



**HAL**  
open science

## Analyse de taux de restitution d'énergie par un modèle simplifié pour un quadricouche en traction fissuré à l'interface entre 2 couches

Armelle Chabot, Sabine Cantournet, Alain Ehlacher

► **To cite this version:**

Armelle Chabot, Sabine Cantournet, Alain Ehlacher. Analyse de taux de restitution d'énergie par un modèle simplifié pour un quadricouche en traction fissuré à l'interface entre 2 couches. Comptes-rendus aux 12ème Journées Nationales sur les Composites (JNC12), ENS de Cachan, Nov 2000, Cachan, France. pp.775-784. hal-01545558

**HAL Id: hal-01545558**

**<https://hal.science/hal-01545558>**

Submitted on 27 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ANALYSE DE TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE PAR UN MODELE  
SIMPLIFIE POUR UN QUADRICOUCHE EN TRACTION FISSURE A  
L'INTERFACE ENTRE 2 COUCHES**

**ENERGY RELEASE RATE FOR  
A NEW SIMPLIFIED MODELISATION OF LAMINATES**

A. Chabot\*, S. Cantournet et A. Ehlacher\*\*

\*Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - Division Matériaux et structures de  
Chaussées - Point 66 - Route de Bouaye - BP 4129 - 44 341 Bouguenais Cedex  
e-mail : Armelle.Chabot@lcpc.fr

\*\*Ecole Nationale des Ponts et Chaussées – Laboratoire Analyse des Matériaux et  
Identification – 6 et 8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes – 77455 Marne-la-Vallée  
Cedex 2  
e-mail: Ehlacher@lami.enpc.fr

**RESUME**

Afin de pouvoir établir un critère d'initiation de délaminage pertinent pour une modélisation simplifiée dite multiparticulaire (Chabot, 97) (Chabot et Ehlacher, 98), nous proposons, dans cette première analyse (Cantournet, 99) (Chabot, 2000), de calculer quasi-analytiquement les taux de restitution d'énergie de multicouches composite  $(\theta_1, \theta_2)_s$  fissurés en traction. L'étude d'empilements particuliers montre (c'est démontrée dans le cas du  $(0^\circ, 90^\circ)_s$ ) que le taux de relaxation d'énergie  $G$  s'exprime vraisemblablement sous une forme linéaire quadratique du cisaillement en pointe de fissure. Par conséquent, pour cette modélisation, un critère d'initiation de délaminage de type  $G < G_c$  reviendrait à poser un critère de délaminage en contrainte maximum directement sur les efforts de cisaillement d'interface.

**ABSTRACT**

The aim of this paper is to establish a delamination criterion of laminates for a new simplified model (Chabot, 97) (Chabot et Ehlacher, 98). We calculate energy release rates using the example of tension in a cracked  $(\theta_1, \theta_2)_s$  composite laminate (Cantournet, 99) (Chabot, 00). In particular stacking sequence cases, we exhibit a quadratic relation between the energy release rate  $G$  and interfacial shear stresses  $\tau_\alpha^{i,i+1}$  ( $\alpha = 1, 2; i = 1, 4$ ) at the crack front. For this simplified model, a delamination criterion like  $G < G_c$  could be directly substituted for a criterion like  $\tau_\alpha^{i,i+1} < \tau_\alpha^{\max}$ .

**MOTS CLES : TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE - MODELES -  
STRATIFIES - MULTIPARTICULAIRE - DELAMINAGE - CRITERES**

**KEYWORDS : ENERGY RELEASE RATE - MODELS - LAMINATES -  
MULTIPARTICLE - DELAMINATION - CRITERION**

## INTRODUCTION

L'analyse de la progression de fissure à l'interface de deux matériaux élastiques linéaires dans le cadre d'un modèle classique 3D fait apparaître des singularités à exposants complexes. Ces exposants ne sont physiquement pas acceptables car ils impliquent une oscillation des lèvres de la fissure entraînant généralement une interpénétration de la matière au voisinage de la fissure (Leblond et Leguillon, 99). L'analyse thermodynamique du taux de relaxation d'énergie dans la progression de la fissure d'interface est donc parfois rendue difficile. Ce problème a une importance particulière à l'interface entre deux couches de structures multicouches que ce soit par exemple entre deux couches de matériaux composites, entre le béton et les matériaux composites dans les dalles en béton armé réparées ou encore dans l'analyse des propagations de fissures dans les structures de chaussées en béton.

Une description simplifiée de type plaque multiparticulaire pour les matériaux multicouches (Chabot, 97) est beaucoup plus grossière qu'une description 3D mais décrit correctement les densités surfaciques d'énergie élastique dans la structure. Les modélisations multiparticulaires sont construites à partir d'approximations polynomiales par couche suivant l'épaisseur des champs de contrainte 3D et de la formulation mixte d'Hellinger-Reissner (Reissner, 50). Les coefficients de ces polynômes sont reliés aux efforts généralisés classiques de plaque et, pour assurer la continuité des champs de contraintes aux interfaces, d'efforts d'interface (cisaillements et arrachement). Ces modèles multiparticulaires constituent une famille qui va d'un modèle à  $7n$  ( $n$  étant le nombre de couches) équations d'équilibre identique au modèle "local" de (Pagano, 78), à un modèle à  $2n+1$  équations d'équilibre qui est une généralisation du modèle classique Shear Lag Analysis et qui permet notamment de traiter des problèmes de flexion (Naciri et al., 98).

Afin de pouvoir établir un critère d'initiation de délaminage pertinent pour les modélisations multiparticulaires, nous proposons dans cette nouvelle étape de calculer quasi-analytiquement les taux de restitution d'énergie de structures fissurées. Ainsi si l'on introduit dans le multicouche une fissure à une interface, cela fait apparaître lors de la construction du modèle simplifié multiparticulaire une variable d'état qui va caractériser la présence de cette fissure et son ouverture. On peut alors déterminer un taux de relaxation d'énergie associé à la progression de la fissure d'interface.

Dans cette première analyse, nous effectuons un calcul de taux de restitution d'énergie à l'aide du modèle multiparticulaire le plus simplifié (en nombre de champs cinématique par couches) car il permet aisément des solutions analytiques (Chabot et Ehrlacher, 98). Ce modèle est le Modèle Multiparticulaire des Matériaux Multicouches à  $2n+1$  équations d'équilibre, noté  $(2n+1) M^4$ . Nous présentons dans un premier temps les équations du modèle.

L'application choisie est le calcul quasi-analytique du taux de restitution d'énergie d'un quadricouche composite rectangulaire  $(\theta_1, \theta_2)_s$  fissuré en traction (Cantournet, 99). Les résultats sur des cas particuliers semblent montrer ici qu'il existe une expression quadratique entre le taux de restitution d'énergie et le carré des cisaillements d'interface.

### Notations

Le multicouche dans le repère  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est parallèle au plan  $(x, y)$ . L'empilement des  $n$  couches se fait suivant l'axe des  $z$ . Chaque couche  $i$  ( $i \in [1, n]$ ) occupe le domaine

$\omega \times [h_i^-, h_i^+]$  ( $h_i^+ = h_{i+1}^-$ ), son épaisseur est  $e_i = h_i^+ - h_i^-$ , sa cote moyenne est  $\bar{h}_i = \frac{h_i^+ + h_i^-}{2}$ . Nous notons  $S_{ijklm}^i$   $i \in [1, n]$   $j, k, l, m \in [1, 3]^4$  les composantes du tenseur d'ordre 4 des souplesses du matériau de la couche  $i$ .  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta \in \{1, 2\}$ .  $T_3^-$  (respectivement  $T_3^+$ ) est la composante normale du vecteur contrainte imposé sur la face externe inférieure (respectivement supérieure) du multicouche. Nous supposons qu'il n'y a pas de forces de volumes et que l'hypothèse des petites perturbations est vérifiée.

### LES EQUATIONS DU MODELES (2N+1) M<sup>4</sup>

Le modèle à  $(2n+1)$  champs est construit (Chabot, 97) à partir d'un champ de contrainte 3D approché, simple, polynomial en  $z$  dont les coefficients en  $(x, y)$  ne sont reliés qu'aux efforts membranaires  $N_{\alpha\beta}^i(x, y)$  de chaque couche  $i$  et aux cisaillements  $\tau_{\alpha}^{i, i+1}(x, y)$  de chaque interface  $i, i+1$  tels qu'il soient respectivement définis ainsi pour:

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta}^i(x, y) &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz \quad i \in \{1, n\} \quad \alpha \in \{1, 2\} \\ \tau_{\alpha}^{i, i+1}(x, y) &= \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_i^+) = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_{i+1}^-) \quad i \in \{1, n-1\} \quad \alpha \in \{1, 2\} \end{aligned} \quad (1)$$

Ce champ de contrainte tridimensionnel approché est introduit dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner (Reissner, 50). On en déduit les  $2n+1$  déplacements généralisés du modèle. Ce sont les déplacements  $U_{\alpha}^i(x, y)$  dans le plan  $(x, y)$  de chaque couche  $i$  et un déplacement vertical commun à toutes les couches  $W_3(x, y)$ :

$$U_{\alpha}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{U_{\alpha}(x, y, z)}{e^i} dz; \quad W_3(x, y) = \frac{U_3(x, y, h_n^+) + U_3(x, y, h_1^-)}{2} \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad i \in \{1, n\} \quad (2)$$

Par stationnarité, la fonctionnelle donne les équations d'équilibre du modèle:

$$N_{\alpha\beta, \beta}^i(x, y) + \left( \tau_{\alpha}^{i, i+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{i-1, i}(x, y) \right) = 0 \quad \text{sur } \omega \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{e_j}{2} \left( \tau_{\alpha, \alpha}^{j-1, j}(x, y) + \tau_{\alpha, \alpha}^{j, j+1}(x, y) \right) \right] + \left( T_3^-(x, y) + T_3^+(x, y) \right) = 0 \quad \text{sur } \omega \quad (4)$$

avec pour conditions aux limites:

$$\tilde{N}^i \cdot \underline{n} = \tilde{T}_d^i \quad \left( \sum_{i=1}^n \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \underline{n} = Q_3^d \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_{\alpha}^d(x, y, z) dz \\ Q_{d3}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} T_3^d(x, y, z) dz \end{cases} \quad (5)$$

Dans l'énergie élastique écrite en contrainte, nous négligeons les termes en  $\tau_{\alpha,\alpha}^{i,i+1}$  et les énergies couplant les efforts membranaires aux contraintes perpendiculaires aux couches. Cette dernière hypothèse est habituelle dans la plupart des théories de plaque. Les comportements de couche  $i$ , associés aux efforts membranaires, et d'interface  $i,i+1$ , associés aux efforts de cisaillement hors plan s'écrivent:

$$\epsilon_{\alpha\beta}^i(x, y) = \frac{1}{2} (U_{\alpha,\beta}^i(x, y) + U_{\beta,\alpha}^i(x, y)) = \frac{S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i}{e^i} : N_{\gamma\delta}^i(x, y) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} D_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) &= \left( U_{\alpha}^{i,i+1}(x, y) - U_{\alpha}^i(x, y) + \frac{e^i + e^{i+1}}{2} W_{3,\alpha}(x, y) \right) \\ &= \left( \frac{e^i}{6} \right) 4S_{\alpha\beta\gamma}^i \tau_{\beta}^{i-1,i}(x, y) + \frac{1}{3} \left( e^i 4S_{\alpha\beta\gamma}^i + e^{i+1} 4S_{\alpha\beta\gamma}^{i+1} \right) \tau_{\beta}^{i,i+1}(x, y) \\ &\quad + \left( \frac{e^{i+1}}{6} \right) 4S_{\alpha\beta\gamma}^{i+1} \tau_{\beta}^{i+1,i+2}(x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

Ce modèle apparaît très similaire au modèle Shear Lag Analysis excepté le fait que la cinématique est définie à l'aide de  $2n+1$  champs (2) (le modèle prend en compte la flèche globale  $W_3$  du multicouche). De plus, le "comportement d'interface" (7) couple trois interfaces consécutives. Sur le cas simple de laminé  $(0^\circ, 90^\circ)_s$  en traction, le modèle  $(2n+1) M^4$  fait apparaître un effort concentré au bord de type Dirac (Chabot, 97).

#### **CALCUL DU TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE DANS UN QUADRICOUCHE $(\theta_1, \theta_2)_s$ FISSURE**

Nous proposons ici d'utiliser le modèle  $(2n+1) M^4$  pour le calcul du taux de restitution d'énergie d'un quadricouche  $(\theta_1, \theta_2)_s$  en traction dans lequel on a soit des fissures de longueur  $a$  à l'interface  $\theta_1/\theta_2$  (cas 4 fissures, Fig. 1a) soit des fissures de longueur  $a$  à l'interface  $\theta_2/\theta_2$  (cas 2 fissures, Fig. 1b) (Cantournet, 99).

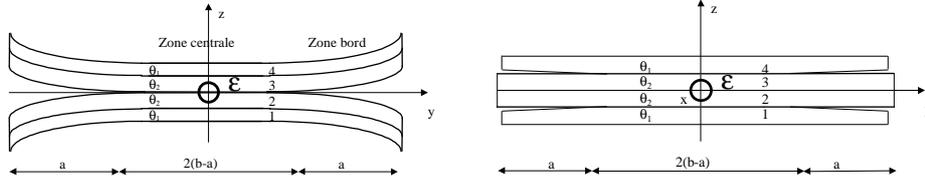


Figure 1: Plaques  $(\theta_1, \theta_2)_s$  en traction délaminiées  
à l'interface  $\theta_2/\theta_2$  (Fig 1a: 2 fissures) et à l'interface  $\theta_1/\theta_2$  (cas Fig 1b: 4 fissures)  
*Delamination of a  $(\theta_1, \theta_2)_s$  laminate*  
*at interface  $\theta_2/\theta_2$  (Fig 1a: 2 cracks) and at interface  $\theta_1/\theta_2$  (Fig 1b: 4 cracks)*

On suppose que l'éprouvette est de largeur  $2b$  suivant l'axe des  $y$ , de longueur  $2L$  suivant l'axe des  $x$  et que chaque couche possède une même épaisseur  $e$ . L'éprouvette est soumise à un déplacement suivant l'axe des  $x$  de valeur  $\epsilon L$  en  $x = L$  et  $-\epsilon L$  en  $x = -L$ . Les autres bords sont libres. En supposant l'invariance par translation des champs suivant l'axe des  $x$  nous pouvons exprimer les déplacements généralisés et les efforts généralisés ainsi:

$$\tilde{U}^i(x, y) = \begin{cases} u^i(x, y) = \epsilon x \\ v^i(x, y) = v^i(y) \end{cases} \quad N_{\alpha\beta}^i(x, y) = N_{\alpha\beta}^i(y) \quad (\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2 \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

$$W_3(x, y) = w(y) \quad \tau_{\alpha}^{1,2}(x, y) = \tau_{\alpha}^{1,2}(y)$$

On note respectivement  $E_L$  et  $E_T$  les modules d'Young longitudinaux et transversaux d'une couche  $i$  supposée orthotrope,  $\nu_{LT}$  le coefficient de Poisson liant ces deux modules,  $G_{LT}$  le module de cisaillement dans le plan et  $G_{LN}$   $G_{TN}$  les modules de cisaillement hors plan.

La résolution des deux problèmes précédents est assez simple et peut être menée analytiquement. Dans chacun des deux problèmes, nous décomposons en une zone centrale non fissurée dont la longueur est  $2(b-a)$  et deux zones bords fissurées, chacune de longueur  $a$ . Posons :

$$X^i = N_{12}^i(b-a) \quad \text{et} \quad Y^i = N_{22}^i(b-a) \quad i = 1, 4 \quad (9)$$

La symétrie du problème par rapport à l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$  impose:

$$\sum_{i=1}^4 \left[ \frac{e}{2} (\tau_2^{i-1,i}(x, y) + \tau_2^{i,i+1}(x, y)) \right] = 0 \quad (10)$$

La zone centrale peut alors être considérée comme un multicouche de longueur  $2(b-a)$  non fissuré avec les conditions aux limites en déplacement en  $x = -L$  et  $x = L$  et le chargement en contrainte exprimé à l'aide de  $X^i$  et  $Y^i$  sur les bords  $y = \pm(b-a)$ .

Les champs dans la zone centrale s'expriment facilement à l'aide de  $X^i$  et  $Y^i$ . En particulier, nous aurons le champ de déplacement  $w$  nul par raison de symétrie.

Les zones bord peuvent être considérées comme la réunion d'empilements non fissurés (empilements différents dans le cas à 2 ou à 4 fissures). Pour chaque partie non fissurée de la zone bord, les conditions aux limites sont connues en fonction des paramètres  $X^i$  et  $Y^i$  (par exemple dans la partie  $[b-a, b]$ , bords libres en  $z = b$ , déplacement donné en  $x \pm L$ , vecteur contrainte en fonction de  $X^i$  et  $Y^i$  en  $y = (b-a)$ ).

Les champs dans les zones bord s'expriment donc facilement en fonction de  $X^i$  et  $Y^i$  et d'une constante d'intégration sur  $w(y)$ .

Les conditions de raccordement en  $y = \pm(b-a)$  sont la continuité du vecteur contrainte déjà imposée par les conditions aux limites en contrainte pour les deux zones exprimées à l'aide de  $X^i$  et  $Y^i$  et la continuité des déplacements.

$$\begin{cases} u_c^i(b-a) = u_b^i(b-a) \\ v_c^i(b-a) = v_b^i(b-a) \quad i = 1,4 \\ w_c(b-a) = w_b(b-a) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

où les l'indices "c" et "b" sont respectivement mis pour indiquer la valeur limite des champs à partir de la zone centrale et des zones bords (en  $y = -(b-a)$  les conditions aux limites sont bien sûr équivalentes).

Les équations (11) permettent de calculer  $X^i$  et  $Y^i$  et la constante d'intégration de  $w(y)$  dans la zone bord. Ainsi les champs dans les deux problèmes sont connus quasi-analytiquement (établis à l'aide d'un logiciel formel).

L'énergie élastique de la structure est égale à l'énergie potentielle  $W$ , car on impose un déplacement donné ou une contrainte nulle sur la frontière. Ainsi l'énergie potentielle est égale au travail des efforts extérieurs. Soit:

$$W = 2 \sum_{i=1-b}^4 \int_0^b (N_{11}^i(y) \varepsilon L + N_{12}^i(y) v^i(y)) dy \quad (12)$$

$W$  est donc connue sous forme paramétrée par  $a$ , la longueur des fissures. Le taux de relaxation d'énergie pour chaque fissure est alors donné par:

$$G = -\frac{\partial W}{pL \partial a} \quad \text{où } p \text{ est le nombre de fissures } (p = 2 \text{ ou } 4) \quad (13)$$

### ANALYSE DANS LE CAS PARTICULIER $(0^\circ, 90^\circ)_s$

Dans le cas particulier du  $(0^\circ, 90^\circ)_s$ , les champs solutions ont une forme très simple. Par exemple, dans le cas de deux fissures, le cisaillement à l'interface 1,2 vaut

zéro dans la partie délaminée et (14) dans la partie non délaminée (dans le  $(2n+1)M^4$ , les cisaillements d'interface peuvent être discontinus).

$$\tau_{c_2}^{1,2}(y) = \frac{3}{e} \varepsilon (v_{LT} - v_{TL}) \left( \frac{G_{LN} G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}} \right) \frac{\text{sh} \lambda y}{\lambda \text{ch} \lambda (b-a)} \quad (14)$$

Le calcul des taux de relaxation d'énergie peut être fait analytiquement. On trouve (Chabot, 00):

$$G^{2\text{fis}} = e \varepsilon^2 \frac{(v_{LT} - v_{TL})^2}{1 - v_{LT} v_{TL}} \left( \frac{E_T E_L}{E_T + E_L} \right) [\text{th} \lambda (b-a)]^2 \quad (15)$$

$$\text{avec } \lambda^2 = 3 \frac{(1 - v_{LT} v_{TL})}{e^2} \left( \frac{E_T + E_L}{E_T E_L} \right) \left( \frac{G_{LN} G_{TN}}{G_{LN} + G_{TN}} \right)$$

$$G^{4\text{fis}} = \frac{e \varepsilon^2}{2} \left[ (E_L - E_T) + \frac{(v_{LT} - v_{TL})^2}{1 - v_{LT} v_{TL}} \left( \frac{E_T E_L}{E_T + E_L} \right) [\text{th} \lambda (b-a)]^2 \right] \quad (16)$$

Plaçons nous maintenant dans le cas de deux fissures. Notons  $\tau_{yz}$  la valeur du cisaillement à l'interface  $0^\circ/90^\circ$  du coté partie centrale non délaminée (c'est à dire  $\tau_{c_2}^{1,2}(b-a)$ ). La solution du problème élastique montre que (Chabot, 97)  $w'(y)$  est discontinu en  $y = b - a$  aux interfaces voisines de l'interface délaminée. C'est à dire que dans le modèle, les deux lèvres délaminées font un angle non nul valant deux fois la discontinuité de  $w'(y)$  donnée en (17).

$$w_b'(b-a) - w_c'(b-a) = w_b'(b-a) = \frac{1}{3} \frac{G_{LN} + G_{TN}}{G_{LN} G_{TN}} \tau_{yz} \quad (17)$$

On peut montrer, soit directement, soit en utilisant une méthode de refermeture de fissure (Bui, 78) pour le calcul de  $G$  à partir des champs au voisinage de l'extrémité de fissure, que:

$$G^{2\text{fis}} = \frac{e}{3} \left( \frac{G_{LN} + G_{TN}}{G_{LN} G_{TN}} \right) \tau_{yz}^2 \quad (18)$$

Ainsi un critère de délaminage entre les couches à  $90^\circ$  du type  $G = G_c$  revient à écrire un critère en cisaillement maximal entre les couches à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . Ce résultat qui relie la rupture entre les couches à  $90^\circ$  à l'état de contrainte entre les couches à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  n'est qu'apparemment paradoxal. En effet, nous avons montré dans (Chabot, 97) que l'effort d'arrachement entre les couches à  $90^\circ$  au niveau de l'extrémité de la fissure est singulier et correspond à une force linéique de type dirac d'arrachement d'intensité  $v_{\delta}^{2,3}$  dont la valeur est reliée, par l'équilibre, à la discontinuité de cisaillement aux interfaces voisines tel que l'on ait:

$$v_{\delta}^{2,3} = e \tau_{yz} \quad (19)$$

Le sens physique du critère porte donc plutôt sur l'intensité de l'effort linéique d'arrachement  $v_{\delta}^{2,3}$  entre les couches à  $90^{\circ}$ . Notons le lien très clair entre un critère portant sur  $v_{\delta}^{2,3}$  et le critère de délaminage le plus couramment utilisé dans la littérature qui porte sur l'intégrale de l'effort d'arrachement à l'interface calculé dans des modèles plus fins de type modélisation 3D (Whitney et Nuismer, 74) (Kim et Soni, 84).

### RESULTATS POUR DES EMPILEMENTS $(\theta, -\theta)_s$ ET $(\theta - 90, \theta)_s$

Pour ces empilements particuliers, le cisaillement prédominant est  $\tau_1^{1,2}$  (il est d'ailleurs nul dans le cas particulier  $(\theta, -\theta)_s$ ) (Chabot, 97). Nous reportons dans les courbes ci-dessous (Fig. 2 et 3), les résultats, normalisés par leur valeur maximum, du taux de restitution obtenu quasi-analytiquement par MATHEMATICA® et du carré du cisaillement prépondérant pour un multicouche en traction fissuré à l'interface 1,2 .

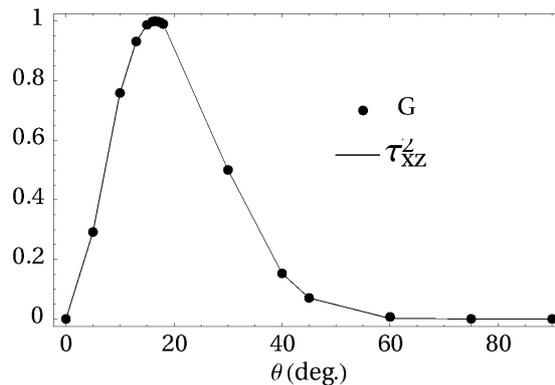


Figure 2: Comparaison entre le taux de restitution d'énergie  $G$  d'une plaque  $(\theta, -\theta)_s$  en traction délaminée à l'interface  $\theta/-\theta$  et le carré de la valeur au bord de la contrainte

$$\tau_{xz} = \tau_1^{1,2}(b-a)$$

Comparison between the energy release rate  $G$  of a cracked  $(\theta, -\theta)_s$  elastic laminate

$$\text{and the square of the interfacial shear stress } \tau_{xz} = \tau_1^{1,2}(b-a)$$

Dans le cas d'un empilement  $(\theta, -\theta)_s$  (Fig. 2), il semble possible de conjecturer une relation analytique de proportionnalité entre le taux de restitution d'énergie et le carré du cisaillement d'interface  $\tau_{xz}$ .

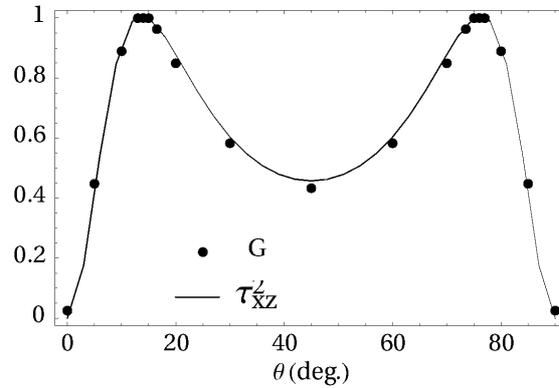


Figure 3: Comparaison entre le taux de restitution d'énergie  $G$  d'une plaque  $(\theta - 90, \theta)_s$  en traction délaminiée à l'interface  $\theta - 90^\circ / \theta$  et le carré de la valeur au bord de la contrainte  $\tau_{xz} = \tau_1^{1,2}(b - a)$  d'une plaque en traction de largeur  $2(b - a)$   
*Comparison between the energy release rate  $G$  of a cracked  $(\theta - 90, \theta)_s$  elastic laminate and the square of the interfacial shear stress  $\tau_{xz} = \tau_1^{1,2}(b - a)$*

L'étude de l'empilement  $(\theta - 90, \theta)_s$  (Fig. 3) est un peu plus complexe et les courbes comparatives obtenues nous permettent d'envisager une relation empirique reliant le taux de restitution d'énergie principalement en carré de  $\tau_{xz}$ . Pour le prouver et trouver les coefficients de proportionnalité comme dans le cas  $(0^\circ, 90^\circ)_s$ , un calcul classique de la mécanique de la rupture pour calculer le travail de refermeture de fissure pourrait être envisagée.

### CONCLUSION

Nous avons, dans ce travail, déterminé les taux de relaxation d'énergie, dans le cas de structures composites simples en traction, à l'aide du modèle multiparticulaire simplifié des matériaux multicouches noté  $(2n+1) M^4$ .

Nous avons obtenu dans le cas d'un empilement  $(0^\circ, 90^\circ)_s$  une relation explicite entre le taux de relaxation d'énergie et la valeur des champs de contrainte d'interface au niveau de l'extrémité de la fissure (en  $y = b - a$ ).

Dans les cas plus complexes, nous avons montré que le taux de relaxation d'énergie semble être principalement lié au carré du taux de cisaillement hors plan à l'extrémité de la fissure. Par conséquent un critère d'initiation de délaminage de type  $G < G_c$  reviendrait à poser un critère de délaminage en contrainte maximum fonction des contraintes prévues par le modèle simplifié au niveau de l'extrémité de fissure. Ce résultat semble confirmé expérimentalement par les travaux de (Caron et al., 99) dans le cas d'empilements  $(\pm 10_n)_s$  et  $(\pm 20_n)_s$ .

### BIBLIOGRAPHIE

- Bui H. D., 1978. *Mécanique de la rupture fragile*. Edition Masson, Paris.
- Cantournet S., 1999. "Taux de restitution d'énergie dans le délaminage des matériaux composites". *Mémoire de DEA de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)*.
- Caron J. F., Carreira R. P. et Diaz Diaz A., 1999. "Critère d'initiation de délaminage dans les stratifiés". *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences – Séries IIB -*, v. 327, no. 13, pp. 1291-1296.
- Chabot A., 1997, "Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches (M4)". *Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*.
- Chabot A. et Ehlacher A., 1998. "Modèles multiparticulaires des matériaux multicouches M4<sub>5n</sub> et M4<sub>(2n+1)M</sub> pour l'analyse des effets de bord". *Comptes rendus des JNC11*, pp. 1389-1397.
- Chabot A., 2000. "Calcul de taux de restitution d'énergie pour des quadricouches fissurés". *Support théorique de TD de "Rupture des composites" du DEA S3M de Paris VI*.
- Kim R. Y. et Soni S. R., 1984. "Experimental and Analytical Studies On the Onset of Delamination in Laminated Composites". *Journal of Composite Materials*, v. 18, pp. 70-80.
- Naciri T., Ehlacher A. et Chabot A., 1998. "Interlaminar Stress Analysis with a new Multiparticle Modelisation of Multilayered Materials (M4)". *Composites Sciences and Technology*, v. 58, no. 3, pp.337-343.
- Pagano N. J., 1978. "Stress fields in Composite Laminate". *Int. J. Solids Structures*, v. 14, pp. 385-400.
- Leblond J.-B. et Leguillon D., 1999. "The stress intensity factors near an angular point on the front of an interface crack". *European Journal of Mechanics – A/Solids*, v. 18, no. 5, pp. 837-857.
- Reissner E., 1950. "On a Variational Theorem in Elasticity". *J. Math. Phys.*, v. 29, pp. 90-95.
- Whitney J. M. et Nuismer R. J., 1974. "Stress Fracture Criteria for Laminated Composites Containing Stress Concentrations". *Journal of Composite Materials*, v. 8, pp. 253-265.