mu]_\alpha^j,$$

la matrice de l'opérateur H_2 s'écrit dans la base canonique

$$\mathcal{M}_{H_2} = [\gamma^\nu, \gamma^\mu] \nabla_\nu \nabla_\mu = \frac{1}{2} \gamma^\nu \gamma^\mu [\nabla_\nu, \nabla_\mu]$$

et l'équation de Dirac de rang 2 est de la forme

$$\frac{1}{2}(\gamma_j^{\nu\sigma} \gamma_\sigma^{\mu k} - \gamma_j^{\mu\sigma} \gamma_\sigma^{\nu k}) R_{\mu\nu\tau}^j s^\tau = \lambda s^k, \forall k.$$

Sous l'hypothèse $\zeta = \xi_{\mathbf{W}}$, la matrice \mathcal{M}_{H_2} définit un tenseur h_ν^μ , par abaissement de l'indice on obtient un $(2,0)$ -tenseur $h_{\mu\nu}$. Le second principe d'unification donne les conditions sur la section de Dirac γ pour que $h_{\mu\nu}$ ou son symétrisé s'identifie au tenseur de Ricci ou au tenseur d'Einstein. Le résultat est développé dans [7], on a des conditions sur les commutateurs des endomorphismes de Dirac, si

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{H}^{\nu\mu}, (\mathcal{H}^{\nu\mu})_j^\sigma = g^{\sigma\mu} \delta_j^\nu - g^{\sigma\nu} \delta_j^\mu$$

alors

$$h_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$$

et si le tenseur de Ricci est inversible, alors pour

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda), (\mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda))_j^\sigma = (g^{\sigma\mu} + \lambda \varepsilon^{\sigma\mu}) \delta_j^\nu - (g^{\sigma\nu} + \lambda \varepsilon^{\sigma\nu}) \delta_j^\mu, \quad (3.3)$$

$$h_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}$$

est un tenseur d'Einstein. En particulier, on en déduit le théorème qui suit.

Theorem 4. *si $\lambda = -\frac{1}{2}R + \Lambda$, l'équation relativiste d'Einstein s'écrit en terme d'opérateur*

$$H_2 = \kappa T, \quad (3.4)$$

où T est l'opérateur énergie-impulsion dont la matrice dans le local frame est définie par

$$\mathcal{M}_T = (T_\nu^\mu), T_\nu^\mu = g^{\mu\tau} T_{\tau\nu}.$$

4. L'ÉQUATION DE DIRAC DE RANG n SUR LES FIBRÉS VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Soit $\zeta = (E(\zeta), \pi, \mathbf{W}, F)$ un fibré vectoriel de dimension finie, de base une variété lisse de dimension $\dim \mathbf{W} \geq 4$. On note

$$\Lambda^n \mathbf{W} = \wedge^n T^* \mathbf{W},$$

le fibré des n -formes différentielles sur \mathbf{W} . Les sections d'endomorphismes de Dirac sont définies par

$$\gamma^d(s) = \gamma(d \otimes s), d \in \Lambda^1 \mathbf{W} \text{ et } s \in \Gamma(\zeta).$$

Le commutateur d'une famille finie d'endomorphismes de Dirac $\{\gamma^{d^\mu}\}$ est

$$\left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}\right] = \sum_{\tau \in \text{Perm}\{1,2,\dots,n\}} \varepsilon(\tau) \gamma^{d^{\tau(1)}} \circ \gamma^{d^{\tau(2)}} \circ \dots \circ \gamma^{d^{\tau(n-1)}} \circ \gamma^{d^{\tau(n)}},$$

les extensions de rang n d'une section γ sont les éléments γ_n de $\text{Hom}(\Lambda^n \mathbf{W} \otimes \zeta, \zeta)$ définis par

$$\gamma_n((d^1 \wedge d^2 \wedge \dots \wedge d^n) \otimes s) = \left[\gamma^{d^1}, \gamma^{d^2}, \dots, \gamma^{d^n}\right](s), \quad s \in \Gamma(\zeta)$$

et on prolonge γ_n par \mathbb{R} -linéarité sur $\Lambda^n(\mathbf{W}) \otimes E$. Toute connexion sur ∇ a une extension [3]

$$d_n^\nabla : \Gamma(\Lambda^n(\mathbf{W}) \otimes \zeta) \rightarrow \Gamma(\Lambda^{n+1}(\mathbf{W}) \otimes \zeta)$$

avec,

$$d_0^\nabla = \nabla, \Lambda^0(\mathbf{W}) \otimes \zeta = \zeta$$

et

$$d_n^\nabla(\psi \otimes s) = d\psi \otimes s + (-1)^n \psi \wedge \nabla s, \quad \psi \in \Lambda^n(\mathbf{W}), \nabla s \in \Gamma(\zeta).$$

Remark 4. *On rappelle que si*

$$\psi = \lambda_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n} d^{\nu_1} \wedge d^{\nu_2} \wedge \dots \wedge d^{\nu_n}$$

alors

$$d\psi = d\lambda_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n} \wedge d^{\nu_1} \wedge d^{\nu_2} \wedge \dots \wedge d^{\nu_n},$$

et

$$\psi \wedge \nabla s = (\rho_\tau^\sigma \psi \wedge d^\tau) \otimes s_\sigma$$

pour

$$s = \rho_\tau^\sigma d^\tau \otimes s_\sigma.$$

L'opérateur de Dirac de rang n , associé à la connexion ∇ et à la section de Dirac γ , est l'endomorphisme de $\Gamma(\zeta)$

$$H_n = \gamma_n \otimes \nabla_{n-1} \text{ avec } \nabla_{n-1} = d_{n-1}^\nabla \circ \dots \circ d_0^\nabla,$$

et $H_n(s) = \gamma_n(\nabla_{n-1}s)$, $\forall s \in \Gamma(\zeta)$. Une équation d'état de rang n associée à la l'opérateur de Dirac H_n est une équation locale de la forme

$$H_n(s) = \lambda s,$$

où λ est une C^∞ -application définie sur une carte W de \mathbf{W} et $s \in \Gamma_W(\zeta)$. On pose

$$d_n^{\nabla^{p,q}} : \Gamma(\Lambda^n(\mathbf{W}) \otimes \zeta^{p,q}) \rightarrow \Gamma(\Lambda^{n+1}(\mathbf{W}) \otimes \zeta^{p,q})$$

où $\nabla^{p,q}$ est l'extension de la connexion de Koszul ∇ au fibré $\zeta^{p,q}$ et on note

$$\nabla_{n-1}^{p,q} = d_{n-1}^{\nabla^{p,q}} \circ \dots \circ d_0^{\nabla^{p,q}}.$$

Les extensions de γ aux fibrés se font de la même façon que dans les équations 1.3 et 1.4 en remplaçant γ par γ_n . On définit les extensions $\gamma_n^{p,q}$ et

$$H_n^{p,q} = \gamma_n^{p,q} \otimes \nabla_{n-1}^{p,q},$$

si $\zeta = \xi_{\mathbf{W}}$ est le fibré tangent de \mathbf{W} , on définit l'équation de Dirac de rang n sur le fibré $\xi_{\mathbf{W}}^{2,0}$ donné par

$$H_n^{2,0}(g) = \left(\frac{1}{2}R - \Lambda\right)g \quad (4.1)$$

où g est un tenseur métrique de courbure scalaire R . On généralise le problème de l'unification au rang $n \geq 2$, en donnant les conditions nécessaires et suffisantes sur γ pour que le tenseur métrique

$$g^{\mu\nu} d^\mu \otimes d^\nu, g^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$$

soit solution de 4.1? Si $n = 1$ alors le tenseur $g^{\mu\nu}$ doit vérifier 3.1 et 3.2.

5. CONCLUSION

Pour unifier les équations relativistes de Dirac et d'Einstein, on construit une section de Dirac γ sur le fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}}$, dont la métrique associée permet de définir la connexion de Levi-Civita et les opérateurs de Dirac de rang $n \geq 1$, notés H_n . Ces opérateurs admettent des extensions aux fibrés tensoriels $\xi_{\mathbf{W}}^{p,q}$, notés $H_n^{p,q}$. Le n -principe d'unification consiste à déterminer un tenseur

$$g = g_{\mu\nu} d^\mu \otimes d^\nu \in \Gamma(\xi_{\mathbf{W}}^{2,0})$$

pour lequel

$$H_n^{2,0}(g) = \lambda g, \lambda = \frac{1}{2}R - \Lambda.$$

Dans le cas $n = 1$, la section de Dirac γ doit vérifier les équations 3.1 et 3.2. Le second procédé d'unification consiste à remarquer que $H_2 = H_2^{0,1}$ s'écrit sous la forme

$$H_2 = \gamma_2 \otimes R^\nabla,$$

si la section de Dirac γ vérifie les conditions 3.3, avec $\lambda = -\frac{1}{2}R + \Lambda$ et un tenseur de Ricci inversible, alors l'équation relativiste d'Einstein s'écrit en termes d'opérateur par 3.4. L'unification est complète si les sections de Dirac décrites précédemment vérifient la condition de Dirac donnée par l'équation 1.7. On peut définir à l'aide des sections de Dirac vérifiant 1.7, l'équation relativiste de Dirac qui se ramène à l'équation relativiste de Dirac classique si l'univers est parallélisable. L'existence d'une section de Dirac, vérifiant 1.7 et les équations 3.3 dans le second principe d'unification ou des équations 3.1 et 3.2 dans le premier principe d'unification, reste un problème ouvert...

REFERENCES

- [1] Appel, W. "Mathématiques pour la physique et les physiciens".2005. H & K Editions.
- [2] Arai A. "A class of Dirac-Type Operators on the Abstract Boson-Fermion Fock Space and Their Strong Anticommutativity", (1999).
- [3] Kobayashi S. and Nomizu K., "Foundations of Differential Geometry", vol. 1 & 2, Wiley-Interscience, (1996)
- [4] Jonot J.L., "Géométrie et quantification de l'univers de Dirac-Einstein". 2016. <hal-01294150v5>
- [5] Jonot J.L., "Sur les opérateurs de Dirac de rang supérieur et l'équation relativiste d'Einstein" 2016. <hal-01330724v3>
- [6] Jonot J.L., "Opérateurs de Dirac". 2016. <hal-01325248v2>
- [7] Jonot J.L., "Unification par section de Dirac". 2017. <hal-01478188>
- [8] Lichnerowicz A., "Eléments de calcul tensoriel", Jacques Gabay, 1987.
- [9] Reed M. and Simon B. "Methods of Modern Mathematical Physics Vol.I: Functional Analysis", Academy Press, New York, (1975)

E-mail address: jean-louis.jonot@ac-versailles ou j.jonot@gmail.com