

Méthode numérique pour le contrôle des PDMP

Benoîte de Saporta
Université de Montpellier



IMAG
INSTITUT MONTPELLIERAIN
ALEXANDER GROTHENDIECK



Plan de l'exposé

PDMP : notations et exemples

Définition

Exemple Astrium

Exemple Thales

Objectif

Arrêt optimal

Utilisation en statistique

Conclusion

Processus Markoviens déterministes par morceaux

Davis (80's)

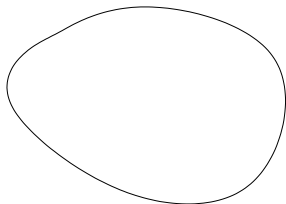
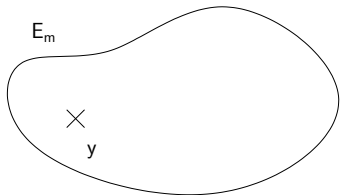
Classe générale de processus stochastiques

- ▶ **markoviens**
- ▶ **hybrides** : une composant discrète et une composante continue
- ▶ **non-diffusion** : mouvement **déterministe** entre des sauts aléatoires

Construction itérative

Point de départ

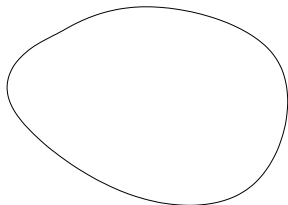
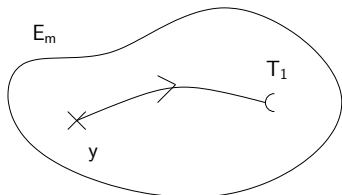
$$X_0 = Z_0 = (m, y)$$



Construction itérative

X_t suit le flot déterministe jusqu'au premier temps de saut $T_1 = S_1$

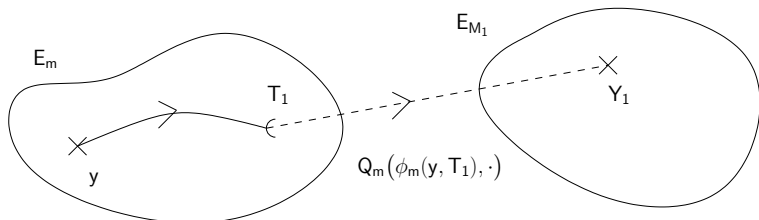
$$X_t = (m, \phi_m(y, t)), \quad t < T_1$$



Construction itérative

Position et mode après-saut $Z_1 = (M_1, Y_1)$ tirés suivant la loi

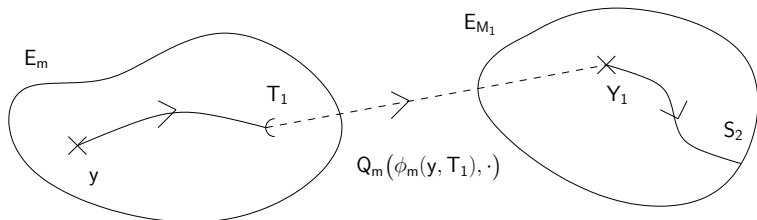
$$Q_m(\phi_m(y, T_1), \cdot)$$



Construction itérative

X_t suit le flot déterministe jusqu'au prochain temps de saut T_2

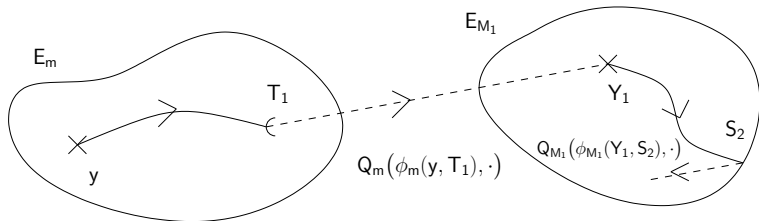
$$X_{T_1+t} = (M_1, \phi_{M_1}(Y_1, t)), \quad t < S_2 = T_2 - T_1$$



Construction itérative

Position et mode après-saut $Z_2 = (M_2, Y_2)$ tirés suivant la loi

$$Q_{M_1}(\phi_{M_1}(Y_1, S_2), \cdot) \dots$$



Domaines d'application

Premières applications

gestion de stock, modèles d'atelier, files d'attente, assurance, ...

Biologie

- ▶ modélisation du **potentiel électrique** dans les neurones
[Pakdaman, Thieullen, Wainrib 2010] [Riedler, Thieullen, Wainrib 2012]
[Génadot, Thieullen 2012]
- ▶ modélisation de la **division cellulaire** [Doumic, Hoffmann, Krell, Robert 2012]
- ▶ modélisation individu-centré de **chemostat** [Fritsch 2014]

Fiabilité dynamique

Comportement de systèmes complexes pouvant tomber en **panne**

Plan de l'exposé

PDMP : notations et exemples

Définition

Exemple Astrium

Exemple Thales

Objectif

Arrêt optimal

Utilisation en statistique

Conclusion

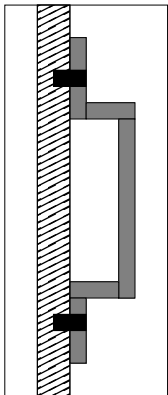
Exemple Astrium

Structure de missile balistique stratégique soumis à corrosion



Problème de corrosion

Structure de missile balistique stratégique soumis à corrosion



- ▶ support pour les équipements du missile
- ▶ structure de petite taille : un seul point de mesure
- ▶ longue durée de vie → surveillance de la perte d'épaisseur par corrosion

Profil d'emploi

Structure de missile balistique stratégique soumis à corrosion

Profil d'emploi

Stockage dans 3 environnements différentes avec durées aléatoires

1. atelier
2. sous-marin nucléaire en mission
3. sous-marin en cale sèche

Exigence de sûreté très forte



Maîtriser l'évolution de l'épaisseur

Dynamique du processus de dégradation

- ▶ Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$

Dynamique du processus de dégradation

- ▶ Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- ▶ Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$

Dynamique du processus de dégradation

- ▶ Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- ▶ Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- ▶ Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul

Dynamique du processus de dégradation

- ▶ Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- ▶ Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- ▶ Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul
- ▶ Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement i :

$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

Dynamique du processus de dégradation

- ▶ Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- ▶ Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- ▶ Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul
- ▶ Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement i :

$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

- ▶ ρ_i taux de corrosion stable **aléatoire** suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement i

Dynamique du processus de dégradation

- ▶ Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- ▶ Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- ▶ Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul
- ▶ Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement i :

$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

- ▶ ρ_i taux de corrosion stable **aléatoire** suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement i
- ▶ η_i durée de transition déterministe dans l'environnement i .

Dynamique du processus de dégradation

- ▶ Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- ▶ Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- ▶ Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul
- ▶ Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement i :

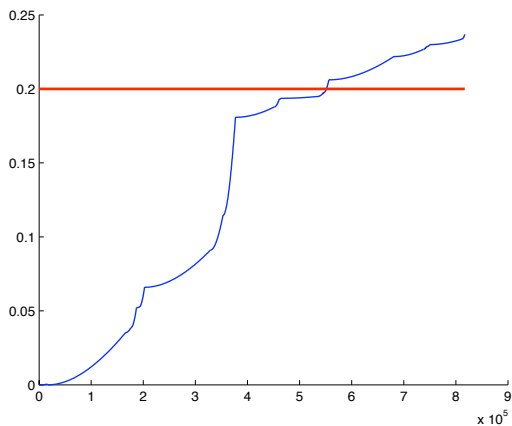
$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

- ▶ ρ_i taux de corrosion stable **aléatoire** suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement i
- ▶ η_i durée de transition déterministe dans l'environnement i .

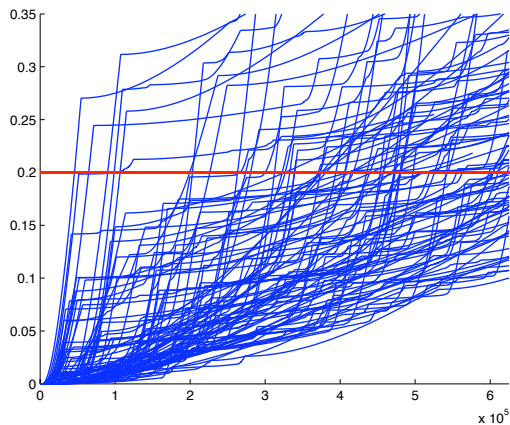
On dispose de valeurs numériques pour tous les paramètres.

Structure inutilisable si $d_t \geq 0.2mm$

Exemples de trajectoires simulées



Exemples de trajectoires simulées



Plan de l'exposé

PDMP : notations et exemples

Définition

Exemple Astrium

Exemple Thales

Objectif

Arrêt optimal

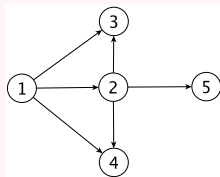
Utilisation en statistique

Conclusion

Problème industriel de Thales optronique

Calculer une **date de maintenance** pour un équipement soumis à différents types de **pannes** et équipé de **capteurs** permettant de connaître l'état du système

Goupe de climatisation

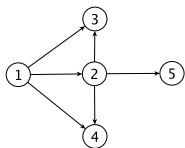


- ▶ Etat 1: état **stable**
- ▶ Etat 2: roulement à billes **degradé**
- ▶ Etat 3: **panne** de l'électrovanne
- ▶ Etat 4: **panne** électronique
- ▶ Etat 5: **panne** du roulement à billes

Modèle PDMP

Taux de transition

- ▶ dégradation du roulement à bille et panne de l'électrovanne: loi de **Weibull** \Rightarrow **intensité dépendant du temps**
- ▶ pannes électronique et du roulement à bille: loi exponentielle

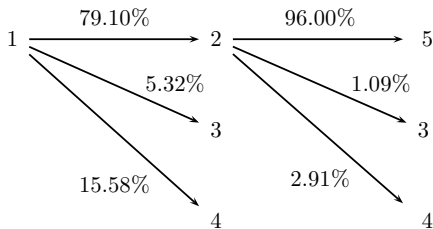


- ▶ Etat 1: état **stable**
- ▶ Etat 2: roulement à billes **degradé**
- ▶ Etat 3: **panne** de l'électrovanne
- ▶ Etat 4: **panne** électronique
- ▶ Etat 5: **panne** du roulement à billes

Modèle PDMP

- ▶ mode **discret** $m_t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ variable **euclidienne** $y_t = t$ temps de fonctionnement du groupe de climatisation

Trajectoires sans maintenance



- ▶ 1: état **stable**
- ▶ 2: roulement à billes **degradé**
- ▶ 3: **panne** électrovanne
- ▶ 4: **panne** électronique
- ▶ 5: **panne** roulement à billes

Autres exemples de PDMP

Composante discrète

- ▶ environnement
- ▶ panne de composants
- ▶ nombre de cellules/canaux ouverts
- ▶ ...

Composante euclidienne

- ▶ équations de la physique, chimie, biologie
- ▶ dynamique des populations
- ▶ temps
- ▶ ...

Plan de l'exposé

PDMP : notations et exemples

Définition

Exemple Astrium

Exemple Thales

Objectif

Arrêt optimal

Utilisation en statistique

Conclusion

Méthodes numériques pour les PDMP

- ▶ fort potentiel d'applications
- ▶ nombreux résultats théoriques [Davis 93], [Jacobsen 06]
- ▶ processus faciles à simuler
- ▶ méthodes d'approximation numérique dédiées basées sur des discrétisations intelligentes et les simulations [de Saporta, Dufour, Zhang, 2015]

Objectif des travaux présentés

Proposer des méthodes numériques

- ▶ adaptées aux spécificités des PDMP
- ▶ avec des preuves (et des vitesses) de convergence
- ▶ utilisables en pratique

Pour calculer

- ▶ un temps d'arrêt optimal

Idées directrices

- ▶ Utiliser la chaîne induite (Z_n, S_n) qui est déjà en temps discret
- ▶ Utiliser la propriété de Markov pour obtenir des expressions par récurrence
- ▶ Discrétiser intelligemment l'espace d'états de la chaîne induite pour obtenir une expression calculable

Plan de l'exposé

PDMP : notations et exemples

Arrêt optimal

- Formulation du problème

- Discrétisation de la chaîne induite par quantification

- Simulation de PDMPs

- Résultats théoriques

- Résultats numériques, exemple Astrium

- Résultats numériques, exemple Thales

Utilisation en statistique

Conclusion

Motivation : maintenance préventive

Machine pouvant tomber en panne

Problème de maintenance

Trouver un **équilibre** optimal entre

- ▶ changer les pièces trop tôt/souvent
- ▶ ne rien faire jusqu'à la panne totale

Motivation : maintenance préventive

Machine pouvant tomber en panne

Problème de maintenance

Trouver un **équilibre** optimal entre

- ▶ changer les pièces trop tôt/souvent
- ▶ ne rien faire jusqu'à la panne totale

Problème mathématique

- ▶ arrêt optimal
- ▶ contrôle impulsionnel

Problème d'arrêt optimal

- ▶ Fonction de performance g
- ▶ Horizon aléatoire : N -ème temps de saut T_N du PDMP
- ▶ \mathcal{M}_N ensemble des temps d'arrêt $\tau \leq T_N$

Problème d'arrêt optimal

- ▶ calculer la fonction valeur

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$$

- ▶ trouver un temps d'arrêt (ε) -optimal τ^* qui atteint $V(x)(-\varepsilon)$

Écriture récursive des fonctions avec la chaîne induite

[Gugerli, 1986]

Equation de programmation dynamique rétrograde

- ▶ $v_N = g$
- ▶ $v_n = L(v_{n+1}, g)$ pour $n \leq N - 1$

$$v_0(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)] = V(x)$$

$$\begin{aligned}
 &L(w, g)(x) \\
 &= \sup_{u \leq t^*(Z_n)} \left\{ \mathbb{E} \left[w(Z_{n+1}) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} < u\}} + g(\phi(Z_n, u)) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \geq u\}} \mid Z_n = x \right] \right\} \\
 &\quad \vee \mathbb{E} [w(Z_{n+1}) \mid Z_n = x]
 \end{aligned}$$

Construction itérative de variables aléatoires

Equation de programmation dynamique rétrograde

- ▶ $v_N(Z_N) = g(Z_N)$
- ▶ $v_n(Z_n) = L(v_{n+1}, g)(Z_n)$ pour $n \leq N - 1$

$$v_0(Z_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$$

$$\begin{aligned} v_n(Z_n) &= L(v_{n+1}, g)(Z_n) \\ &= \sup_{u \leq t^*(Z_n)} \left\{ \mathbb{E} \left[v_{n+1}(Z_{n+1}) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} < u\}} + g(\phi(Z_n, u)) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \geq u\}} \mid Z_n \right] \right\} \\ &\quad \vee \mathbb{E} [v_{n+1}(Z_{n+1}) \mid Z_n] \end{aligned}$$

Plan de l'exposé

PDMP : notations et exemples

Arrêt optimal

Formulation du problème

Discrétisation de la chaîne induite par quantification

Simulation de PDMPs

Résultats théoriques

Résultats numériques, exemple Astrium

Résultats numériques, exemple Thales

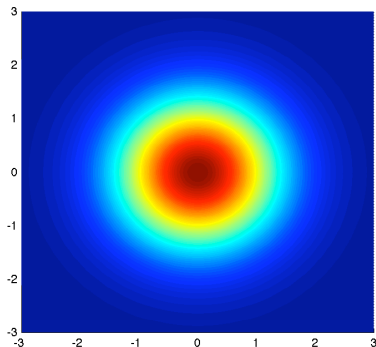
Utilisation en statistique

Conclusion

Méthode de quantification

Approcher une loi **continue** par une loi **discrète** de façon optimisée

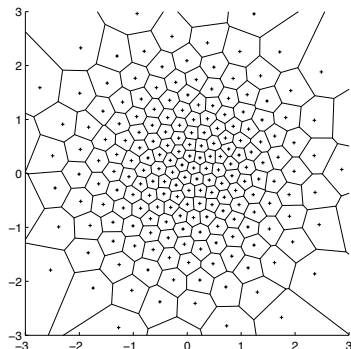
Exemple: $\mathcal{N}(0, I_2)$



Méthode de quantification

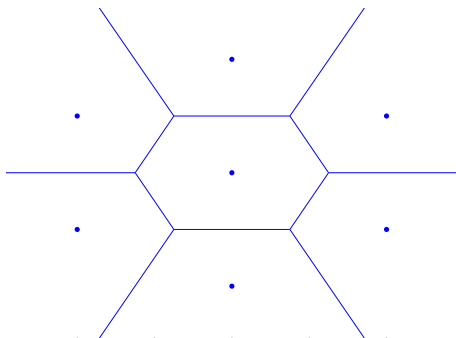
Approcher une loi continue par une loi discrète de façon optimisée

Exemple: $\mathcal{N}(0, I_2)$



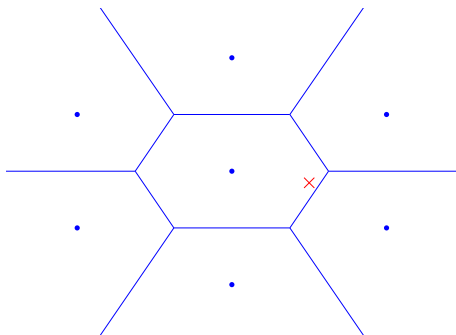
Mise en oeuvre

Modèle \longrightarrow simulateur de trajectoires \longrightarrow grilles



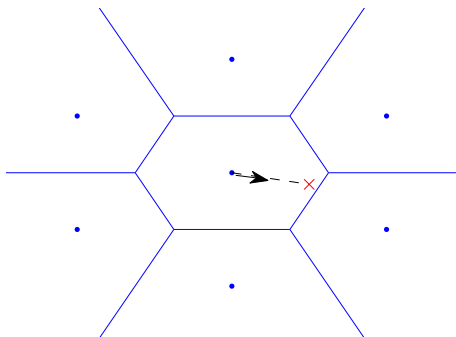
Mise en oeuvre

Modèle \longrightarrow simulateur de trajectoires \longrightarrow grilles



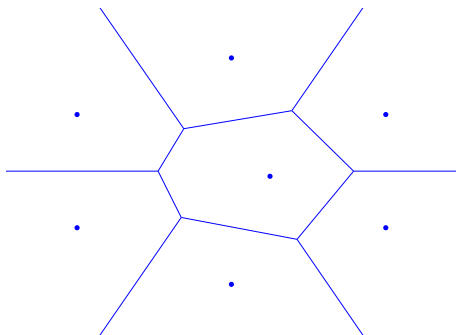
Mise en oeuvre

Modèle \longrightarrow simulateur de trajectoires \longrightarrow grilles



Mise en oeuvre

Modèle \longrightarrow simulateur de trajectoires \longrightarrow grilles



Avantages et inconvénients de la quantification

Avantages

- ▶ un simulateur de la loi cible suffit
- ▶ construction automatique des grilles
- ▶ vitesse de convergence pour $\mathbb{E}[|f(X) - f(\hat{X})|]$ si f Lipschitz

Inconvénients

- ▶ temps de calcul des grilles
- ▶ fléau de la dimension
- ▶ questions ouvertes sur la convergence des algorithmes

Plan de l'exposé

PDMP : notations et exemples

Arrêt optimal

Formulation du problème

Discrétisation de la chaîne induite par quantification

Simulation de PDMPs

Résultats théoriques

Résultats numériques, exemple Astrium

Résultats numériques, exemple Thales

Utilisation en statistique

Conclusion

Construction itérative

[M. Davis]

- ▶ **Initialisation** $X_0 = Z_0 = x = (m, y)$, $S_0 = T_0 = 0$
- ▶ **Réurrence** pour tout $n \geq 0$
 - ▶ tirer S_{n+1} selon l'intensité λ et le temps d'atteinte de la frontière t^*
 - ▶ poser $T_{n+1} = T_n + S_{n+1}$
 - ▶ pour $T_n \leq t < T_{n+1}$, poser $X_t = \phi(Z_n, t - T_n)$
 - ▶ tirer Z_{n+1} suivant $Q(\phi(Z_n, S_{n+1}), \cdot)$

⇒ Méthode de simulation

Minimum de lois exponentielles

Intensité variable

Théorème

Soit $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ indépendantes,

$T = \min\{X, Y\}$, $I = \operatorname{argmin}\{X, Y\}$

Alors $T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$ et $\mathbb{P}(I = X | T = t) = \frac{\lambda(\phi(x,t))}{(\lambda(\phi(x,t)) + \mu(\phi(x,t)))}$.

Preuve

$\mathbb{P}(T > t, I = X)$

Minimum de lois exponentielles

Intensité variable

Théorème

Soit $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ indépendantes,

$T = \min\{X, Y\}$, $I = \operatorname{argmin}\{X, Y\}$

Alors $T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$ et $\mathbb{P}(I = X | T = t) = \frac{\lambda(\phi(x,t))}{(\lambda(\phi(x,t)) + \mu(\phi(x,t)))}$.

Preuve

$\mathbb{P}(T > t, I = X)$

$$= \int_t^\infty \int_u^\infty \mu(\phi(x, v)) e^{-\int_0^v \mu(\phi(x, s)) ds} \lambda(\phi(x, u)) e^{-\int_0^u \lambda(\phi(x, s)) ds} dv du$$

Minimum de lois exponentielles

Intensité variable

Théorème

Soit $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ indépendantes,

$T = \min\{X, Y\}$, $I = \operatorname{argmin}\{X, Y\}$

Alors $T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$ et $\mathbb{P}(I = X | T = t) = \frac{\lambda(\phi(x, t))}{(\lambda(\phi(x, t)) + \mu(\phi(x, t)))}$.

Preuve

$\mathbb{P}(T > t, I = X)$

$$= \int_t^\infty \int_u^\infty \mu(\phi(x, v)) e^{-\int_0^v \mu(\phi(x, s)) ds} \lambda(\phi(x, u)) e^{-\int_0^u \lambda(\phi(x, s)) ds} dv du$$

$$= \int_t^\infty e^{-\int_0^u \mu(\phi(x, s)) ds} \lambda(\phi(x, u)) e^{-\int_0^u \lambda(\phi(x, s)) ds} du$$

Minimum de lois exponentielles

Intensité variable

Théorème

Soit $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ indépendantes,

$T = \min\{X, Y\}$, $I = \operatorname{argmin}\{X, Y\}$

Alors $T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$ et $\mathbb{P}(I = X | T = t) = \frac{\lambda(\phi(x, t))}{(\lambda(\phi(x, t)) + \mu(\phi(x, t)))}$.

Preuve

$\mathbb{P}(T > t, I = X)$

$$\begin{aligned}
 &= \int_t^\infty \int_u^\infty \mu(\phi(x, v)) e^{-\int_0^v \mu(\phi(x, s)) ds} \lambda(\phi(x, u)) e^{-\int_0^u \lambda(\phi(x, s)) ds} dv du \\
 &= \int_t^\infty e^{-\int_0^u \mu(\phi(x, s)) ds} \lambda(\phi(x, u)) e^{-\int_0^u \lambda(\phi(x, s)) ds} du \\
 &= \int_t^\infty \frac{\lambda(\phi(x, u))}{\lambda(\phi(x, u)) + \mu(\phi(x, u))} (\lambda(\phi(x, u)) + \mu(\phi(x, u))) e^{-\int_0^u (\lambda(\phi(x, s)) + \mu(\phi(x, s))) ds} du
 \end{aligned}$$

Minimum de lois exponentielles

Intensité variable

Théorème

Soit $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ indépendantes,

$T = \min\{X, Y\}$, $I = \operatorname{argmin}\{X, Y\}$

Alors $T \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$ et $\mathbb{P}(I = X | T = t) = \frac{\lambda(\phi(x,t))}{\lambda(\phi(x,t)) + \mu(\phi(x,t))}$.

Preuve

$\mathbb{P}(T > t, I = X)$

$$\begin{aligned}
 &= \int_t^\infty \int_u^\infty \mu(\phi(x, v)) e^{-\int_0^v \mu(\phi(x, s)) ds} \lambda(\phi(x, u)) e^{-\int_0^u \lambda(\phi(x, s)) ds} dv du \\
 &= \int_t^\infty e^{-\int_0^u \mu(\phi(x, s)) ds} \lambda(\phi(x, u)) e^{-\int_0^u \lambda(\phi(x, s)) ds} du \\
 &= \int_t^\infty \frac{\lambda(\phi(x, u))}{\lambda(\phi(x, u)) + \mu(\phi(x, u))} (\lambda(\phi(x, u)) + \mu(\phi(x, u))) e^{-\int_0^u (\lambda(\phi(x, s)) + \mu(\phi(x, s))) ds} du \\
 &= \int_t^\infty \mathbb{P}(I = X | T = u) \mathbb{P}(T \in du)
 \end{aligned}$$

Simulation d'un minimum de lois exponentielles

Intensité variable

X_1, \dots, X_n v.a. indépendantes d'intensité respective $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, correspondant à la survenue d'événements de type 1 à n

$T = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ et I l'indice de la variable qui réalise le minimum

Pour simuler T et I

Il est équivalent de

- ▶ Simuler X_1, \dots, X_n et prendre leur minimum, choisir l'indice correspondant
- ▶ Simuler une seule loi d'intensité $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ et une fois $T = t$ tiré choisir i avec probabilité $\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}(\phi(x, t))$

Inversion de la fonction de répartition

Solution à privilégier quand c'est possible

- ▶ Si on sait **calculer explicitement** la fonction de répartition **le long du flot**
- ▶ Et si on sait **l'inverser explicitement**

Inversion de la fonction de répartition

Exemple

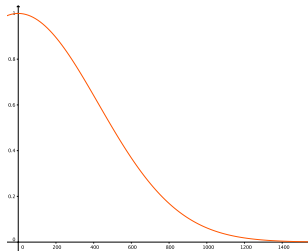
- Loi de Weibull $\lambda \circ \phi(x, t) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x+t}{\beta}\right)^{\alpha-1}$
pour $x = 0$

Fonction de survie

$$\mathbb{P}(T > t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right)$$

Inverse

$$f(U) = \beta(-\log(U))^{1/\alpha}$$



Rejet à base de loi de Poisson

Simulation d'un processus de Poisson

Rappel Conditionnellement à $N_t = n$, les n sauts du processus de Poisson sont répartis de façon uniforme sur l'intervalle $[0, t]$.

Rejet à base de loi de Poisson

Simulation d'un processus de Poisson

Rappel Conditionnellement à $N_t = n$, les n sauts du processus de Poisson sont répartis de façon uniforme sur l'intervalle $[0, t]$.

Simulation d'un processus de Poisson jusqu'au temps T

- ▶ tirer $N \sim \text{Poisson}(\lambda T)$
- ▶ Si $N \neq 0$ faire
 - ▶ Pour $1 \leq k \leq N$ faire
 - tirer $U_k \sim \text{Unif}[0, T]$
 - ▶ ordonner les U_k , $U_{(0)} \leftarrow 0$, $U_{(N+1)} \leftarrow T$
 - ▶ Pour $1 \leq k \leq N + 1$ faire
 - $N_t \leftarrow k$ sur $[U_{(k-1)}, U_{(k)}[$
- ▶ Sinon $N_t \leftarrow 0$ sur $[0, T[$
- ▶ renvoyer N_t

Rejet à base de loi de Poisson

[Cocozza] Simuler une intensité variable

Simulation de la loi d'intensité variable $\lambda(x)$

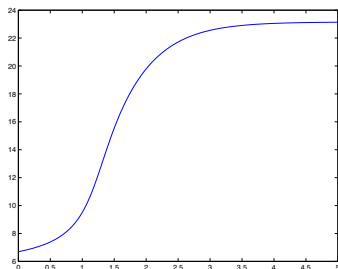
- ▶ Initialisation choisir $A > 0$, $a \leftarrow 0$, $S \leftarrow \emptyset$
- ▶ Tant que $S = \emptyset$ faire
 - ▶ choisir $L \geq \sup_{a \leq x \leq a+A} \lambda(x)$
 - ▶ tirer $N \sim \text{Poisson}(L \times A)$
 - ▶ Si $N \neq 0$ faire
 - ▶ Pour $1 \leq k \leq N$ faire
 - tirer $U \sim \text{Unif}[a, a + A]$
 - tirer $V \sim \text{Unif}[0, L]$
 - Si $U \leq V$ faire $S \leftarrow S \cup \{U\}$
 - ▶ $a \leftarrow a + A$
- ▶ renvoyer $\min S$

Rejet à base de loi de Poisson

Exemple

Mise en oeuvre de l'algorithme $A = 0.5$

▶ $a = 0$

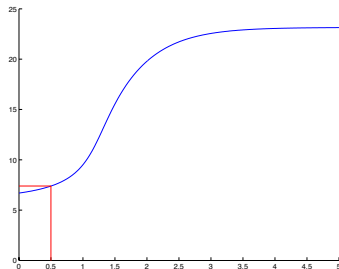


Rejet à base de loi de Poisson

Exemple

Mise en oeuvre de l'algorithme $A = 0.5$

- ▶ $a = 0$
- ▶ $L = \max_{t \in [a, a+A]} \lambda \circ \phi(x, t)$
calculé numériquement
(pas = 10^{-3}) $L = 7.39$
- ▶
- ▶

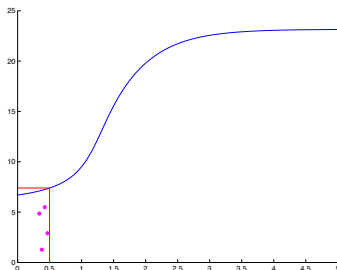


Rejet à base de loi de Poisson

Exemple

Mise en oeuvre de l'algorithme $A = 0.5$

- ▶ $a = 0$
- ▶ $L = \max_{t \in [a, a+A]} \lambda \circ \phi(x, t)$
calculé numériquement
(pas = 10^{-3}) $L = 7.39$
- ▶ tirer $N \sim \text{Poisson}(L \times A)$,
 $N = 4$, tirer $U \sim \text{Unif}[a, a + A]$,
tirer $V \sim \text{Unif}[0, L]$
- ▶

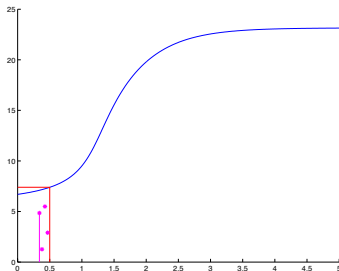


Rejet à base de loi de Poisson

Exemple

Mise en oeuvre de l'algorithme $A = 0.5$

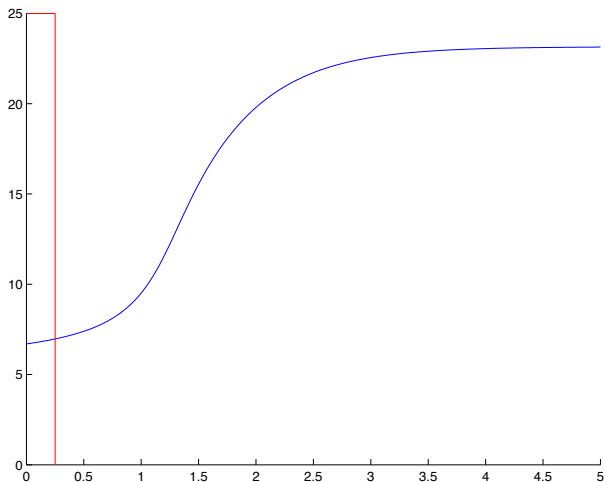
- ▶ $a = 0$
- ▶ $L = \max_{t \in [a, a+A]} \lambda \circ \phi(x, t)$
calculé numériquement
(pas = 10^{-3}) $L = 7.39$
- ▶ tirer $N \sim \text{Poisson}(L \times A)$,
 $N = 4$, tirer $U \sim \text{Unif}[a, a + A]$,
tirer $V \sim \text{Unif}[0, L]$
- ▶ sélectionner la plus petite
abscisse des points sous la
courbe 0.3394



Rejet à base de loi de Poisson

Exemple

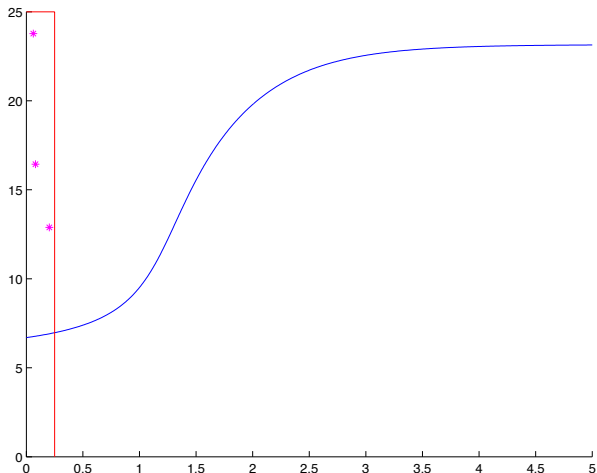
Mise en oeuvre de l'algorithme $A = 0.25$, $L = 25$ majorant global



Rejet à base de loi de Poisson

Exemple

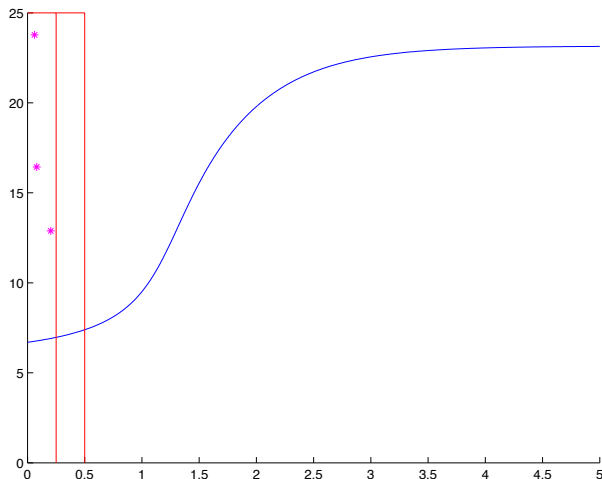
Mise en oeuvre de l'algorithme $A = 0.25$, $L = 25$ majorant global



Rejet à base de loi de Poisson

Exemple

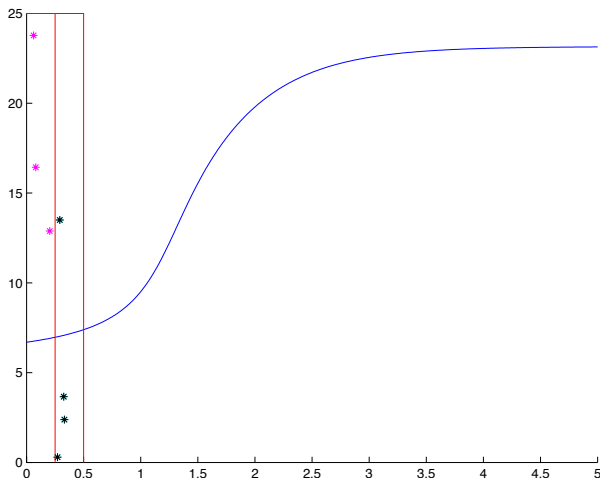
Mise en oeuvre de l'algorithme $A = 0.25$, $L = 25$ majorant global



Rejet à base de loi de Poisson

Exemple

Mise en oeuvre de l'algorithme $A = 0.25$, $L = 25$ majorant global



Rejet à base de loi de Poisson

Bilan

Avantages

- ▶ Uniquement besoin d'un maximum **local** de l'intensité
- ▶ Simulation **exacte** si le flot est connu
- ▶ Marche avec les intensités individuelles **et** l'intensité globale
- ▶ Simule directement la chaîne induite (Z_n, S_n)

Inconvénients

- ▶ Calculer un **maximum** local / global
- ▶ **Nombre** d'itérations inconnu, aléatoire
- ▶ Si flot numérique, **nombre d'appels à la fonction flot** inconnu, aléatoire,
- ▶ Simuler **séparément** les temps de sauts et la trajectoire le long du flot

Quand le flot n'est pas explicite

En pratique

- ▶ on remplace par une **approximation numérique**

En théorie

- ▶ quasiment **pas** de résultat sur l'erreur qu'on commet :
modifier le flot influe sur
 - ▶ t^*
 - ▶ l'intensité le long du flot
 - ▶ le point de départ pour le noyau de saut...

La régularité du flot ne suffit probablement pas à ce que tout se passe bien.

Plan de l'exposé

PDMP : notations et exemples

Arrêt optimal

Formulation du problème

Discrétisation de la chaîne induite par quantification

Simulation de PDMPs

Résultats théoriques

Résultats numériques, exemple Astrium

Résultats numériques, exemple Thales

Utilisation en statistique

Conclusion

Discrétisation

Approximation de la fonction valeur

- ▶ $\widehat{v}_N(\widehat{Z}_N) = g(\widehat{Z}_N)$
- ▶ $\widehat{v}_n(\widehat{Z}_n) = \widehat{L}_d(\widehat{v}_{n+1}, g)(\widehat{Z}_n)$ pour $n \leq N - 1$

$$\begin{aligned} & \widehat{L}_d(v_{n+1}, g)(Z_n) \\ &= \max_{u \in G(\widehat{Z}_n)} \left\{ \mathbb{E} \left[v(\widehat{Z}_{n+1}) \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} < u\}} + g(\phi(Z_n, u)) \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} \geq u\}} \mid \widehat{Z}_n \right] \right\} \\ & \quad \vee \mathbb{E} [v(Z_{n+1}) \mid \widehat{Z}_n] \end{aligned}$$

Vitesse de convergence

[dS, Dufour, Gonzalez 2009]

Théorème

Hypothèses de régularité **Lipschitz** sur ϕ , λ , Q , t^* et g

$$|v_0(x) - \hat{v}_0(x)| \leq C\sqrt{EQ}$$

C constante explicite,
 EQ erreur de quantification

$\sqrt{\cdot}$ due aux **indicatrices**

Temps d'arrêt optimal

Règle d'arrêt calculable $\hat{\tau}$

- ▶ construction itérative **explicite**
- ▶ pas de calculs supplémentaires
- ▶ **vrai temps d'arrêt** pour la filtration du processus (X_t)

Théorème

Mêmes hypothèses

$$|v_0(x) - \mathbb{E}_x[g(X_{\hat{\tau}})]| \leq C_1 EV + C_2 \sqrt{EQ}$$

C_1, C_2 constantes explicites

EV erreur de la fonction valeur

EQ erreur de quantification

Autre approximation de la fonction valeur par **Monte Carlo**

Plan de l'exposé

PDMP : notations et exemples

Arrêt optimal

Formulation du problème

Discrétisation de la chaîne induite par quantification

Simulation de PDMPs

Résultats théoriques

Résultats numériques, exemple Astrium

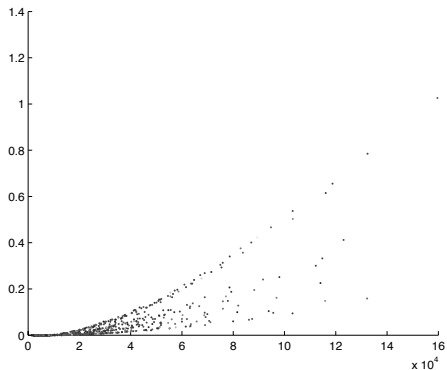
Résultats numériques, exemple Thales

Utilisation en statistique

Conclusion

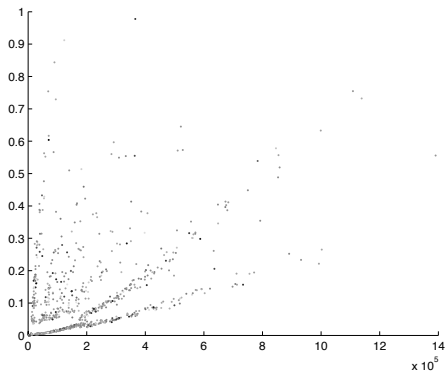
Grilles pour le processus de corrosion

Dans l'ambiance 2 après le 1er saut



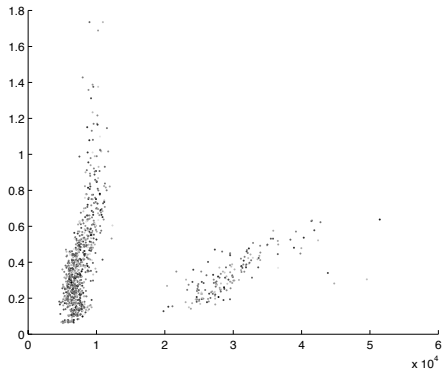
Grilles pour le processus de corrosion

Dans l'ambiance 3 après le 2ème saut

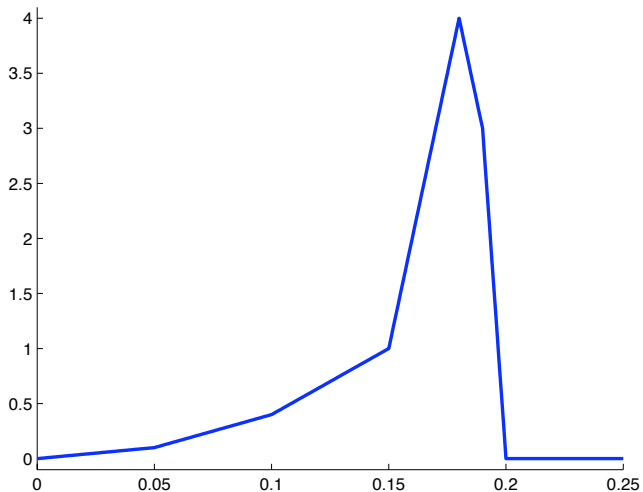


Grilles pour le processus de corrosion

Dans l'ambiance 1 après le 15ème saut

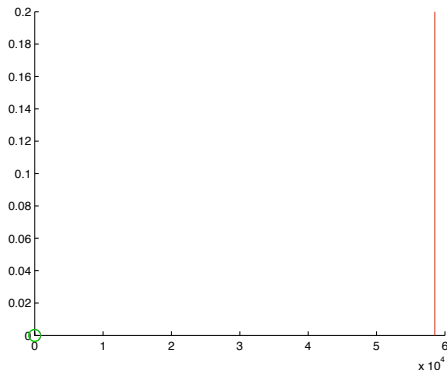


Fonction de performance



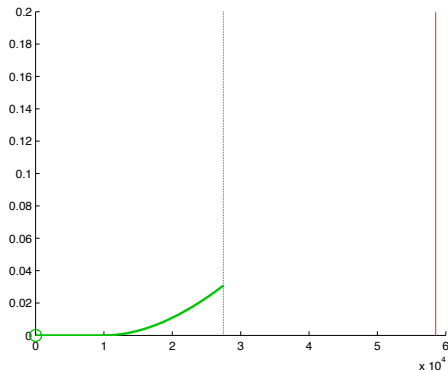
Règle d'arrêt itérative

[dS, Dufour, Gonzalez 2010]



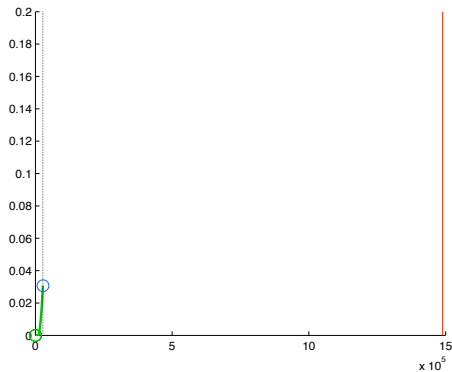
Règle d'arrêt itérative

[dS, Dufour, Gonzalez 2010]



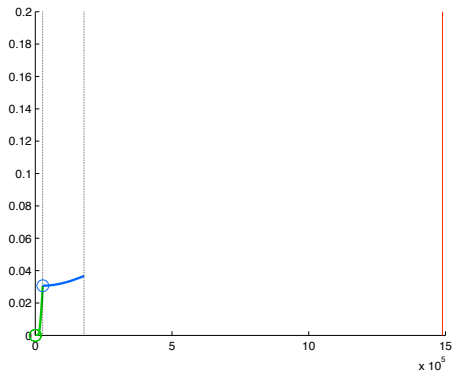
Règle d'arrêt itérative

[dS, Dufour, Gonzalez 2010]



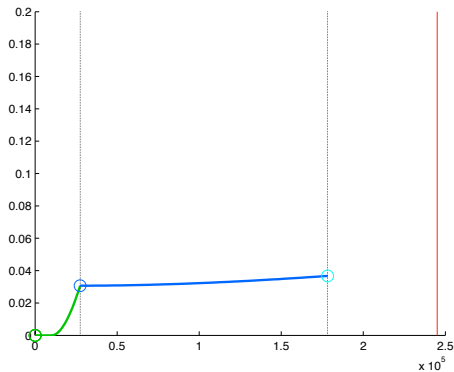
Règle d'arrêt itérative

[dS, Dufour, Gonzalez 2010]



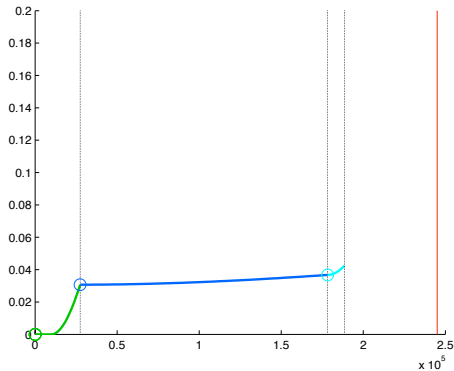
Règle d'arrêt itérative

[dS, Dufour, Gonzalez 2010]



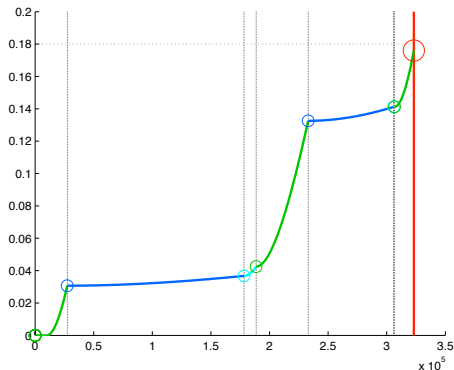
Règle d'arrêt itérative

[dS, Dufour, Gonzalez 2010]



Règle d'arrêt itérative

[dS, Dufour, Gonzalez 2010]



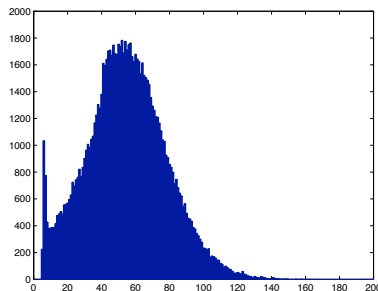
Calcul de la fonction valeur

Résultats numériques (vraie valeur : 4)

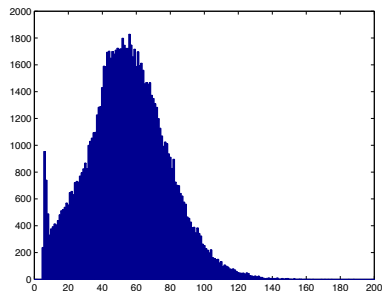
Nombre de points dans les grilles de quantification	Fonction valeur approchée	Fonction valeur par Monte Carlo
10	2.48	0.94
50	2.70	1.84
100	2.94	2.10
200	3.09	2.63
500	3.39	3.15
1000	3.56	3.43
2000	3.70	3.60
5000	3.82	3.73
8000	3.86	3.75

Comparaison avec Monte Carlo

Temps d'arrêt optimal $\tau^* = \inf\{t : d_t \geq 0.02\}$



temps d'arrêt approché



temps d'arrêt théorique

Plan de l'exposé

PDMP : notations et exemples

Arrêt optimal

Formulation du problème

Discrétisation de la chaîne induite par quantification

Simulation de PDMPs

Résultats théoriques

Résultats numériques, exemple Astrium

Résultats numériques, exemple Thales

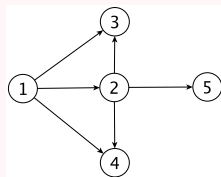
Utilisation en statistique

Conclusion

Problème industriel de Thales optronique

Calculer une **date de maintenance** pour un équipement soumis à différents types de **pannes**

Groupe de climatisation



- ▶ Etat 1: état **stable**
- ▶ Etat 2: roulement à billes **dégradé**
- ▶ Etat 3: **panne** de l'électrovanne
- ▶ Etat 4: **panne** électronique
- ▶ Etat 5: **panne** du roulement à billes

Fonction de performance

$$g(m, t) = \frac{t}{p(m)}$$

- ▶ $p(1) = 6$ coût de maintenance dans l'état stable
- ▶ $p(2) = 6$ coût de maintenance pour roulement à bille dégradé
- ▶ $p(3) = 5$ coût de réparation de l'électrovanne
- ▶ $p(4) = 3.5$ coût de réparation d'une panne électronique
- ▶ $p(5) = 12$ coût de réparation du roulement à billes

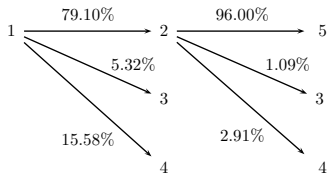
Optimisation de maintenance

- ▶ Il vaut mieux déclencher une maintenance en mode dégradé 2 qu'attendre la panne totale 5
- ▶ Les coûts de réparation en mode 3 et 4 sont moins chers que le coût de maintenance

Performance moyenne sans maintenance : 342.72

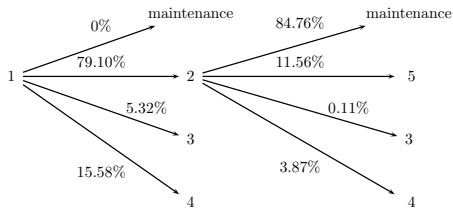
Performance avec maintenance optimisée

Sans maintenance



Performance moyenne 342.72

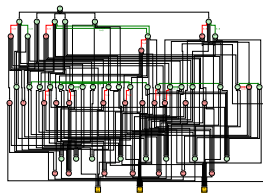
Avec maintenance



Performance moyenne 592.47

Autres résultats

- ▶ Optimisation de maintenance du réservoir chauffé [dS, Zhang 2013]
- ▶ Arrêt optimal **partiellement observé** [Brandejsky, dS, Dufour 2013]
- ▶ Arrêt optimal sur les PDMP avec **branchement** thèse M. Joubaud, en cours
- ▶ Contrôle **impulsionnel**
 - ▶ approximation de la fonction valeur [dS, Dufour 2012]
 - ▶ stratégie ϵ -optimale [dS, Dufour, Geeraert 2017]
 - ▶ approximation d'une stratégie ϵ -optimale en cours



Plan de l'exposé

PDMP : notations et exemples

Arrêt optimal

Utilisation en statistique

Loi d'un temps de sortie

Résultats

Conclusion

Approximation de la loi d'un temps de sortie

$U \subset E, X_0 \in U$. Temps de sortie de U :

$$\tau = \inf\{s \geq 0 : X_s \notin U\}$$

Objectif

Proposer une méthode numérique pour approcher la loi de τ

$$s \longmapsto \mathbb{P}(\tau > s)$$

Formulation récursive du problème

Constat $\{\tau \leq T_{k+1}\} = \{\tau \leq T_k\} \cup \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\}$

Conséquence : calcul récursif de $\mathbb{P}(\tau > s | \tau \leq T_n)$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tau > s | \tau \leq T_{k+1}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\tau > s | \tau \leq T_k) \mathbb{P}(\tau \leq T_k) + \mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})}{\mathbb{P}(\tau \leq T_{k+1})} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\tau > s | \tau \leq T_0) = 0$$

Stratégie de résolution

Deux quantités à calculer

- ▶ $\mathbb{P}(\tau \leq T_k)$
- ▶ $\mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})$

Stratégie

Stratégie de résolution

Deux quantités à calculer

- ▶ $\mathbb{P}(\tau \leq T_k)$
- ▶ $\mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})$

Stratégie

- ▶ faire apparaître la chaîne de Markov (Z_n, T_n)

Stratégie de résolution

Deux quantités à calculer

- ▶ $\mathbb{P}(\tau \leq T_k) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{U^c}(Z_k)]$
- ▶ $\mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})$
 $= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_k + u^*(Z_k) \wedge T_{k+1} > s\}} \mathbb{1}_U(Z_k) \mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1})]$

Stratégie

- ▶ faire apparaître la chaîne de Markov (Z_n, T_n)

Stratégie de résolution

Deux quantités à calculer

- ▶ $\mathbb{P}(\tau \leq T_k) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{U^c}(Z_k)]$
- ▶ $\mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})$
 $= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_k + u^*(Z_k) \wedge T_{k+1} > s\}} \mathbb{1}_U(Z_k) \mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1})]$

Stratégie

- ▶ faire apparaître la chaîne de Markov (Z_n, T_n)
- ▶ Discrétiser la chaîne de Markov (Z_n, T_n)

Plan de l'exposé

PDMP : notations et exemples

Arrêt optimal

Utilisation en statistique

Loi d'un temps de sortie

Résultats

Conclusion

Mise en œuvre de notre stratégie

- ▶ Remplacer (Z_n, T_n) par son approximation **quantifiée** (\hat{Z}_n, \hat{T}_n)
- ▶ Prouver la convergence de la méthode sous des hypothèses Lipschitz [Brandejsky, dS, Dufour 2012]

Points difficiles

- ▶ si $Z_k \in U$, on n'a pas forcément $\hat{Z}_k \in U \implies$ hypothèse de **convexité** sur U
- ▶ besoin de contrôler la probabilité de sauter près de la frontière de U
- ▶ dénominateur dans la relation de récurrence

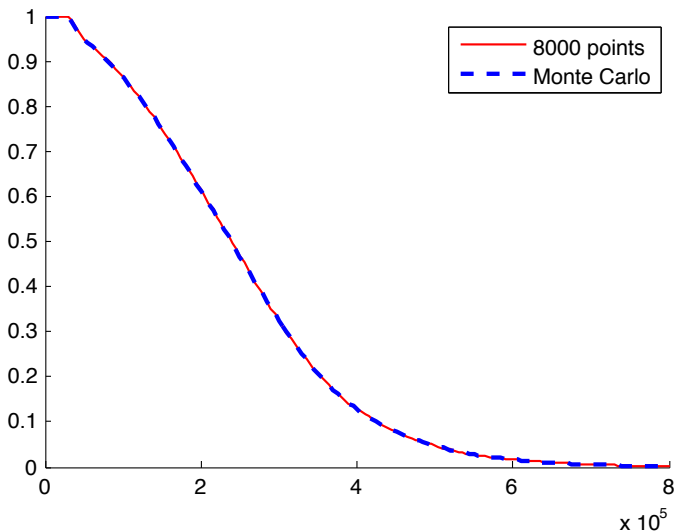
Résultats numériques : modèle de corrosion

$U = [0, 0.2]mm$, τ =durée de service de la structure

Grilles de quantification	max de l'erreur
20 points	0.1041
50 points	0.0664
100 points	0.0447
200 points	0.0335
500 points	0.0112
1000 points	0.0091
2000 points	0.0058
4000 points	0.0039
6000 points	0.0028
8000 points	0.0024
10000 points	0.0023

Résultats numériques : modèle de corrosion

$U = [0, 0.2]mm$, τ =durée de service de la structure



Conclusion et perspectives

Avantages et inconvénients des méthodes numériques

- ▶ méthode très générale, utilisable en **pratique**, avec des démonstrations théoriques de convergence sous des hypothèses de régularité Lipschitz
- ▶ temps de calcul on line/off line
- ▶ dimension

Perspectives

- ▶ Contrôler les sauts pour estimer l'intensité **en cours**, avec **Romain Azaïs et Nathalie Krell**
- ▶ Détection de rupture pour PDMP sous observation partielle et bruitée **en cours**, avec **Alice Cleynen**