



HAL
open science

SINGULARITÉS DANS LES MULTIVERS

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

| Jean Louis Jonot. SINGULARITÉS DANS LES MULTIVERS. 2017. hal-01552459

HAL Id: hal-01552459

<https://hal.science/hal-01552459>

Preprint submitted on 3 Jul 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

SINGULARITÉS DANS LES MULTIVERS

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. La représentation standard de l'univers est la donnée d'une variété lisse, de dimension 4, munie d'une section de Dirac métrisable. La représentation, que l'on propose, consiste à définir l'univers comme une sous-variété de dimension 4, d'une variété de grande dimension appelée multivers. Le multivers est muni d'une section de Dirac non métrisable. Si ce multivers est à structure, les sous-espaces où la métrique n'existe pas, sont des sous-variétés de signature donnée. Ensuite, on étudie les multivers métrisables et la géométrie des univers modélés sur une variété de dimension 4 qui lui sont associés, en introduisant la notion de S-connexion. Dans cette situation, on a une infinité d'univers qui forment un feuilletage du multivers.

Dans ces deux présentations géométriques, on construit les équations de Dirac à partir de la section de Dirac métrisable et on compare les équations obtenues.

La dernière géométrisation est donnée par une représentation des univers comme des sous-variétés immergées dans le multivers. Cette interprétation généralise la notion de plongement d'un univers dans un multivers.

1. LES MULTIVERS DE DIMENSION FINIE STRUCTURÉS

Un multivers en dimension finie est la donnée d'une variété \mathbf{V} , de dimension $n > 4$, munie d'une section de Dirac γ non nécessairement métrisable. Soit V une carte de \mathbf{V} , on note $\{\gamma^\mu : \mu = 0, 1, \dots, m-1\}$ les endomorphismes de Dirac définis par

$$\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}, d^\mu \in \Gamma(V, T^*V) \text{ avec } d^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu,$$

le tenseur de Poisson est défini par

$$\gamma^{\nu\mu} = \text{Trace}(\gamma^\nu \gamma^\mu),$$

et la section locale des matrices associées est notée $\mathbf{M} = (\gamma^{\nu\mu})$. Pour tout $v \in V$, $\mathbf{M}(v) = (\gamma^{\nu\mu}(v))$ est une section de matrices symétriques réelles sur V , il existe une section locale de matrices diagonalisables sur V

$$\mathbf{D}(v) = \text{diag}(\varphi_0(v), \varphi_1(v), \dots, \varphi_{m-1}(v))$$

et une section locale de matrices inversible $\mathbf{P}(v)$ telles que

$$\mathbf{M}(v) = \mathbf{P}^*(v) \mathbf{D}(v) \mathbf{P}(v)$$

où $\mathbf{P}^*(v)$ est la transposée de $\mathbf{P}(v)$. On suppose que 0 est une valeur régulière de φ_j pour tout $j = 0, 1, \dots, m-1$ et que les sous-variétés de V définies par $\varphi_j^{-1}(0)$ sont transversales deux à deux

$$\varphi_j^{-1}(0) \pitchfork \varphi_i^{-1}(0), \forall i \neq j.$$

Date: 02/07/2017.

1991 Mathematics Subject Classification. 35P10,53C05,53C21,53C29,53C50,53C80,53C40,57R42.

Key words and phrases. S-connexion, section de Dirac métrisable, multivers structuré, opérateur de Dirac, transversalité, immersion, difféomorphisme.

Sur chaque composante connexe de

$$V \setminus \cup_i \varphi_i^{-1}(0)$$

il existe une métrique de signature (m_-, m_+) avec $m = m_- + m_+$ définie, dans le local frame, par la matrice $\frac{1}{m} \mathbf{M}^{-1}$. On note

$$V_{I,J} = \{v \in V : \varphi_k(v) < 0, \forall k \in I, \varphi_k(v) > 0, \forall k \in J \text{ et } \varphi_k(v) = 0, \forall k \notin I \cup J\},$$

les composantes connexes de $V_{I,J}$ sont des sous-variétés ouvertes de

$$V_K = \{v \in V : \varphi_k(v) = 0, \forall k \in K\}, \quad K = \{0, 1, \dots, m-1\} \setminus I \cup J$$

de dimension égale à $\text{card } I + \text{card } J$, munies d'une métrique dont la signature est $(\text{card } I, \text{card } J)$, V_K est une sous-variété de V de dimension $\text{card } I + \text{card } J$, par le théorème de transversalité de Monsieur Thom [4], [5] et [3]. Les cartes, vérifiant les propriétés précédentes, sont dites transversalement régulières.

Definition 1. *Une section de Dirac γ , pour laquelle il existe en tout événement une carte transversalement régulière, est une section de Dirac à structure.*

Si le multivers \mathbf{V} est muni d'une section de Dirac à structure, on dit que \mathbf{V} est un multivers structuré. Les sous-variétés connexes \mathcal{V} d'un multivers structuré \mathbf{V} de dimension $n < m$, pour lesquelles en chaque événement de \mathcal{V} il existe une carte V de \mathbf{V} transversalement régulière telle que

$$\mathcal{V} \cap V \subset V_{I,J}, \quad n = \text{card } I + \text{card } J,$$

sont les singularités de signature $(\text{card } I, \text{card } J)$ du multivers \mathbf{V} . Si on prend deux cartes V_1 et V_2 de \mathbf{V} de l'événement v , les matrices $(\gamma_j^{\nu\mu})$ dans le local frame de la carte V_j associées à la section de Dirac γ sont congruentes. La signature de la singularité ne dépend pas du choix de la carte.

2. GÉOMÉTRIE DES SINGULARITÉS

On se place dans une composante connexe \mathbf{V} d'un multivers où la section de Dirac est métrisable. Soit $\zeta = (\mathbf{V}, \pi, \mathbf{W}, \mathbf{F})$ un fibré de fibre \mathbf{F} qui est une C^∞ -variété, de groupe structural $\text{Diff}^\infty(\mathbf{F})$. Une singularité \mathbf{S} de ζ est l'image d'une immersion de \mathbf{W} dans \mathbf{V} . Une ζ -connexion est une application

$$\phi : \mathbf{V} \rightarrow C^\infty(\mathbf{W}, \mathbf{V}),$$

où $C^\infty(\mathbf{W}, \mathbf{V})$ est l'ensemble des C^∞ -applications de \mathbf{W} dans \mathbf{V} , qui vérifie

$$\tau : v \rightarrow \tau(v) = T_{\pi(v)}\phi(v) (T_{\pi(v)}(\mathbf{W})) \quad (2.1)$$

est une connexion généralisée du fibré ζ . On note $\xi_{\mathbf{W}}$ et $\xi_{\mathbf{V}}$ les fibrés tangents sur \mathbf{W} et \mathbf{V} .

Proposition 1. *Si ϕ est une ζ -connexion alors $\phi(v)$ est une immersion dans un voisinage de v , $\forall v \in \mathbf{V}$, et pour tout champ local X sur une carte de trivialisatation W de ζ et du fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}}$,*

$$v \rightarrow T_{\pi(v)}\phi(v) (X_{\pi(v)}) \quad (2.2)$$

est un champ local du fibré tangent $\xi_{\mathbf{V}}$ sur chaque composante connexe de $\pi^{-1}(W)$. L'application ϕ vérifie la condition de localisation

$$\phi(v) (\pi(v)) = v, \quad \forall v \in \mathbf{V}. \quad (2.3)$$

Proof. La preuve est une conséquence directe de la notion de connexion généralisée. \square

Definition 2. Une ζ -connexion plate est une ζ -connexion pour laquelle la connexion associée est plate.

Une S-connexion ϕ est une C^∞ -application ϕ de \mathbf{V} à valeurs dans l'ensemble des sections $\Gamma(\zeta)$,

$$\phi : \mathbf{V} \rightarrow \Gamma(\zeta), \phi(v) \in \Gamma(\zeta)$$

pour tout $v \in \mathbf{V}$, qui vérifie la condition de localisation 2.3.

Lemma 1. Une ζ -connexion qui vérifie pour tout $v \in \mathbf{V}$, il existe un voisinage ouvert W de $\pi(v)$ pour lequel $\phi_W(v) = \phi(v)|_W$ est un difféomorphisme de W sur $\phi(v)(W)$, est une ζ -connexion plate.

Proof. Pour chaque $v \in \mathbf{V}$, il existe un voisinage ouvert W de $\pi(v)$ pour lequel $\phi_W(v) = \phi(v)|_W$ est un difféomorphisme de W sur son image $\phi(v)(W) \subset \mathbf{V}$. Par functorialité, pour X_1 et X_2 deux champs locaux dans le voisinage W , on a

$$[T\phi(v)(X_1), T\phi(v)(X_2)] = T\phi(v)([X_1, X_2]),$$

en particulier,

$$[T_{\pi(v)}\phi(v)(X_1(\pi(v))), T_{\pi(v)}\phi(v)(X_2(\pi(v)))] \in \tau(v). \quad (2.4)$$

On se fixe une famille de champs locaux linéairement indépendants $\{Y_j\}$, définis dans un voisinage ouvert V tel que $\pi(V) \subset W$ vérifiant

$$\tau(v) = \text{Vect}\{Y_j(v)\}, \forall v \in V$$

alors il existe $\{\mathbf{X}_j(v)\} \subset T_{\pi(v)}\mathbf{W}$ tels que

$$Y_j(v) = T_{\pi(v)}\phi(v)(\mathbf{X}_j(v)), \forall j.$$

Soit $\{X_j\}$ une famille de champs locaux définis sur W pour lesquels

$$X_j(w) = \mathbf{X}_j(v)$$

pour $w = \pi(v)$, $\forall j$. On a par 2.4

$$[Y_i(v), Y_j(v)] \in \tau(v), \forall i, \forall j$$

et cela pour tout $v \in V$, le théorème de Frobenius permet d'affirmer que la connexion τ est plate. \square

Lemma 2. Si ϕ est une S-connexion alors pour tout $v \in \mathbf{V}$, $\phi(v)(\mathbf{W})$ est une sous-variété de \mathbf{V} et

$$\phi(v) : \mathbf{W} \rightarrow \phi(v)(\mathbf{W})$$

est un difféomorphisme. Les singularités associées à ϕ sont des sous-variétés de \mathbf{V} difféomorphes à \mathbf{W} .

Proof. On a

$$\pi \circ \phi(v) = \mathbf{1}_{\mathbf{W}},$$

$\phi(v)$ est une bijection de \mathbf{W} sur $\phi(v)(\mathbf{W})$, d'application réciproque

$$\phi(v)^{-1} = \pi|_{\phi(v)(\mathbf{W})},$$

donc $\phi(v)$ est un homéomorphisme de \mathbf{W} sur $\phi(v)(\mathbf{W})$. Pour tout $w \in \mathbf{W}$

$$\begin{aligned} T_w(\pi \circ \phi(v)) &= T_{\phi(v)(w)}\pi \circ T_w\phi(v) \\ &= T_{\phi(v)(w)}\pi \circ T_w\phi(v) = \mathbf{1}_{T_w(\mathbf{W})}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$T_w\phi(v)$ est un monomorphisme d'espaces vectoriels, $\phi(v)$ est une immersion et $\phi(v)(\mathbf{W})$ est une sous-variété de \mathbf{V} . On en déduit que $\phi(v)$ est un difféomorphisme de \mathbf{W} sur son image $\phi(v)(\mathbf{W})$. \square

Theorem 1. *Une S-connexion ϕ est une ζ -connexion plate.*

Proof. Une S-connexion ϕ est une ζ -connexion car l'équation 2.5 appliquée à $w = \pi(v)$ implique

$$T_{\phi(v)(\pi(v))}\pi \circ T_{\pi(v)}\phi(v) = T_v\pi \circ T_{\pi(v)}\phi(v) = \mathbf{1}_{T_{\pi(v)}(\mathbf{W})}$$

et $T_v\pi|_{T_{\pi(v)}} est un difféomorphisme de $\tau(v) = T_{\pi(v)}\phi(v)(T_{\pi(v)}(\mathbf{W}))$ sur $T_{\pi(v)}(\mathbf{W})$. Les lemmes précédents permettent d'affirmer que la connexion est plate. $\square$$

Remark 1. *Une connexion généralisée plate τ est localement intégrable et définit un feuilletage de même dimension que la base.*

On peut généraliser la notion de ζ -connexion en définissant le fibré $\mathcal{M}(\zeta)$ qui est un fibré d'espace total

$$E_{\mathcal{M}} = \cup_{v \in \mathbf{V}} \text{Mor}(T_{\pi(v)}\mathbf{W}, T_v\mathbf{V})$$

et de base \mathbf{V} que l'on peut encore définir par

$$\mathcal{M}(\zeta) = \text{Mor}(\pi^*(\xi_{\mathbf{W}}), \xi_{\mathbf{V}})$$

$\xi_{\mathbf{W}}$ et $\xi_{\mathbf{V}}$ sont les fibrés tangents de \mathbf{W} et \mathbf{V} , $\pi^*(\xi_{\mathbf{W}})$ est le fibré induit par π du fibré $\xi_{\mathbf{W}}$. Le sous-fibré $\mathcal{I}(\zeta)$ de $\mathcal{M}(\zeta)$ a pour espace total

$$E_{\mathcal{I}} = \cup_{v \in \mathbf{V}} \text{Mono}(T_{\pi(v)}\mathbf{W}, T_v\mathbf{V}),$$

où $\text{Mono}(T_{\pi(v)}\mathbf{W}, T_v\mathbf{V})$ est l'ensemble des applications linéaires injectives de $T_{\pi(v)}\mathbf{W}$ dans $T_v\mathbf{V}$. Une section $L \in \Gamma(\mathcal{I}(\zeta))$ est une ζ -connexion si $T_v\pi$ resteint à

$$\tau(v) = L_v(T_{\pi(v)}\mathbf{W})$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\tau(v)$ sur $T_{\pi(v)}\mathbf{W}$.

Lemma 3. *Soit ϕ une S-connexion, il y a équivalence entre $\phi(u) = \phi(v)$ et $\phi(u)(\mathbf{W}) = \phi(v)(\mathbf{W})$ pour tout $u, v \in \mathbf{V}$. En particulier, les éléments de $\phi^{-1}(\phi(v))$ définissent la même singularité $\phi(v)(\mathbf{W})$ et $\phi^{-1}(\phi(v)) \subset \phi(v)(\mathbf{W})$.*

Definition 3. *Une ζ -connexion ϕ est régulière si $\phi^{-1}(\phi(v))$ est une sous-variété de \mathbf{V} , pour tout $v \in \mathbf{V}$.*

Une ζ -connexion ϕ est stable si $\phi^{-1}(\phi(v)) = \phi(v)(\mathbf{W})$ pour tout $v \in \mathbf{V}$.

Remark 2. *Les S-connexions stables sont régulières.*

Notation 1. *On note \mathbf{C}_v la composante connexe de $\phi^{-1}(\phi(v))$ contenant v .*

Remark 3. *La notion de C^∞ -application peut être définie de deux façons. Pour la première définition on impose que*

$$v \rightarrow T_{\pi(v)}\phi(v)$$

est une section de $\mathcal{I}(\zeta)$ et la deuxième définition est donnée par 2.2.

Sur un ouvert de trivialisatation W du fibré ζ , la connexion permet de cartographier le multivers par un système de coordonnées $(x_0, \dots, x_3, y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ où (x_0, \dots, x_3) est un système de coordonnées de \mathbf{W} et $(y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ est un système de coordonnées de la fibre \mathbf{F} , (x_0, \dots, x_3) sont les coordonnées horizontales et $(y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ sont les coordonnées verticales. Le local frame associé à la carte \mathbf{V} , noté $\{\partial_0, \dots, \partial_3, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{m-1}\}$, de local frame dual

$$\{d^0, \dots, d^3, \mathbf{d}^0, \mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^{m-1}\},$$

permet d'écrire toute forme différentielle locale sous la forme

$$j = \alpha_j d^j + \beta_k \mathbf{d}^k,$$

et $\tau(v)$ est l'ntersection des noyaux de m formes différentielles

$$j^l = \alpha_j^l d^j + \beta_k^l \mathbf{d}^k$$

où (β_k^l) est une matrice inversible qui est une condition de transversalité aux fibres. Il existe pour tout chemin

$$c : [0, 1] \rightarrow \mathbf{W} \text{ et } v \in \pi^{-1}(c(0))$$

un unique chemin

$$C : [0, 1] \rightarrow \mathbf{V},$$

tel que

$$C(0) = v, \pi \circ C = c \text{ et } \frac{d}{dt}C(t) \in \tau(C(t)). \quad (2.6)$$

Lemma 4. *Si τ est une connexion généralisée du fibré ζ , tout chemin $c : [0, 1] \rightarrow \mathbf{W}$ et $v \in \pi^{-1}(c(0))$ a un relèvement unique C vérifiant les conditions 2.6.*

Proof. On se fixe une carte de trivialisatation dans laquelle

$$x_j = c_j(t),$$

on a dans cette carte

$$j^l \left(\frac{d}{dt}C \right) = \alpha_j^l d^j \left(\frac{d}{dt}c \right) + \beta_k^l \mathbf{d}^k \left(\frac{d}{dt}C \right) = 0, \forall l.$$

On pose $b^l = -\alpha_j^l d^j \left(\frac{d}{dt}c \right)$ et

$$\beta_k^l \mathbf{d}^k \left(\frac{d}{dt}C \right) = b^l, \forall l,$$

la matrice $\mathbf{B} = (\beta_k^l)$ est inversible par transversalité aux fibres et

$$\frac{d}{dt}C = \mathbf{B}^{-1}b, \quad b = (b^l)$$

si on se fixe v dans la fibre $\pi^{-1}(c(0))$, le relèvement C existe et est unique. \square

On note

$$\Omega(\mathbf{W}, w) = \{c : [a, b] \rightarrow \mathbf{W} : c(a) = c(b) = w\}$$

et $E_w(\zeta)$ la fibre de ζ en w .

Lemma 5. *Il existe un difféomorphisme de \mathbf{V}_w défini par*

$$H_c(p) = q, \quad \forall c \in \Omega(\mathbf{W}, w)$$

avec $C(0) = p$ et $C(1) = q$ où C est l'unique relèvement du chemin c en p . On a

$$H_{c_1 \circ c_2} = H_{c_1} \circ H_{c_2}, \quad \forall c_1, \forall c_2 \in \Omega(\mathbf{W}, w).$$

L'application

$$H : \Omega(\mathbf{W}, w) \rightarrow \text{Diff } \mathbf{V}_w, H(c) = H_c$$

est l'application d'holonomie. L'application H est invariante par homotopie

$$H(c_1) = H(c_2)$$

si c_1 est homéotope à c_2 , elle passe au quotient et si $\overline{H}(c)$ est égale à la classe d'homotopie de c alors H est la composée

$$H = \varkappa \circ \overline{H}, \varkappa : \pi_1(\mathbf{W}, w) \rightarrow \text{Diff } \mathbf{V}_w$$

avec

$$\kappa(\tilde{c}) : \mathbf{V}_w \rightarrow \mathbf{V}_w, \kappa(\tilde{c})(v) = C(1)$$

où C est l'unique relèvement de c d'origine v .

Si ϕ est une S-connexion et la fibre \mathbf{F} de ζ est une variété fermée, le multivers \mathbf{V} est décrit à partir de l'application d'holonomie H , de la variété de base \mathbf{W} et de la fibre \mathbf{F} par,

$$\mathbf{V} \approx \frac{\widetilde{\mathbf{W}} \times \mathbf{F}}{\pi_1(\mathbf{W})}$$

où $\widetilde{\mathbf{W}}$ est le revêtement universel de \mathbf{W} et $\pi_1(\mathbf{W})$ est le groupe fondamental de \mathbf{W} . Dans cette situation les singularités forment un feuilletage du multivers \mathbf{V} .

Theorem 2. *Si ϕ est une S-connexion alors pour tout $w \in \mathbf{W}$, il existe une bijection*

$$\kappa(w) : \pi_1(\mathbf{W}, w) \rightarrow \mathbf{C}_v \cap E_w(\zeta), \pi(v) = w$$

définie par

$$\kappa(w)(\tilde{c}) = u,$$

u est l'extrémité de l'unique relèvement C de c , d'origine v vérifiant 2.6.

Proof. Si $u \in \mathbf{C}_v \cap E_w(\zeta)$, il existe un chemin β de \mathbf{C}_v , d'origine v et d'extrémité u . La classe \tilde{c} définie par $c = \pi \circ \beta$ vérifie

$$\kappa(w)(\tilde{c}) = u,$$

\tilde{c} est unique, par l'unicité des relèvements d'origine v des lacets c dans la classe \tilde{c} . \square

Lemma 6. *Si ϕ est une S-connexion régulière alors $\mathbf{C}_v \cap E_{\pi(v)}(\zeta)$ est une sous-variété de \mathbf{V} pour tout $v \in \mathbf{V}$.*

Proof. La régularité de la S-connexion implique que \mathbf{C}_v est une sous-variété de \mathbf{V} pour tout $v \in \mathbf{V}$. La transversalité des sous-variétés \mathbf{C}_v et $E_{\pi(v)}(\zeta)$ implique que $\mathbf{C}_v \cap E_{\pi(v)}(\zeta)$ est une sous-variété de \mathbf{V} [4]. \square

Definition 4. *Une S-connexion de Lie ϕ est une S-connexion régulière pour laquelle $\mathbf{C}_v \cap E_{\pi(v)}(\zeta)$ muni de la structure de groupe induite par $\kappa(\pi(v))$ est un groupe de Lie pour tout $v \in \mathbf{V}$.*

Si une S-connexion de Lie ϕ est stable alors pour tout $v \in \mathbf{V}$, $\phi(v)(\mathbf{W}) \cap E_{\pi(v)}(\zeta)$ est un groupe de Lie isomorphe à $\pi_1(\mathbf{W}, \pi(v))$. Dans cette situation, on a une décomposition d'une fibre $E_w(\zeta)$ sous la forme d'une réunion disjointe

$$E_w(\zeta) = \sum_{\varphi \in \phi(E_w(\zeta))} \phi^{-1}(\varphi) \cap E_w(\zeta)$$

où $\phi^{-1}(\varphi) \cap E_w(\zeta)$ est un groupe de Lie, isomorphe à $\pi_1(\mathbf{W}, w)$, pour chaque $\varphi \in \phi(E_w(\zeta))$. Pour une S-connexion ϕ , le groupe $\pi_1(\mathbf{W}, \pi(v))$ opère sur \mathbf{C}_v ,

$$\Phi : \pi_1(\mathbf{W}, w) \times \mathbf{C}_v \rightarrow \mathbf{C}_v, \Phi(\tilde{c}, x) = y \text{ et } \pi(v) = w$$

où y est l'extrémité de l'unique relèvement C de c d'origine x vérifiant 2.6. L'orbite O_v est une généralisation de la notion d'événement, les événements de O_v forment l'ensemble des événements congruents à v .

3. LES ÉQUATIONS DE DIRAC-EINSTEIN SUR UNE SINGULARITÉ

Dans ce qui suit, ϕ est une S-connexion régulière. Soit $\phi(v)(\mathbf{W})$ une singularité d'un multivers \mathbf{V} de dimension $m + 4$, modélée sur \mathbf{W} , notée \mathbf{S} . Pour chaque événement $w \in \mathbf{S}$, $T_w\mathbf{S}$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $T_w\mathbf{V}$. On se fixe une carte V de \mathbf{V} , contenant v , on note $\{\partial_\kappa : \kappa = 0, 1, 2, \dots, m + 3\}$ le local frame attaché à cette carte et $\{d^\sigma\}$ le local frame dual. Il existe m formes linéaires sur V ,

$$\mathbf{d}^\tau = b_\sigma^\tau d^\sigma$$

pour lesquelles

$$T_w\mathbf{S} = \bigcap_{\tau=1}^m \text{Ker}(\mathbf{d}^\tau(w)), \forall w \in \mathbf{S} \cap V,$$

en particulier, si

$$X = X^\kappa \partial_\kappa$$

un champ local sur V , on a

$$X(w) \in T_w\mathbf{S} \iff b_\kappa^\tau(w) X^\kappa(w) = 0, \forall w \in \mathbf{S} \cap V,$$

ensuite, on munit \mathbf{V} d'une section de Dirac γ métrisable, de tenseur métrique

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{m+4} \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu).$$

Une singularité \mathbf{S} a la propriété d'avoir localement une structure verticale dans le sens où il existe une carte $V \subset \mathbf{V}$ et une C^∞ -application σ ,

$$\sigma : w \in \mathbf{S} \cap V \rightarrow \sigma(w) \subset T_w\mathbf{V}$$

telle que

$$T_w\mathbf{V} = \tau(w) \oplus \sigma(w), \tau(w) = T_w\mathbf{S}, \forall w \in \mathbf{S} \cap V.$$

Pour construire, une telle carte, on prend un isomorphisme de trivialisations en v

$$\theta : \tilde{V} \rightarrow W \times \mathbf{F}, \theta(w) = (\pi(w), \varphi(w)),$$

si F est une carte de \mathbf{F} en $\varphi(w)$ paramétrée par α et β est un paramétrage de la carte W en $\pi(w)$ alors il existe une carte $V \subset \tilde{V}$ en w définie par

$$(\alpha \times \beta) \circ \theta : V \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^m$$

pour laquelle le local frame associé $\{\partial_\mu\}$ vérifie $\{\partial_\mu : \mu = 0, 1, 2, 3\}$ sont des champs horizontaux et $\{\partial_\mu : \mu = 4, \dots, m + 3\}$ sont des champs verticaux sur V . En chaque événement d'une singularité $w \in \mathbf{S}$, les sous-variétés \mathbf{S} et $E_w(\zeta)$ sont transversales, en particulier,

$$T_w\mathbf{V} = T_w\mathbf{S} \oplus T_w E_w(\zeta),$$

les champs X sur V se décomposent sous la forme

$$X(w) = X_1(w) + X_2(w), X_1(w) \in T_w\mathbf{S} \text{ et } X_2(w) \in T_w E_w(\zeta)$$

et toutes formes d sur V se décomposent en somme

$$d(w) = d_1(w) + d_2(w), d_1(w) |_{T_w E_w(\zeta)} = o_{T_w\mathbf{V}} \text{ et } d_2(w) |_{T_w\mathbf{S}} = o_{T_w\mathbf{V}},$$

on peut identifier d_1 sur \mathbf{S} à un élément de $\Gamma_{V \cap \mathbf{S}}(\xi_{\mathbf{S}}^*)$ et X_1 à un élément de $\Gamma_{V \cap \mathbf{S}}(\xi_{\mathbf{S}})$. L'équation associée à une section de Dirac métrisable γ dans le local frame $\{\partial_\mu\}$ est

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} (\partial_\nu X^\beta + X^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta) = \lambda X^\sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq m+3 \quad (3.1)$$

pour un champ $X = X^\kappa \partial_\kappa$ [1]. Si X est un champ horizontal le long de la singularité \mathbf{S} , $X^\kappa = 0$ pour $\kappa \geq 4$, on a

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} \partial_\nu X^\beta + \gamma_\tau^{\nu\sigma} X^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\tau = 0, \quad 0 \leq \beta \leq 3 \text{ et } 4 \leq \sigma \leq m+3 \quad (3.2)$$

et

$$\gamma_\beta^{\nu\sigma} \partial_\nu X^\beta + \gamma_\tau^{\nu\sigma} X^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\tau = \lambda X^\sigma, \quad 0 \leq \beta, \sigma \leq 3, \quad (3.3)$$

où $\Gamma_{\beta\nu}^\tau$ sont les symboles de Christoffel associé au tenseur métrique $g^{\mu\nu}$, $\partial_\nu X^\beta$ représente la dérivée de Lie de la fonction scalaire X^β le long du champ ∂_ν et λ est une fonction propre locale de l'opérateur de Dirac H_1 de rang 1 induit par la section de Dirac γ . Si on interprète l'univers \mathbf{S} comme une singularité d'un multivers \mathbf{V} , les équations de Dirac sont de la forme 3.2 et 3.3, les équations des champs horizontaux sur \mathbf{S} sont dépendantes du multivers \mathbf{V} . Dans l'hypothèse où l'univers n'est pas une singularité, les équations de Dirac sont de la formes 3.1 avec les indices de sommation compris entre 0 et 3.

4. LES UNIVERS IMMERGÉS.

Definition 5. *Un univers immergé d'un multivers \mathbf{V} modélé sur \mathbf{W} est l'image d'une immersion φ*

$$\varphi : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V},$$

l'ensemble des self-intersections est défini par

$$\mathcal{S}_\varphi = \{v \in \mathbf{V} : \#\varphi^{-1}(v) \geq 2\}$$

et

$$\mathcal{S}_{\varphi,n} = \{v \in \mathbf{V} : \#\varphi^{-1}(v) = n\}, \quad n \geq 1.$$

Pour géométriser les univers immergés, on se donne une ζ -connexion ϕ sur un fibré

$$\zeta = (\mathbf{V}, \pi, \mathbf{W}, \mathbf{F}),$$

le théorème de relèvement des lacets vérifiant 2.6 est encore vraie. Si la ζ -connexion est régulière alors pour tout $v \in \mathbf{V}$, $\phi^{-1}(\phi(v))$ est une sous-variété qui est contenue dans l'univers immergé $\phi(v)(\mathbf{W})$.

Definition 6. *Une immersion $\varphi : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}$ est transversale si pour tout $u \in \varphi(\mathbf{W}) \cap \mathcal{S}_{\varphi,n}$, il existe des voisinages ouverts W_i de $w_i \in \varphi^{-1}(u)$ tels que $V_i = \varphi(W_i)$ sont des sous-variétés transversales et si on pose*

$$V_I = \bigcap_{i \in I} V_i$$

on a $V_I \pitchfork V_j$ pour tout $j \notin I$ et tout sous-ensemble $I \subset \{1, \dots, n\}$.

Cette définition a un sens car $V_{ij} = V_i \cap V_j$ est une sous-variété de dimension $2 \dim \mathbf{W} - \dim \mathbf{V}$, la transversalité $V_{ij} \pitchfork V_k$ implique $V_{ijk} = V_i \cap V_j \cap V_k$ est une sous-variété de \mathbf{V} de dimension $3 \dim \mathbf{W} - 2 \dim \mathbf{V}$, par récurrence V_I est une sous-variété de dimension

$$\text{card}(I) \times \dim \mathbf{W} - (\text{card}(I) - 1) \dim \mathbf{V},$$

on en déduit une condition sur $\text{card}(I)$,

$$\text{card}(I) \leq \frac{\dim \mathbf{V}}{\dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{W}}.$$

La condition $\dim \mathbf{V} = 2 \dim \mathbf{W}$ implique $n \leq 2$ et $\varphi(\mathbf{W}) \cap \mathcal{S}_{\varphi, n} = \emptyset$ si $n \geq 3$ et $\varphi(\mathbf{W}) \cap \mathcal{S}_{\varphi, 2}$ est une sous-variété de dimension 0,

$$\varphi(\mathbf{W}) \cap \mathcal{S}_{\varphi, 2} = \{u_p\} \subset \mathbf{V}.$$

Si $\dim \mathbf{W} = 4$ alors $5 \leq \dim \mathbf{V} \leq 8$, le cas $\dim \mathbf{V} = 8$ a été étudié précédemment. Si $\dim \mathbf{V} = 7$ et $n \leq 2$, les self-intersections ou singularités forment des sous-variétés de dimension 1. Si $\dim \mathbf{V} = 6$, $n \leq 3$ le cas $n = 2$ donne des sous-variétés de dimension 2 et le cas $n = 3$ donne des sous-variétés de dimension 0. Enfin si $\dim \mathbf{V} = 5$, $n \leq 5$ alors les self-intersections forment des sous-variétés de dimension 3 pour $n = 2$, de dimension 2 pour $n = 3$, de dimension 1 pour $n = 4$ et de dimension 0 pour $n = 5$.

Definition 7. Une ζ -connexion transversale est une ζ -connexion pour laquelle $\forall v \in \mathbf{V}$, $\phi(v)$ est une immersion transversale.

Proposition 2. Une ζ -connexion transversale, qui vérifie il existe un voisinage ouvert W de $\pi(v)$ pour lequel $\phi(v)(W)$ est une sous-variété et $\phi(v)|_W$ est une C^∞ -application bijective de W sur $\phi(v)(W)$ telle que

$$\phi(v)^{-1} : \phi(v)(W) \rightarrow W$$

est continue pour les topologies induites, est une ζ -connexion plate.

On peut ainsi définir un feuilletage à partir de la connexion plate associée à une ζ -connexion transversale plate. Cette connexion est un feuilletage en variété de dimension $\dim \mathbf{W}$. Une section de Dirac γ sur le multivers \mathbf{V} pour lequel le tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$ défini sur une carte V est métrisable en dehors des self-intersections de $\phi(v)$ pour tout $v \in V$ et non métrisable sur les self-intersections de $\phi(v)$ est une section adaptée à la ζ -connexion transversale plate.

Problem 1. Pour une ζ -connexion transversale plate existe-t-il une section de Dirac adaptée? Pour un multivers à structure, existe-t-il une ζ -connexion transversale plate ϕ telle que $\cup_{v \in \mathbf{V}} \mathcal{S}_{\phi(v)}$ décrit l'ensemble des événements où la métrique n'existe pas?

5. CONCLUSION

On peut observer l'univers comme une variété intrinsèque de dimension 4 munie d'une section de Dirac métrisable, sous cette hypothèse l'équation de Dirac s'écrit sous la forme 3.1. Si on fait l'hypothèse que l'univers est une singularité d'un multivers muni d'une section de Dirac métrisable, les équations de Dirac sont de la forme 3.2 et 3.3. L'observateur ne peut étudier que les champs horizontaux, les équations de Dirac sur ces champs font intervenir les symboles de Christoffel de la métrique du multivers induite par la section de Dirac métrisable, ainsi que les dérivées de Lie le long des champs verticaux et les opérateurs de Dirac associés aux formes duales des champs verticaux. Sous cette hypothèse, la nature des équations est différente des équations de Dirac standards.

Si le multivers est muni d'une section de Dirac non métrisable à structure alors on peut décrire les sous-espaces où la métrique n'existe pas. En se restreignant aux

composantes connexes où la métrique existe, on se ramène à l'étude des multivers métrisables.

Enfin, la représentation de notre univers comme une variété immergée dans un multivers nous amène à étudier les self-intersections comme des sous-variétés de dimension

$$\dim \mathbf{V} - \kappa (\dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{W}) \text{ avec } \kappa \leq \frac{\dim \mathbf{V}}{\dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{W}}$$

où $\dim \mathbf{W}$ est la dimension de l'univers immergée et $\dim \mathbf{V}$ est la dimension du multivers. Si cette représentation est une géométrisation possible de l'univers alors qu'elle est l'interprétation physique de ces self-intersections? Cette interprétation pourrait être donnée comme une description des événements du multivers \mathbf{V} où le tenseur de Poisson associé à la section de Dirac γ n'est pas métrisable.

REFERENCES

- [1] Jonot J.L., "Opérateurs de Dirac". <hal-01325248v2> (2016)
- [2] Jonot J.L., "Modélisation géométrique et quantique en physique". <hal-01159709v5>, (2015)
- [3] Laudenbach F., "Transversalité de Thom et h-principe de Gromov", www.math.sciences.univ-nantes.fr
- [4] Thom R., "Quelques propriétés globales des variétés différentiables", *Comment. Math. Helv.* 28 (1954), 77-86
- [5] Thom R., "Les singularités des applications différentiables", *Ann. Institut Fourier* 6 (1956), 43-87.

E-mail address: jean-louis.jonot@ac-versailles.fr ou j.jonot@gmail.com