HAL open science

Etude de la répulsion des processus pixelliques déterminantaux

Agnès Desolneux, Bruno Galerne, Claire Launay

To cite this version:

Agnès Desolneux, Bruno Galerne, Claire Launay. Etude de la répulsion des processus pixelliques déterminantaux. GRETSI 2017, Sep 2017, Juan les pins, France. hal-01548767v2

HAL Id: hal-01548767

https://hal.science/hal-01548767v2

Submitted on 12 Jul 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Etude de la répulsion des processus pixelliques déterminantaux

Agnès DESOLNEUX[1], Bruno GALERNE[2], Claire LAUNAY[2]

[1]CMLA, ENS Cachan, CNRS, Université Paris-Saclay,
61 Avenue du Président Wilson, 94230 Cachan, France

[2]Laboratoire MAP5 (UMR CNRS 8145), Université Paris Descartes, Sorbonne Paris Cité
45 rue des Saints Pères, 75006, Paris, France

agnes.desolneux@cmla.ens-cachan.fr, {bruno.galerne,claire.launay}@parisdescartes.fr

Résumé – Dans cet article, nous étudions une adaptation des processus ponctuels déterminantaux au cadre des pixels d'une image. Il s'agit d'un cadre 2D discret, stationnaire et périodique. Nous nous intéressons en particulier aux propriétés de répulsion d'un tel processus. Nous étudions d'abord la répulsion totale, puis en utilisant le modèle shot noise, nous caractérisons les cas de répulsion maximale et minimale de ces processus pixelliques déterminantaux.

Abstract – In this paper, we study an adaptation of determinantal point processes to the framework of image pixels. It is then a 2D discrete, stationary and periodic framework. We will be mainly interested in the repulsion properties of such a process. We start with a study of hardcore repulsion, and then, using the shot noise model, we characterize the maximal and minimal repulsion cases of these determinantal pixel processes.

1 Introduction

Les processus ponctuels déterminantaux (PPD) permettent de modéliser le caractère répulsif de certains ensembles de points. Ils assignent une probabilité d'occurrence plus grande aux ensembles de points éloignés les uns des autres. Par rapport aux modèles de Gibbs [1], ces processus ont l'avantage d'être entièrement déterminés par leur noyau, une matrice mesurant la similarité entre les points de l'ensemble, et leurs moments sont tous connus. De plus, il existe un algorithme de simulation spectrale [4] qui permet de simuler n'importe quel PPD de manière exacte.

Les processus ponctuels sont régulièrement utilisés en traitement d'images, par exemple pour la synthèse de texture reposant sur un modèle shot noise basé sur un processus de Poisson [3, 6]. De part leur caractère répulsif, les PPD peuvent fournir une alternative intéressante pour ces applications. On appelle donc processus pixelliques déterminantaux (PPixD) un PPD discret et stationnaire défini sur une grille 2D.

Après avoir défini formellement les PPixD, nous étudions la possibilité d'une répulsion totale, ou le fait de parvenir à imposer une distance minimale entre chaque point du processus. Enfin, nous utilisons la théorie existante autour du modèle shot noise pour caractériser les PPixD de répulsion maximale et minimale.

2 Processus pixelliques déterminantaux

Le cadre général des processus déterminantaux discrets est le suivant : soit Ω un ensemble contenant n éléments, et soit une matrice K, hermitienne positive de taille $n \times n$. Un PPD X de noyau K est défini sur Ω par $\mathbb{P}(A \subset X) = \det(K_A)$, où K_A est la matrice $(K_{x,y})_{x,y\in A}$. Un tel processus est bien défini lorsque les valeurs propres de K sont dans $[0, 1]$ [4]. Pour un tel processus, on a en particulier

$$\mathbb{P}(\{x, y\} \subset X) = \det(K_{x,y}) = K_{x,x}K_{y,y} - |K_{x,y}|^2.$$

Ainsi, plus $|K_{x,y}|$ est grand, plus la probabilité pour x et y d'être échantillonnés simultanément est faible.

Pour adapter les PPD au cadre des pixels d'une image, nous nous plaçons dans un cadre spécifique : $\Omega = \{0, ..., M-1\} \times \{0, ..., N-1\}$ est une grille 2D finie, et nous considérons des PPD stationnaires et périodiques sur cette grille. Par stationarité, la corrélation entre deux points x et y dépend uniquement de la différence $x - y$. Le noyau K devient une matrice circulante par blocs, entièrement définie par sa première ligne. On peut donc poser une fonction de corrélation $C : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $K_{x,y} = C(x - y), \forall x, y \in \Omega$. Elle détermine K et donc le PPD associé. Par ailleurs, les matrices circulantes sont diagonalisables par la matrice de passage de la base canonique à la base de Fourier. Les valeurs propres de K sont donc les coefficients de Fourier de C où la transformée de Fourier discrète d'une fonction $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, est définie par $\forall \xi \in \Omega, \widehat{f}(\xi) = \sum_{x\in\Omega} f(x)e^{-2i\pi\langle x,\xi\rangle}$, avec $\langle x, \xi\rangle = \frac{x_1\xi_1}{M} + \frac{x_2\xi_2}{N}$.

On peut donc définir dans ce nouveau cadre les PPD associés à la fonction de corrélation C, appelés PPixD.

Definition 2.1 (PPixD stationnaire)**.** *Soit $C : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur Ω, telle que*

$$\forall \xi \in \Omega, \ \ \widehat{C}(\xi) \text{ est réel et } 0 \leq \widehat{C}(\xi) \leq 1. \tag{1}$$

Une telle fonction sera appelée un noyau admissible. Un sous-ensemble aléatoire X de Ω est appelé processus pixellique déterminantal (stationnaire) de noyau C et noté $X \sim \mathrm{PPixD}(C)$ si

$$\forall A \subset \Omega, \ \ \mathbb{P}(A \subset X) = \det(K_A),$$

où $K_A = (C(x-y))_{x,y \in A}$ est de taille $|A| \times |A|$.

On peut remarquer que si, pour $\tau \in \Omega$, on définit le noyau C_τ tel que $\forall \xi \in \Omega, \widehat{C}_\tau(\xi) = \widehat{C}(\xi + \tau)$, alors les processus $\mathrm{PPixD}(C_\tau)$ et $\mathrm{PPixD}(C)$ sont égaux.

Proposition 2.1. *Un tel processus est bien défini. Le nombre $|X|$ de points de X est distribué comme $\sum_{\xi \in \Omega} B_\xi$, où les B_ξ sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $\widehat{C}(\xi)$. En particulier, $\mathbb{E}(|X|) = \sum_{\xi \in \Omega} \widehat{C}(\xi) = |\Omega| C(0)$ et $\mathrm{Var}(|X|) = \sum_{\xi \in \Omega} \widehat{C}(\xi)(1 - \widehat{C}(\xi))$.*

Proposition 2.2 (Séparabilité)**.** *Soient C_1 et C_2 deux noyaux discrets, de dimension 1, stationnaires, respectivement définis sur $\{0, ..., M-1\}$ et $\{0, ..., N-1\}$, vérifiant l'équation* (1) *(pour la transformée de Fourier 1D). Alors le processus défini sur Ω par le noyau C donné par $\forall x = (x_1, x_2) \in \Omega, C(x) = C_1(x_1)C_2(x_2)$, est un PPixD.*

Prenons les exemples de deux PPixD particuliers. Le premier est le processus de Bernoulli. Il correspond à l'analogue discret du processus de Poisson : les points sont tirés de manière indépendante les uns des autres et selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Ce processus est bien un PPixD, de noyau $C = p\delta_0$ (Dirac en 0), avec $\forall \xi \in \Omega, \widehat{C}(\xi) = p \in [0, 1]$.

Les PPixD dits de projection, eux, sont définis par un noyau C vérifiant $\forall \xi \in \Omega, \widehat{C}(\xi)(1 - \widehat{C}(\xi)) = 0$. Ainsi, d'après la Proposition 2.1, la cardinalité des PPixD de projection est fixe et égale au nombre de coefficients de Fourier non nuls de C.

La Figure 1 présente deux réalisations de ces exemples, simulées à partir de l'algorithme présenté par Kulesza et Taskar [5]. Cet algorithme repose sur une décomposition spectrale de K. Or dans notre cadre discret, stationnaire et périodique, K est diagonalisable par la matrice de la FFT. Cela permet une simulation exacte avec un faible temps de calcul, ce qui est un atout important des PPixD par rapport aux processus de Gibbs.

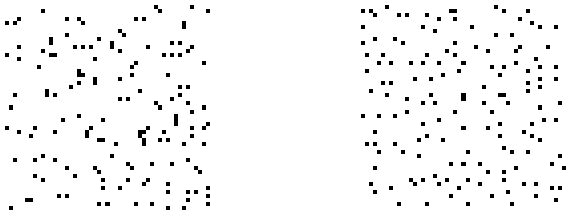

FIGURE 1 – Comparaison entre les simulations de 148 points suivant un processus de Bernoulli (gauche) et un PPixD de projection (droite) de noyau C tel que $\widehat{C}$ est l'indicatrice d'un disque discret de surface 148 pixels.

3 Étude d'une répulsion totale

Les processus de Gibbs sont un autre modèle de processus ponctuels pouvant présenter de la répulsion et même de la répulsion totale : il est possible d'imposer une distance minimale entre deux points du processus. Comme Biscio et Lavancier dans [2], nous nous intéressons ici à la question de la répulsion dans les PPixD, en commençant par la répulsion totale entre paires de points. Plus précisément, si $x \in \Omega$ et $e \in \Omega$ (typiquement $e = (1, 0)$ ou $(0, 1)$), peut-on interdire la possibilité que x et $x + e$ fassent simultanément partie de l'échantillon ?

Proposition 3.1. *Soit $X \sim \mathrm{PPixD}(C)$ sur Ω et $e \in \Omega$. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *La probabilité que x et $x + e$ soient simultanément dans X est nulle.*
2. *Les seuls ξ tels que $\widehat{C}(\xi)$ est non nul sont sur une droite discrète d'équation $\langle e, \xi \rangle$= constante.*
3. *X contient presque sûrement au plus un point sur chaque droite de direction e.*

De plus, interdire une paire de points suivant e est équivalent à interdire une paire de points suivant λe pour tout λ réel tel que $\lambda e \in \Omega$. On parle alors de répulsion directionnelle.

Démonstration. Soit X un PPixD défini sur Ω tel que pour tout $x \in \Omega$, $\mathbb{P}\big(\{x, x+e\} \subset X\big) = 0$. Or, $\forall x \in \Omega$, $\mathbb{P}\big(\{x, x+e\} \subset X\big) = C(0)^2 - |C(e)|^2$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|C(e)| = \left| \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\xi \in \Omega} \widehat{C}(\xi) e^{2i\pi \langle e, \xi \rangle} \right| \leq \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\xi \in \Omega} \widehat{C}(\xi) = C(0).$$

On a égalité si et seulement si les éléments non nuls de la première somme ont le même argument. Ainsi, $\mathbb{P}\big(\{x, x+e\} \subset X\big) = 0$ ssi $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \xi \in \Omega$, soit $\widehat{C}(\xi) = 0$, soit $\langle e, \xi \rangle = \theta$. On interdit une certaine configuration de paire de points selon e si et seulement si tous les coefficients de Fourier non-nuls de C sont alignés dans la direction orthogonale à celle de e. Or, soit λ, un réel tel que $\lambda e \in \Omega$, on a aussi $\mathbb{P}\big(\{x, x+e\} \subset X\big) = 0$ ssi $\exists\ \theta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \xi \in \Omega$, soit $\widehat{C}(\xi) = 0$, soit $\langle \lambda e, \xi \rangle = \theta$, qui est toujours l'équation d'une droite orthogonale à e. Ainsi, pour tout $e \in \Omega$, les coefficients de Fourier non nuls de C sont alignés sur une droite orthogonale à e si et seulement si la présence d'un pixel x dans la réalisation interdit celle du pixel $x + \lambda e$, $\forall \lambda$ réel tel que $\lambda e \in \Omega$: tous les points dans la direction e sont alors interdits. L'alignement des coefficients de Fourier non nuls de C sur une droite de direction orthogonale à e est donc équivalent à une répulsion totale dans la direction e. □

Dès qu'on interdit une configuration de paire de points, on interdit la direction toute entière de cette configuration. Comme imposer une distance minimale entre les points d'un PPixD est équivalent à interdire des configurations de paire de points dans

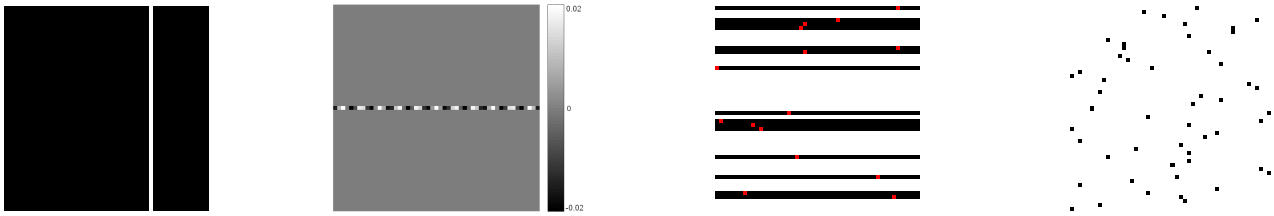

FIGURE 2 – Exemple d'un noyau de répulsion totale dans la direction horizontale. De gauche à droite : les coefficients de Fourier du noyau C, la partie réelle du noyau C lui-même, une capture de la densité au moment de la simulation, la réalisation finale.

toutes les directions, on peut en déduire que le seul PPixD imposant une distance minimale entre les points est le PPixD dégénéré, constitué d'un seul pixel.

Proposition 3.2. *Soit $X \sim \mathrm{PPixD}(C)$ vérifiant la proposition 3.1, avec $e = (0,1)$. Alors le noyau de ce PPixD est séparable au sens de la Proposition 2.2. De plus, le processus des ordonnées est un* PPixD *de dimension 1 et conditionnellement aux ordonnées tirées, le processus des abscisses est indépendant et uniforme.*

La Figure 2 illustre cette propriété : les coefficients de Fourier non nuls du noyau sont alignés dans la direction verticale. La troisième figure représente une capture de la simulation en cours de ce PPixD après 15 pixels déjà échantillonnés (en rouge). En chaque pixel, la probabilité qu'il soit le prochain point tiré est représenté par l'échelle de niveaux de gris : plus un pixel est clair, plus sa probabilité d'être le prochain point échantillonné est grande. On observe bien que dès qu'un pixel x est échantillonné, tous les pixels appartenant à la ligne horizontale passant par x ont une probabilité nulle d'être échantillonnés ensuite.

4 Modèles shot noise basés sur des PPixD

4.1 Définition et propriétés

On considère maintenant un modèle de shot noise discret basé sur un PPixD.

Definition 4.1 (Shot noise basé sur un PPixD)**.** *Soient C un noyau admissible, $X \sim \mathrm{PPixD}(C)$ et g une fonction définie sur Ω. Alors, le modèle shot noise S basé sur X et le spot g est défini $\forall x \in \Omega$ par $S(x) = \sum_{x_i \in X} g(x - x_i)$.*

Comme S est stationnaire, on a $\mathbb{E}(S(x)^k) = \mathbb{E}(S(0)^k)$ pour tous $x \in \Omega$ et $k \geq 1$. Par ailleurs, on définit $g_-(x) := g(-x)$ et la convolution telle que pour toutes fonctions $f, g : \Omega \mapsto \mathbb{C}$, $\forall x \in \Omega, f \star g(x) = \sum_{y \in \Omega} f(y) g(x-y)$.

Proposition 4.1 (Moments d'ordre 1 et 2)**.** *On a*

$$\mathbb{E}(S(0)) = C(0) \sum_{y \in \Omega} g(y).$$

Et $\forall x \in \Omega$,

$$\Gamma_S(x) := \mathrm{Cov}(S(0), S(x)) = C(0) g \star g_-(x) - (g \star g_- \star |C|^2)(x).$$

En particulier,

$$\mathrm{Var}(S(0)) = C(0) \sum_{y \in \Omega} g(y)^2 - (g \star g_- \star |C|^2)(0)$$

et $\widehat{\Gamma}_S(\xi) = |\widehat{g}(\xi)|^2 (C(0) - \widehat{|C|^2}(\xi))$.

4.2 Interactions entre le noyau et le spot

Pour la suite, on pose $n = |\Omega| = MN \in \mathbb{N}$. On note aussi $\mathcal{C}_m$ l'ensemble des noyaux admissibles tels que $C(0) = \frac{m}{n}$, où $m \in \mathbb{N}$ est le nombre de points attendu. Pour une fonction spot g fixée, nous cherchons les noyaux admissibles $C \in \mathcal{C}_m$ produisant un shot noise S de variance maximale et minimale. En effet, la valeur $\mathrm{Var}(S(0))$ quantifie la "répulsion au sens de g". Si $\mathrm{Var}(S(0))$ est faible, les valeurs prises par S sont proches de sa moyenne, et alors les points échantillonnés selon $\mathrm{PPixD}(C)$ sont éloignés les uns des autres au sens de g, i.e. la répulsion est maximale. Au contraire, si $\mathrm{Var}(S(0))$ est grande, cela signifie que S peut prendre des valeurs élevées, et donc avoir beaucoup de points dans un même voisinage défini par g.

Proposition 4.2. *Soient $g : \Omega \to \mathbb{R}^+$ et $m \in \mathbb{N}$ fixé.*
Répulsion minimale : La variance du shot noise S est maximale lorsqu'il est basé sur le PPixD de Bernoulli appartenant à $\mathcal{C}_m$.
Répulsion maximale : La variance de S est minimale lorsqu'il est basé sur le PPixD de projection de m points, tel que les m fréquences $\{\xi_1, ..., \xi_m\}$ des coefficients de Fourier non nuls de son noyau sont localisées pour maximiser

$$\sum_{\xi, \xi' \in \{\xi_1, ..., \xi_m\}} |\widehat{g}(\xi - \xi')|^2.$$

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé. On cherche ici $C \in \mathcal{C}_m$ qui maximise ou minimise

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S(0)) &= C(0) g \star g_-(0) - (g \star g_- \star |C|^2)(0) \\ &= \frac{m}{|\Omega|} \sum_{\xi} |\widehat{g}(\xi)|^2 - \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\xi, \xi'} |\widehat{g}(\xi - \xi')|^2 \widehat{C}(\xi) \widehat{C}(\xi').\end{aligned}$$

La question est équivalente à chercher $C \in \mathcal{C}_m$ qui minimise ou maximise $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où $F(\widehat{C}) = \sum_{\xi, \xi'} |\widehat{g}(\xi - \xi')|^2 \widehat{C}(\xi) \widehat{C}(\xi')$.

Répulsion minimale : Pour minimiser F, définissons le produit scalaire associé à g par : $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$,

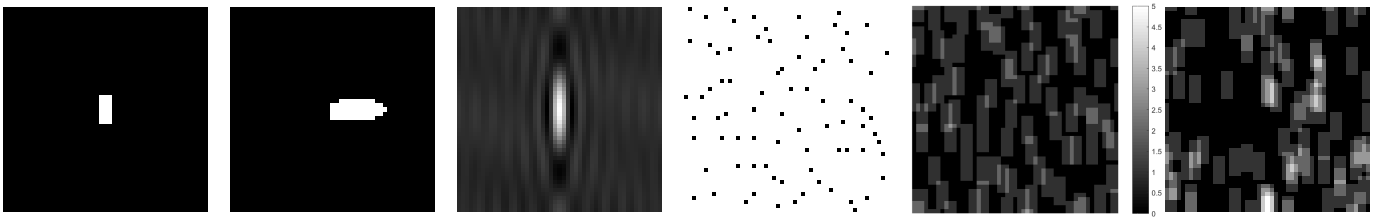

FIGURE 3 – Simulation du shot noise dirigé par la fonction indicatrice d'un rectangle comme spot et le PPixD le plus répulsif adapté à ce spot. De gauche à droite : la fonction spot, les coefficients de Fourier obtenus par l'algorithme glouton, le noyau C associé, une réalisation de ce PPixD, puis une réalisation du shot noise associé et d'un shot noise poissonnien, ayant tous les deux la même espérance du nombre de points (m = 80).

$\langle v, w\rangle_g = \sum_{\xi,\xi'\in\Omega} |\widehat{g}(\xi-\xi')|^2 v_\xi w_{\xi'} = v^T G w$ où G est la matrice de taille $n \times n$ telle que $G = (\,|\widehat{g}(\xi-\xi')|^2)_{\xi,\xi'\in\Omega}$. On peut vérifier que ce produit scalaire est bien défini. Remarquons que G est donc symétrique définie positive et F strictement convexe. Nous cherchons à minimiser une fonction strictement convexe sur l'ensemble $\mathcal{C}_m$ convexe, avec un ensemble de contraintes linéaires : le problème admet une unique solution.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on sait que $\forall v, w \in \mathbb{R}^n, |\langle v, w\rangle_g| \leq \|v\|_g \|w\|_g$. On choisit $v = \widehat{C}$, le vecteur des coefficients de Fourier d'un noyau $C \in \mathcal{C}_m$ et $w = \mathbf{1}$ ($= (1, 1, \ldots, 1)$ de taille n). On a $\|v\|_g^2 = F(\widehat{C})$ et
$\|w\|_g^2 = \sum_{\xi,\xi'} |\widehat{g}(\xi-\xi')|^2 = \sum_{\xi,\xi'} \widehat{g \star g_-}(\xi-\xi') = n\,(g \star g_-)(0)$.
Donc $\|v\|_g \|w\|_g = \sqrt{nF(\widehat{C})(g \star g_-)(0)}$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}|\langle v, w\rangle_g| &= \sum_{\xi,\xi'} |\widehat{g}(\xi-\xi')|^2 \widehat{C}(\xi) \\ &= \sum_{\xi} \widehat{C}(\xi) \sum_{\xi'} |\widehat{g}(\xi-\xi')|^2 = m\,n\,(g \star g_-)(0).\end{aligned}$$

Ainsi, $F(\widehat{C}) \geq m^2 n(g \star g_-)(0)$ et $F(\widehat{C})$ est minimale si et seulement si $\widehat{C}$ est proportionnel à w : nécéssairement, $\forall \xi \in \Omega$, $\widehat{C}(\xi) = \frac{m}{n}$, C est un processus ponctuel de Bernoulli. Ce noyau maximise la variance de tout shot noise S, indépendamment du spot g, c'est le PPixD le moins répulsif.

Répulsion minimale : On cherche maintenant le noyau C maximisant la fonction quadratique F sur l'ensemble convexe $\mathcal{C}_m$. Les solutions de ce système sont donc situées sur les bords de $\mathcal{C}_m$. En posant $\widehat{\mathcal{C}}^* = \{\underset{\widehat{C}}{\operatorname{argmax}}(F(\widehat{C}))\}$, on a $\forall \widehat{C}^* \in \widehat{\mathcal{C}}^*$,
$\sum_{\xi} \widehat{C}^*(\xi) = m$ et $\forall \xi \in \Omega$, $\widehat{C}^*(\xi)(1 - \widehat{C}^*(\xi)) = 0$.
Les solutions sont donc les noyaux de projection C^* avec exactement m fréquences $\{\xi_1, ..., \xi_m\} \subset \Omega$ telles que $\widehat{C}^*(\xi_i) = 1$ choisies telles que $\sum_{\xi,\xi'\in\{\xi_1,\ldots,\xi_m\}} |\widehat{g}(\xi-\xi')|^2$ est maximale. $\square$

Déterminer le noyau de répulsion maximale revient à maximiser une fonction quadratique, ce genre de problème est en général NP-difficile. En fait, on a vu que l'on doit résoudre un problème combinatoire. Pour tenter d'approcher la solution, il est possible d'utiliser un algorithme glouton : on choisit d'abord deux fréquences ξ_1, ξ_2 qui maximisent $|\widehat{g}(\xi_1 - \xi_2)|^2$ puis, de manière récursive, on choisit la k-ème fréquence ξ_k, $2 \leq k \leq m$, telle qu'elle maximise $\sum_{\xi\in\{\xi_1,\ldots,\xi_{k-1}\}} |\widehat{g}(\xi-\xi_k)|^2$. On peut observer les résultats cohérents de cet algorithme dans la Figure 3. Cette Figure montre qu'un PPixD de projection adapté à g permet bien d'obtenir des modèles de shot noise avec très peu de superpositions du spot. On sait, d'après la section 3, qu'il est impossible d'empêcher totalement les superpositions du spot.

En conclusion, la seule répulsion totale possible dans des PPixD est directionnelle. Malgré tout, en s'appuyant sur le modèle shot noise, il est possible de définir les PPixD les moins et les plus répulsifs, jusqu'à s'approcher au plus près d'une répulsion totale dans un voisinage. La suite des travaux porteront donc sur l'amélioration de l'algorithme de simulation de PPixD les plus répulsifs, et sur l'application de ces résultats à la synthèse de textures plus structurées ou localement orientées.

Références

[1] A. Baddeley, E. Rubak, and R. Turner. *Spatial Point Patterns : Methodology and Applications with R*. Chapman and Hall/CRC Press, London, 2015.

[2] C. Biscio and F. Lavancier. Quantifying repulsiveness of determinantal point processes. *Bernoulli*, (to appear), 2016.

[3] B. Galerne, Y. Gousseau, and J.-M. Morel. Random phase textures : Theory and synthesis. *IEEE Trans. Image Process.*, 20(1) :257 – 267, 2011.

[4] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres, and B. Virág. Determinantal processes and independence. *Probability Surveys*, pages 206–229, 2006.

[5] A. Kulesza and B. Taskar. Determinantal point processes for machine learning. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 5(2-3) :123–286, 2012.

[6] J. J. van Wijk. Spot noise texture synthesis for data visualization. In *SIGGRAPH '91*, pages 309–318, New York, NY, USA, 1991. ACM.

Projet soutenu par l'attribution d'une allocation de recherche Région Ile-de-France.