



**HAL**  
open science

## Classement en présence de critères multiples :

### SPARTE-II

Bernard Fustier

► **To cite this version:**

Bernard Fustier. Classement en présence de critères multiples : SPARTE-II. [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques ( IME). 1986, 30 p., figures, tableaux, bibliographie. hal-01544101

**HAL Id: hal-01544101**

**<https://hal.science/hal-01544101>**

Submitted on 21 Jun 2017

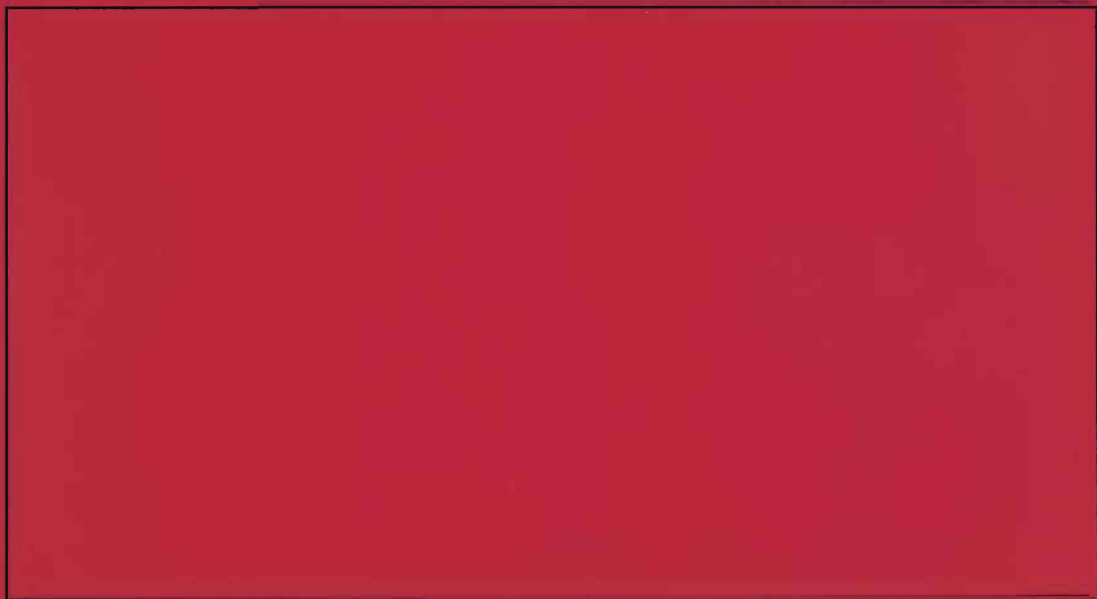
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# I.M.E.

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU C.N.R.S.

DOCUMENT DE TRAVAIL



**INSTITUT DE MATHEMATIQUES ECONOMIQUES**

UNIVERSITE DE DIJON

FACULTE DE SCIENCE ECONOMIQUE ET DE GESTION

4, BOULEVARD GABRIEL — 21000 DIJON

N° 87

Classement en présence de critères  
multiples : SPARTE-II

Bernard FUSTIER

Cette technique d'analyse multicritère a été discutée lors d'une réunion du groupe "espace" de DIJON. A cet effet, l'auteur remercie Monsieur Jean-Marie HURIOT, professeur à l'Université de Bourgogne, et Monsieur Henri ZOLLER, professeur à l'Université de Louvain pour leurs remarques et suggestions. La rédaction du présent document en a largement profité.

Sous cette forme, il a fait l'objet d'une communication à la table ronde : "Approche pluridisciplinaire de l'espace géographique soft" organisé par le Laboratoire de Géographie Théorique et Quantitative., Metz, 24-25 avril 1986.

- N° 81 G. CHARREAUX et J.P. PITOL-BELIN : La théorie contractuelle des organisations : une application au conseil d'administration (Novembre 1985)
- N° 82 C.S. BERTUGLIA, G. LEONARDI, R. TADEI : Dynamic analysis of transport - location interrelationships : theory and models. (November 1985)
- N° 83 PH. VINCKE : La modélisation des préférences (Décembre 1985)
- N° 84 Elie SADIGH : La dépense du profit et le dysfonctionnement du système économique (Janvier 1986)
- N° 85 Elie SADIGH : Réalisation de la rente et généralisation du surplus dans le système de Walras (Février 1986)
- N° 86 J.C. GARLANDIER, B. ROUGET : Influence économique et concurrence au sein d'une agglomération. Essai de mesure. (février 1986).

La liste récapitulative des Documents de Travail publiés depuis 1974 (numéros 1 à 80), mentionnant les références des "reprints" dans des revues, peut-être communiquée sur demande adressée à l'I.M.E.

The list of Working Papers published since 1974 (N° 1 to 80), and mentioning the reprints in their original or revised version is available and will be sent on request.

## INTRODUCTION

A l'instar d'autres modèles fondés sur les relations de surclassement, SPARTE-II est une technique d'aide à la décision [ROY, 1975].

La première version de SPARTE [FUSTIER, 1981] a fait l'objet d'applications diverses. Dans certains cas, le test de la solution théorique s'est avéré possible. En ce qui concerne, par exemple, l'analyse de la prescription médicale [FUSTIER, 1983], la sélection des médicaments les plus "performants" a été confirmée par une enquête réalisée auprès d'un échantillon de praticiens. Un autre exemple concerne la localisation d'un laboratoire d'analyses médicales en zone urbaine [BINZACK, 1983] la solution fournie a permis de prévoir avec une grande certitude le chiffre d'affaires réalisé par l'établissement l'année suivante.

Cependant, l'obtention de résultats acceptables ne saurait justifier l'attribution d'un label de qualité au modèle les ayant produit. Nous reconnaissons volontiers que cette première version fait, dans certains cas, usage de la propriété d'additivité alors que les concepts concernés par le calcul ne sont pas mesurables (au sens de la théorie de la mesure). En tout état de cause, cette "cuisine mathématique" n'est pas conforme à l'esprit de l'analyse multicritère [ANTOINE et ROY, 1969, BERTIER et de MONTGOLFIER 1971]. C'est pour pallier cet inconvénient théorique que SPARTE-II a été conçue.

x        x  
          x

Dans une première partie, on précise le type d'information que se propose d'appréhender la présente technique (classements d'objets établis par des critères de natures différentes).

La seconde partie de l'exposé pose la question suivante : comment assurer la synthèse des classements individuels en évitant le recours à l'agrégation des critères ? Les fondements de la relation de surclassement sont progressivement établis à partir d'exemples simples.

La définition et les propriétés de la relation de surclassement font l'objet de la troisième partie.

La quatrième partie propose une procédure de classement à partir des graphes correspondant à la relation précédemment définie.

La cinquième partie, propose un exemple d'application. Les données sont empruntées à l'ouvrage de B. ROY [1969] , qui expose les résultats du modèle ELECTRE-I, [BENAYOUN et alii, 1966. ROY, 1968 a et b]. les lecteurs intéressés par la comparaison des résultats issus des deux approches pourront se reporter à l'ouvrage pré-cité. Il n'était pas possible d'exposer SPARTE-II sans faire référence à ELECTRE-I qui fut l'une des premières méthodes d'analyse multicritère fondées sur les relations de surclassement et qui, à l'heure actuelle, reste l'une des meilleures méthodes.

### 1. Notations, données.

$K = \{1 \dots k \dots n\}$  : ensemble des objets (ou alternatives)  
 $C = \{1 \dots c \dots m\}$  : ensemble des critères (ou points de vue)  
 $P = \{p_1 \dots p_c \dots p_m\}$  : vecteur des pondérations associé à C  
tel que :

$$\forall c \in C : p_c \in [0, 1]$$

$$\sum_{c=1}^m p_c = 1$$

Chaque critère établit un préordre sur K. La procédure d'affectation des rangs dépend de la relation de préférence sous-jacente à chacun des critères. Désignons par :

$\mathcal{P}^c$  la relation de préférence au sens large associée à  $c$  (relation définie par le décideur d'après les termes d'une fonction implicite).

$f_{kc}$  le rang de  $k$  dans le préordre défini par  $c$

alors :  $k \mathcal{P}_{k'}^c \Rightarrow f_{kc} \leq f_{k'c}$

SPARTE considère essentiellement des données ordinales, mais pour déterminer plus facilement l'écart séparant deux éléments quelconques dans chaque classement individuel, on convient de remplacer les rangs  $f_{kc}$  par des équivalents numériques notés  $r_{kc}$  et choisis dans la suite des nombres entiers  $1, 2, \dots, n$  où  $n = \text{card } K$ . La transformation des rangs en équivalents numériques s'effectue de la façon suivante pour chaque préordre :

- l'élément classé premier reçoit l'équivalent numérique le plus élevé :

$$\forall c \in C : f_{kc} = 1 \Rightarrow r_{kc} = n$$

- l'élément classé dernier est affecté de l'équivalent numérique le plus faible :

$$\forall c \in C : f_{kc} = n \Rightarrow r_{kc} = 1$$

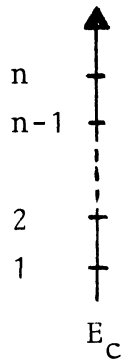
- en dehors de ces cas extrêmes, les éléments sont rangés inversement en fonction des rangs initiaux (tout en tenant compte des ex-aequo. Par exemple, l'équivalent numérique venant immédiatement après l'équivalent attribué à deux objets ex-aequo n'est pas affecté à l'objet suivant).

Les équivalents numériques ainsi définis sont appelés rangs inversés :

	$P$	$p_1$	$\dots$	$p_c$	$\dots$	$p_m$
$C$	$K$	1	$\dots$	c	$\dots$	m
1						
$\vdots$						
k				$r_{kc}$		
$\vdots$						
n						

D'après ce qui précède, chaque critère est muni d'une structure d'échelle [ROY, 1969]. Dans le cas particulier de SPARTE, toutes les échelles comprennent  $n$  échelons rangés dans l'ordre croissant des équivalents numériques (l'échelon le plus bas correspond à 1, l'échelon le plus élevé à  $n$ ) : la hauteur commune des échelles est  $n-1$ .

Dans la suite de l'exposé, l'échelle associée au critère  $c$  sera notée  $E_c$  et représentée de la façon suivante :



La définition d'une relation de surclassement est une étape préalable à l'obtention de la synthèse des classements révélés par chaque échelle. Cette relation permet de comparer deux éléments quelconques de  $K$  selon les multicritères pondérés ; le graphe qui lui est associé reproduit les surclassements éventuels qui s'établissent entre chaque couple d'objets (distincts).

Dans une seconde étape, une procédure de classement des éléments de  $K$  est proposée à partir de l'exploitation du graphe de surclassement.

## 2. Les fondements de la relation de surclassement.

### 2.1. Généralités.

$\forall (k, k') \in K \times K, k \neq k'$ , on note  ${}_k S_{k'}$ , le surclassement éventuel de  $k'$  par  $k$ .

$S$  désigne la relation de surclassement.

L'hypothèse  ${}_k S_{k'}$  possède la signification suivante : peut-on admettre que, globalement, l'objet  $k$  est au moins



aussi bon que l'objet k' ?

Pour juger de la validité de cette hypothèse, les critères sont rangés en deux sous-ensembles complémentaires :

- le sous-ensemble de concordance, noté  $A_{kk'}$ , est composé des critères favorables à l'hypothèse, soit :

$$A_{kk'} = \left\{ c \in C / r_{kc} \geq r_{k'c} \right\}$$

dans la suite de l'exposé, l'importance numérique des critères concordants est mesurée par le coefficient  $a_{kk'}^*$ , appelé, indicateur de concordance, et tel que :

$$a_{kk'}^* = \sum_{c \in A_{kk'}} p_c$$

avec :

$$A_{kk'} = \emptyset \Rightarrow a_{kk'}^* = 0 \text{ par convention}$$

$$A_{kk'} = C \Rightarrow a_{kk'}^* = 1 \text{ par définition}$$

donc :

$$a_{kk'}^* \in [0, 1]$$

- le sous-ensemble de discordance, noté  $\bar{A}_{kk'}$ , regroupe les critères qui s'opposent au surclassement postulé, c'est-à-dire :

$$\bar{A}_{kk'} = \left\{ c \in C / r_{kc} < r_{k'c} \right\}$$

Lorsque le sous-ensemble de concordance regroupe de nombreux critères, fortement pondérés, c'est-à-dire lorsque la valeur de  $a_{kk'}^*$  dépasse nettement 0,50 l'hypothèse  $k S_{k'}$  a une forte chance d'être acceptée. Mais pour qu'elle le soit définitivement, il faudra, en outre, s'assurer que les critères discordants ne manifestent pas une trop grande opposition à l'option "k est au moins aussi bon que k'". En tout cas, le degré d'opposition de la "minorité" ne devra pas, en principe, dépasser le degré d'adhésion de la "majorité".

La nature d'un degré d'adhésion ou d'un degré d'opposition est différente de celle de l'indicateur de concordance ou de son complément à 1,  $\bar{a}_{kk'}^* = \frac{\sum_{c \in \bar{A}_{kk'}} p_c}{n-1} = 1 - a_{kk'}^*$ , qui mesure l'importance numérique de la minorité.

- le degré d'adhésion d'un critère concordant  $c$  à l'hypothèse  $S_{k'}$ , est évalué par l'écart relatif  $a_{kk'}^c$ , tel que :

$$a_{kk'}^c = \frac{r_{kc} - r_{k'c}}{n-1}, \quad c \in A_{kk'}$$

par définition :

$$a_{kk'}^c \in [0, 1]$$

en particulier :

$a_{kk'}^c = 0$  : degré minimum d'adhésion ( $k$  et  $k'$  sont situés sur un même échelon de  $E_c$ ).

$a_{kk'}^c = 1$  : degré maximum d'adhésion ( $k$  est situé au sommet de  $E_c$ ,  $k'$  à l'autre extrémité).

- le degré d'opposition d'un critère discordant  $c$  à  $S_{k'}$ , est évalué par l'écart relatif  $\bar{a}_{kk'}^c$ , tel que :

$$\bar{a}_{kk'}^c = \frac{r_{k'c} - r_{kc}}{n-1}, \quad c \in \bar{A}_{kk'}$$

par définition :

$$\bar{a}_{kk'}^c \in [1/n-1, 1]$$

en particulier :

$\bar{a}_{kk'}^c = \frac{1}{n-1}$  : degré minimum d'opposition ( $k'$  est situé juste au-dessus de  $k$ )

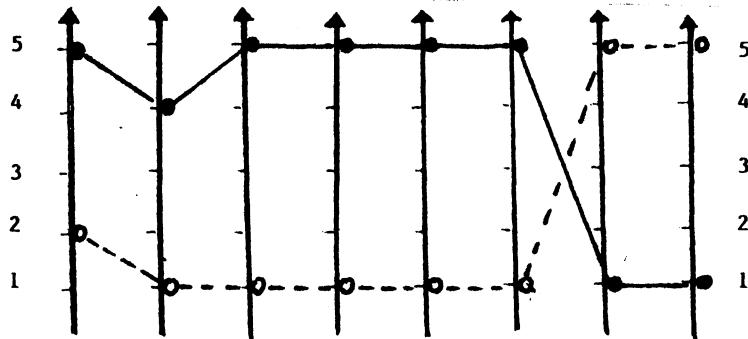
$\bar{a}_{kk'}^c = 1$  : degré maximum d'opposition ( $k'$  est situé au sommet de  $E_c$ ,  $k$  est situé à l'autre extrémité).

Si les degrés d'adhésion sont, dans l'ensemble, comparables aux degrés d'opposition, il n'y a aucune raison de rejeter une hypothèse de surclassement soutenue par une forte majorité des critères (chaque critère intervenant avec l'importance que lui confère son poids). Le surclassement proposé sera considéré comme fiable et définitivement accepté dans le cadre de la règle de majorité fixée par la valeur de l'indicateur de concordance (étant entendu que cette valeur doit être au moins égale à 0.50).

Pour illustrer cette idée, considérons un ensemble de 8 critères équi-pondérés ( $p_c = 0.125$ ,  $c = 1...8$ ) et un ensemble de 5 objets ; on s'intéresse uniquement aux profils de  $k$  et  $k'$ . Sur les échelles  $E_c$ , l'objet  $k$  est repéré par le symbole ●,  $k'$  est représenté par le symbole ○.

Cas 1

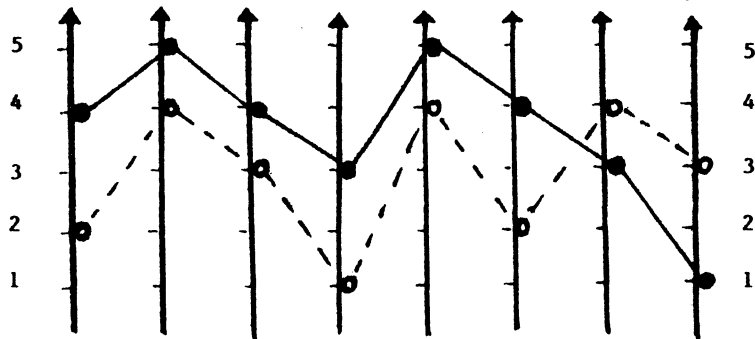
Majorité et minorité fortement déterminées.



On peut admettre que  $k$  surclasse  $k'$  dans le cadre d'une majorité fixée à 75%.

Cas 2 :

Majorité et minorité moyennement déterminées.

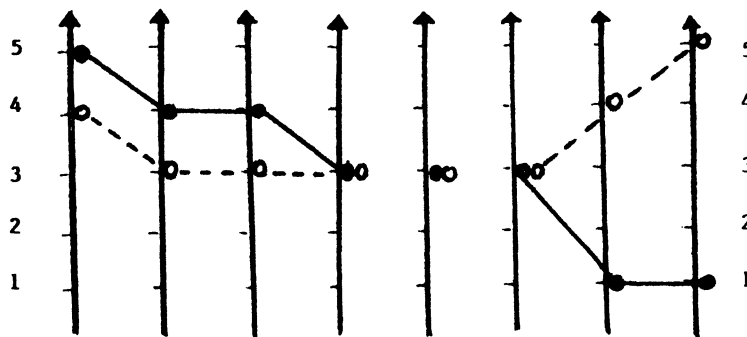


Il semble naturel d'admettre que  $k$  surclasse  $k'$ ; la fiabilité du surclassement augmenterait si, toutes choses égales par ailleurs, la majorité se montrait encore plus déterminée (cas 1).

En revanche, lorsque les degrés d'adhésion sont, dans l'ensemble, beaucoup plus faibles que les degrés d'opposition, il apparaît normal de refuser une proposition de surclassement majoritaire aussi faiblement défendue (cas 3).

Cas 3 :

Majorité faiblement agissante,  
minorité déterminée .



La fiabilité du surclassement proposé par une majorité

de 75% n'est plus assurée : en principe, k ne surclasse pas k'.

En résumé, l'acceptation de l'hypothèse  $S_k$ , dépend de la vérification simultanée de deux conditions :

- Condition de concordance

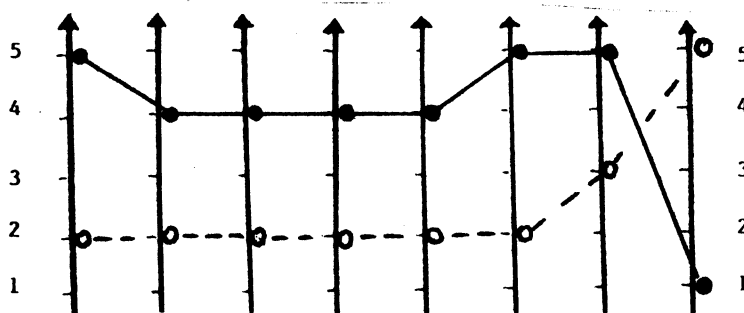
Une certaine majorité est favorable à l'option : "k est au moins aussi bon que k'".

- Condition de fiabilité

La majorité impose son option avec une "vigueur" au moins aussi importante que celle manifestée par la minorité à l'option : "k' est meilleur que k". Toutefois, une vive opposition manifestée par une très faible minorité ne doit pas systématiquement remettre en cause l'opinion - même moyennement exprimée - de la majorité (cas 4).

Cas 4 :

Majorité moyennement agissante, mais fortement représentée ; minorité déterminée.



On considère que k peut surclasser k'.

Une formulation plus précise de la condition de fiabilité nécessite le recours à une procédure de synthèse des degrés d'adhésion d'une part, et des degrés d'opposition d'autre part.

2.2. Amplitude de concordance.

L'amplitude de concordance représente la synthèse des

degrés d'adhésion. Elle est définie par la médiane des adhésions partielles.

Désignons par  $\mathcal{M}$  l'opérateur médiane et par  $a_{kk'}$ , l'amplitude de discordance.

Par définition :

$$a_{kk'} = \mathcal{M}_{c \in A_{kk'}} a_{kk'}^c \quad \text{si } A_{kk'} \neq \emptyset$$

Par convention :

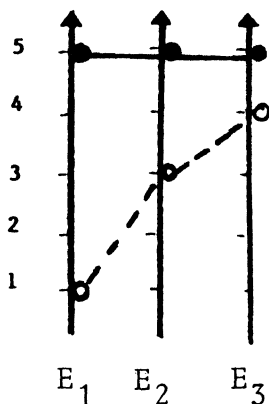
$$a_{kk'} = 0 \text{ si } A_{kk'} = \emptyset$$

Donc :

$$a_{kk'} \in [0, 1]$$

Le calcul de la médiane tient compte, évidemment, de l'importance relative des critères concordants ; le degré d'adhésion d'un critère concordant intervient proportionnellement à son coefficient de pondération.

Exemple : soit trois critères concordants  $c_1, c_2, c_3$  tels que  $p_{c_1} = 0.1, p_{c_2} = 0.1, p_{c_3} = 0.3$ . On observe que :



$$a_{kk'}^{c_1} = 1, \quad a_{kk'}^{c_2} = 0.50, \quad a_{kk'}^{c_3} = 0.25$$

donc :

$$0.25, 0.25, \underline{0.25}, 0.50, 1$$

$$\text{et } a_{kk'} = 0.25$$

Dans le cas particulier d'une équi-pondération, la valeur de l'amplitude de discordance résulte d'un simple dénombrement des adhésions partielles :

- cas 1 :  $a_{kk'} = 1.000$
- cas 2 :  $a_{kk'} = 0.375$
- cas 3 :  $a_{kk'} = 0.125$
- cas 4 :  $a_{kk'} = 0.500$

D'après ce qui précède :

$a_{kk'} = 0$  : plus de la moitié pondérée des critères concordants situent  $k$  et  $k'$  sur le même échelon.

$a_{kk'} = 1$  : plus de la moitié pondérée des critères concordants situent  $k$  au sommet des échelles considérées et  $k'$  à l'autre extrémité.

### 2.3. Amplitude de discordance.

La synthèse des degrés d'opposition conduisant à la définition de l'amplitude de discordance ne doit pas compromettre la fiabilité d'un surclassement proposé à une très forte majorité (cas 4).

Considérant la médiane comme opérateur de synthèse, le calcul de l'amplitude de discordance tient compte, en premier lieu, de tous les degrés d'opposition partielle. Ensuite, les plus forts degrés sont progressivement éliminés de la procédure de synthèse.

#### 2.3.1. Evaluation.

- Les critères discordants sont rangés dans le sens décroissant des degrés d'opposition ; on note  $c(\alpha)$  le  $\alpha$ -ème critère le plus discordant de  $\bar{A}_{kk'}$ . La liste suivante est obtenue :

critères :  $c(1), \dots, c(\alpha), \dots, c(\alpha^*)$

degrés d'opposition :  $\bar{a}_{kk'}^{c(1)} \geq \dots \geq \bar{a}_{kk'}^{c(\alpha)} \geq \dots \geq \bar{a}_{kk'}^{c(\alpha^*)}$

Par définition :  $\alpha^* = \text{card } \bar{A}_{kk'}$

- Désignons par  $\bar{A}_{kk'}(\alpha)$  le sous-ensemble de  $\bar{A}_{kk'}$ , obtenu en éliminant les  $\alpha$  premiers critères les plus discordants soit :

$$\bar{A}_{kk'}(\alpha) = \{c(\alpha+1), \dots, c(\alpha^*)\}$$

Par définition :

$$\bar{A}_{kk'}(\alpha) \supset \bar{A}_{kk'}(\alpha') \text{ si } \alpha < \alpha'$$

$$\bar{A}_{kk'}(\alpha) = \emptyset \text{ si } \alpha \gg \alpha^*$$

$$\bar{A}_{kk'}(\alpha) = \bar{A}_{kk'} \text{ si } \alpha = 0$$

- Au seuil  $\alpha$ , l'amplitude de discordance, notée  $\bar{a}_{kk'}(\alpha)$ ,  $\alpha \in k, (t^*)$  est définie par la médiane des degrés d'opposition de la suite :

$$\bar{a}_{kk'}^{c(\alpha+1)}, \dots, \bar{a}_{kk'}^{c(\alpha^*)}. (1)$$

. par définition :

$$\bar{a}_{kk'}(\alpha) = \underset{kk'}{\overset{\mathcal{M}}{c \in \bar{A}(\alpha)} \bar{a}_{kk'}^c}$$

. par convention

$$\bar{a}_{kk'}(\alpha) = 0 \text{ si } \bar{A}_{kk'}(\alpha) = \emptyset \text{ (a fortiori si } \bar{A}_{kk'} = \emptyset)$$

. donc :

$$\bar{a}_{kk'}(\alpha) \in \{0\} \cup [1/n-1, 1]$$

avec, en particulier :

$$\bar{a}_{kk'}(\alpha) = 0 : \text{ au seuil } \alpha, \text{ aucun critère ne s'oppose à l'option "k est au moins aussi bon que k"}$$

(1) Bien entendu, le calcul de la médiane tient compte des pondérations des critères.



$\bar{a}_{kk'}(\alpha) = \frac{1}{n-1}$  : au seuil  $\alpha$ , plus de la moitié pondérée des critères de  $\bar{A}_{kk'}(\alpha)$  situent  $k'$  juste au dessus de  $k$ .

$\bar{a}_{kk'}(\alpha) = 1$  : au seuil  $\alpha$ , plus de la moitié pondérée des critères de  $\bar{A}_{kk'}(\alpha)$  situent  $k'$  sur l'échelon le plus élevé et  $k$  sur l'échelon le plus bas des échelles correspondantes.

- Les propriétés suivantes sont immédiates :

$$\bar{a}_{kk'}(0) = \mathcal{M}_{c \in \bar{A}_{kk'}} \bar{a}_{kk'}^c$$

$$\bar{a}_{kk'}(\alpha) \geq \bar{a}_{kk'}(\alpha') \quad \text{si } \alpha < \alpha'$$

### 2.3.2. Exemples

cas 1 :

$$\alpha = 0 : \bar{A}_{kk'} = \{ \text{critère 7, critère 8} \}$$

$$\bar{a}_{kk'}^c = ( \quad 1 \quad , \quad 1 \quad )$$

$$\bar{a}_{kk'}(0) = 1$$

$$\alpha = 1 : \bar{A}_{kk'}(1) = \{ \text{critère 8} \} \text{ ou } \{ \text{critère 7} \}$$

$$\bar{a}_{kk'}^c = (1)$$

$$\bar{a}_{kk'}(1) = 1$$

$$\alpha = 2 : \bar{A}_{kk'}(2) = \emptyset$$

$$\bar{a}_{kk'}(2) = 0$$

cas 2 :

$$\alpha = 0 \quad \bar{A}_{kk'} = \{ \text{critère 8, critère 7} \}$$

$$\bar{a}_{kk'}^c = (0.50, 0.25)$$

$$\bar{a}_{kk'}(0) = 0.375$$

$$\alpha = 1 : \bar{A}_{kk'}(1) = \{ \text{critère 7} \}$$

$$\bar{a}_{kk'}^c = (0.25)$$

$$\bar{a}_{kk'}(1) = 0.250$$

$$\alpha = 2 : \bar{A}_{kk'}(2) = \emptyset$$

$$\bar{a}_{kk'}(2) = 0$$

cas 3 :

$$\alpha = 0 : \bar{a}_{kk'}(0) = 0.875$$

$$\alpha = 1 : \bar{a}_{kk'}(1) = 0.750$$

$$\alpha = 2 : \bar{a}_{kk'}(2) = 0$$

cas 4 :

$$\alpha = 0 : \bar{a}_{kk'}(0) = 1$$

$$\alpha = 1 : \bar{a}_{kk'}(1) = 0$$

$$\alpha = 2 : \bar{a}_{kk'}(2) = 0$$

### 3. La relation de surclassement

#### 3.1. Définition

D'après ce qui précède, l'hypothèse  ${}_k S_{k'}$ , est vérifiée si et seulement si, simultanément :

- l'indicateur de concordance est au moins égal à une valeur  $p$  (proche de 1) : condition de concordance.
- l'amplitude de concordance est au moins égale à l'amplitude de discordance au seuil  $\alpha$  (proche de 0) : condition de fiabilité.

En d'autres termes :

$$k \text{ surclasse } k' \Leftrightarrow a_{kk'}^* \geq p \text{ et } a_{kk'} \geq \bar{a}_{kk'}(\alpha)$$

A la relation  $S$  correspond le graphe de surclassement noté  $G_{p;\alpha} = (K, U_{p;\alpha})$ , où :

- les éléments de  $K$  définissent les sommets du graphe
- les arcs, notés  $(k, k')$ , sont définis de la façon suivante :

$${}_k S_{k'} \text{ vérifiée} \Rightarrow (k, k') \in U_{p;\alpha} : \begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\quad} & k' \end{array}$$

$${}_k S_{k'} \text{ non vérifiée} \Rightarrow (k, k') \notin U_{p;\alpha} : \begin{array}{ccc} k & & k' \\ \bullet & & \bullet \end{array}$$

Exemple :

	$a_{kk'}^*$	$a_{kk'}$	$\bar{a}_{kk'}(\alpha)$			conséquence
			$\alpha=0$	$\alpha=1$	$\alpha=2$	
Cas 1	0.75	1	1	1	0	$k \longrightarrow k'$ $p \leq 0.75, \alpha = 0$
Cas 2	0.75	0.375	0.375	0.250	0	$k \longrightarrow k'$ $p \leq 0.75, \alpha = 0$
Cas 3	0.75	0.125	0.875	0.750	0	$k \cdot \quad \cdot k'$ $p \leq 0.75, \alpha = 0; 1$ $k \longrightarrow k'$ $p \leq 0.75, \alpha = 2$
Cas 4	0.875	0.5	1	0	0	$k \cdot \quad \cdot k'$ $p \leq 0.875, \alpha = 0$ $k \longrightarrow k'$ $p \leq 0.875, \alpha = 1$

Remarque : Compte tenu du nombre relativement restreint de critères retenus pour illustrer les cas précédents, le choix d'un seuil de fiabilité dépassant 1 ne semble pas justifié (cas 3).

### 3.2. Principales caractéristiques.

#### 3.2.1. Structure de préférence.

La relation S définit une structure de préférence sur K [VINCKE, 1985]. En effet, en considérant l'hypothèse  $k^S_{k'}$  et l'hypothèse alternative  $k'^S_k$ , on a une et une seule des possibilités suivantes :

$k^S_{k'}$	$k'^S_k$	décision
vérifiée	non vérifiée	$k \longrightarrow k'$ : k surclasse k' (k est préféré à k')
non vérifiée	vérifiée	$k \longleftarrow k'$ : k' surclasse k (k' est préféré à k)
non vérifiée	non vérifiée	$k \cdot \quad \cdot k'$ : k et k' sont incomparables
vérifiée	vérifiée	$k \rightleftarrows k'$ : le choix entre k et k' est indifférent

- Les cas d'incomparabilité se produisent lorsque les conditions de surclassement sont très strictes, c'est-à-dire les

lorsqu'on impose un seuil de concordance très proche de 1 et/ou un seuil de fiabilité ne dépassant pas 1 par exemple. Dans tous les cas examinés plus haut,  $k$  et  $k'$  sont incomparables pour  $p > 0.75$ . Bien entendu, les incomparabilités surviennent le plus fréquemment aux seuils  $p = 1$  et  $\alpha = 0$  (ce couple de seuils correspond à des surclassements obtenus selon la règle de l'unanimité).

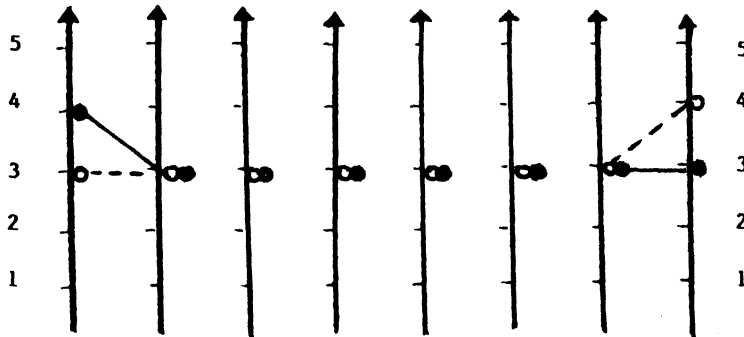
D'une façon générale :

- . le graphe  $G_{p;\alpha}$  est non complet
- . si  $p' < p$  ou/et  $\alpha' > \alpha$ , alors  $G_{p';\alpha'}$  admet, en principe,  $G_{p;\alpha}$  comme graphe partiel.

- l'indifférence apparaît dans deux situations particulières illustrées par les cas suivants :

Cas 5

Seuil de concordance proche de 1  
seuil de fiabilité non nul.



Dans le graphe  $G_{0.875;1}$  on vérifie que :  $k \rightleftarrows k'$

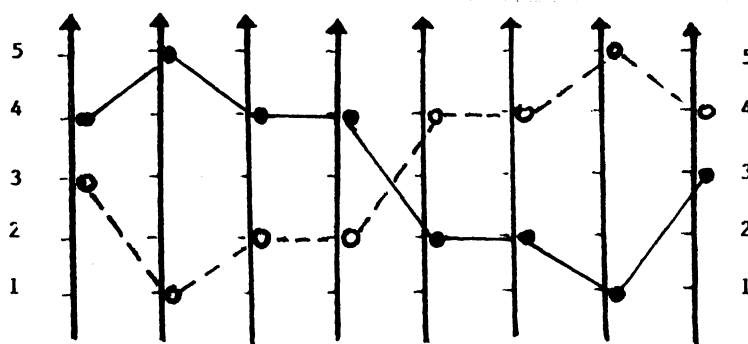
Le choix, entre deux objets est donc indifférent, si pour un nombre relativement élevé de critères, ces objets sont considérés comme équivalents. Bien entendu, lorsque le décideur se montre extrêmement sévère sur les conditions de surclassement, l'incomparabilité se substitue à l'indifférence. Par exemple, dans  $G_{0.875;0}$   $k$  et  $k'$  sont incomparables (au seuil

$\alpha = 0$ , les surclassements réciproques ne sont pas fiables).

Remarque : deux objets possédant exactement le même profil (ex-aequo selon tous les points de vue) se surclassent mutuellement dans  $G_{1;0}$  (unanimité). L'indifférence du choix est justifiée par la rigoureuse équivalence des objets.

### Cas 6

Seuil de concordance proche de 0.50



Le surclassement réciproque est obtenu dans  $G_{0.50;0}$

On constate que les profils sont nettement différents.

L'indifférence du choix n'est plus fondée sur la similarité des profils, mais sur leur opposition. Dans la mesure où un choix doit être effectué, le décideur constate que deux groupes distincts de critères s'opposent avec une "force" comparable sur les performances relatives des deux objets ; globalement, le choix entre  $k$  et  $k'$  peut être considéré comme indifférent.

L'indifférence du choix sans l'équivalence des objets paraît quelque peu troublante. Aussi vaut-il mieux se montrer un peu plus strict sur les conditions de surclassement pour se ramener à une situation d'incomparabilité ( $k$  et  $k'$  sont incomparables si, dans le cas présentement examiné, on pose  $p > 0.50$ ).

### 3.2.2 Non-transitivité (1)

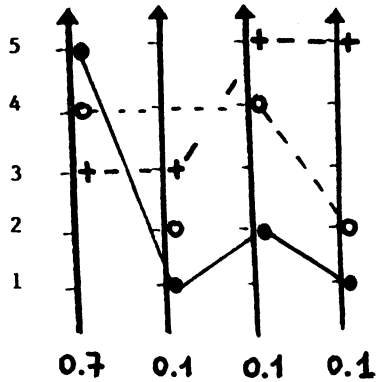
La non-transitivité de la relation de surclassement est la preuve que la synthèse des classements individuels n'est pas la conséquence d'une procédure d'agrégation des critères

(1) Exception faite des surclassements obtenus à l'unanimité.

(comme, par exemple, la somme pondérée effectuée sur les rangs inversés).

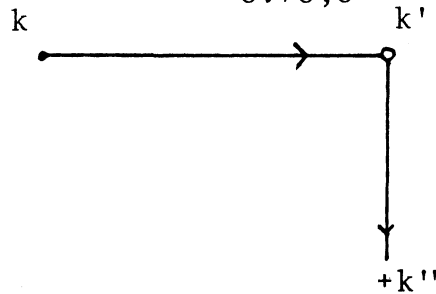
Cas 7

Un exemple d'intransitivité.



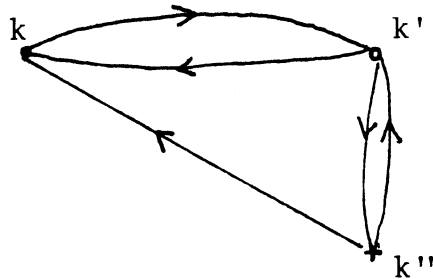
- Parmi 5 objets, on considère :
  - $k \bullet$
  - $k' \circ$
  - $k'' +$
- Les 4 critères sont pondérés de la façon suivante :
  - 0.7, 0.1, 0.1, 0.1

. Dans le graphe  $G_{0.70;0}$  on obtient :



la relation de surclassement n'étant pas nécessairement transitive, le graphe de surclassement peut, outre les surclassements réciproques, comporter d'autres circuits.

. par exemple, dans  $G_{0.30;0}$  on vérifie que :



le seuil de concordance étant inférieur à 0.50, le graphe comporte de nombreuses situations d'indifférence. Pour des conditions de

surclassement aussi lâches, un tel graphe sera écarté de la procédure visant à établir le classement final des éléments de K.

#### 4. Exploitation des graphes de surclassement.

La procédure de classement proposée ci-après (4.2) suppose l'absence de circuits. Comme nous venons de le remarquer la présence de circuits à des seuils de surclassement réalistes est assez rare sauf, peut-être, en ce qui concerne les surclassements réciproques (cas 5). Il convient, tout d'abord, d'éliminer les éventuels circuits des graphes de surclassement (4.1).

##### 4.1 Rétrécissement des circuits.

Soit  $G_{p;\alpha} = (K, U_{p;\alpha})$  un graphe comportant un circuit. Désignons par A l'ensemble des sommets reliés par ce circuit ( $A \subset K$ ).

Les éléments de A sont supposés équivalents (hypothèse fondée dans la mesure où les seuils de surclassement sont réalistes) et remplacés par un sommet fictif, noté a, appelé le condensé de A [ROY, 1969].

Le nouveau graphe obtenu (par condensation du sous-ensemble A) est noté :

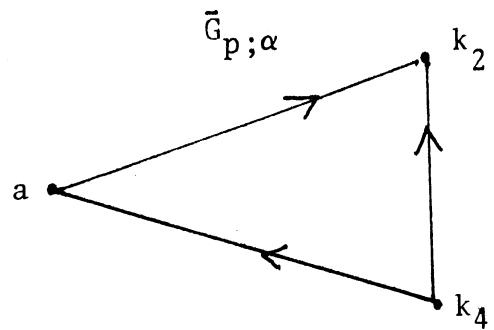
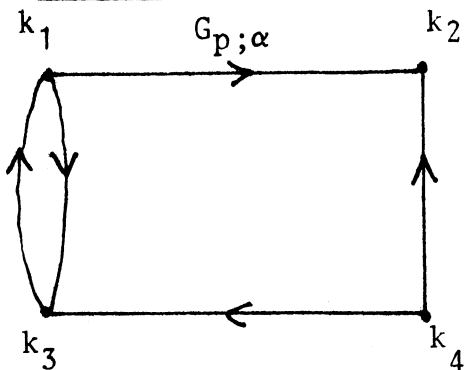
$$\begin{aligned} \bar{G}_{p;\alpha} &= (\bar{K}, \bar{U}_{p;\alpha}) \\ \text{avec } \bar{K} &= (K - A) \cup \{a\} \\ \text{et } \bar{U}_{p;\alpha} &\text{ défini de la façon suivante :} \end{aligned}$$

- $(k, k') \in U_{p;\alpha}, k \notin A, k' \notin A \Rightarrow (k, k') \in \bar{U}_{p;\alpha}$
- $(k, k') \in U_{p;\alpha}, k \notin A, k' \in A \Rightarrow (k, a) \in \bar{U}_{p;\alpha}$
- $(k, k') \in U_{p;\alpha}, k \in A, k' \notin A \Rightarrow (a, k') \in \bar{U}_{p;\alpha}$

Remarque : si le graphe comporte plusieurs circuits, l'ordre dans lequel on procède est indifférent.



Exemple :



#### 4.2. Classement des sommets

##### 4.2.1. Influence exercée par un sommet.

- l'influence indirecte au  $i^{\text{ème}}$  degré exercée par le sommet  $k$  est mesurée par le nombre total, noté  $e_k^i$ , de chemins de longueur  $i$  ayant  $k$  comme sommet initial.
- cas particulier : pour  $i = 1$ ,  $e_k^1$  mesure l'influence directe exercée par  $k$  (nombre de sommets surclassés directement par  $k$ ).
- l'influence globale exercée par  $k$ , notée  $e(k)$ , est définie par la somme pondérée :

$$e(k) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{i} e_k^i$$

où  $r$  désigne la longueur du chemin le plus long. On considère que l'influence diminue en intensité au fur et à mesure qu'augmente le nombre de sommets intermédiaires entre le sommet initial  $k$  et le sommet terminal d'un chemin.

##### 4.2.2. Influence subie par un sommet.

Symétriquement au cas précédent, l'influence subie par  $k$ , et notée  $s(k)$ , est définie par la somme pondérée :

$$s(k) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{i} s_k^i$$

avec  $s_k^i$  = nombre total de chemins de longueur  $i$  ayant  $k$  comme sommet terminal ;  $s_k^i$  mesure l'influence indirecte au  $i^{\text{ème}}$  degré subie par  $k$  ( $s_k^1$  représente le nombre de sommets surclassant directement  $k$ ).

#### 4.2.3. Coefficient de surclassement.

Par définition, le coefficient de surclassement du sommet  $k$ , noté  $v(k)$ , est donné par la différence :

$$v(k) = e(k) - s(k)$$

On obtient un préordre sur  $K$  en rangeant les sommets du graphe selon les valeurs décroissantes de  $v(k)$ .

### 5. Exemple d'application

Les données sont empruntées à l'ouvrage de B. ROY (1969 p. 185 et s.) où elles font l'objet d'un traitement par le modèle ELECTRE-I.

Le lecteur intéressé par la comparaison des résultats issus des deux approches pourra se reporter à l'ouvrage pré-cité.

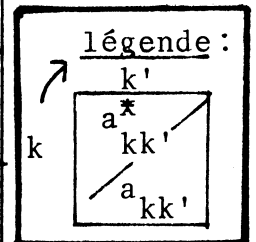
#### 5.1. Données.

(les rangs inversés sont reproduits en face des appréciations correspondantes.)

P	0.3	0.2	0.3	0.1	0.1
K \ C	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>	C <sub>5</sub>
k <sub>1</sub>	neutre 3	très bon 6	passable 3	neutre 1	très bon 6
k <sub>2</sub>	mauvais 1	passable 1	passable 3	très bon 6	neutre 3
k <sub>3</sub>	mauvais 1	neutre 5	mauvais 1	très bon 6	passable 1
k <sub>4</sub>	très bon 6	passable 1	neutre 4	neutre 1	neutre 3
k <sub>5</sub>	très bon 6	neutre 5	bon 5	neutre 1	bon 5
k <sub>6</sub>	très bon 6	neutre 5	très bon 6	bon 4	bon 5

5.2. Indicateurs de concordance, amplitude de concordance.

↗	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	k <sub>3</sub>	k <sub>4</sub>	k <sub>5</sub>	k <sub>6</sub>
k <sub>1</sub>	-	0.90 / 0.40	0.90 / 0.40	0.40 / 0.80	0.40 / 0.20	0.30 / 0.20
k <sub>2</sub>	0.40 / 0	-	0.80 / 0.20	0.40 / 0	0.10 / 1	0.10 / 0.40
k <sub>3</sub>	0.10 / 1	0.60 / 0	-	0.30 / 0.80	0.30 / 0	0.30 / 0
k <sub>4</sub>	0.70 / 0.20	0.90 / 0.20	0.70 / 0.60	-	0.40 / 0	0.30 / 0
k <sub>5</sub>	0.70 / 0.40	0.90 / 0.80	0.90 / 0.80	1 / 0.20	-	0.60 / 0
k <sub>6</sub>	0.70 / 0.60	0.90 / 0.80	0.90 / 1	1 / 0.40	1 / 0	-



$\curvearrowright$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$
$k_1$	-	1 0 0	1 0 0	0.40 0.20 0	0.50 0.40 0	0.60 0.60 0.60
$k_2$	0.50 0.40 0.40	-	0.40 0 0	0.60 0.20 0	0.80 0.40 0.40	0.80 0.60 0.60
$k_3$	0.40 0.40 0.40	0.40 0.40 0	-	0.60 0.60 0.40	1 1 0.20	1 1 0.80
$k_4$	1. 0.60 0	1 0 0	0.80 0.80 0	-	0.30 0.20 0.20	0.40 0.40 0.40
$k_5$	0.20 0.20 0	1 0 0	1 0 0	0 0 0	-	0.20 0.20 0
$k_6$	0.20 0.20 0	0.40 0 0	0.40 0 0	0 0 0	0 0 0	-

légende

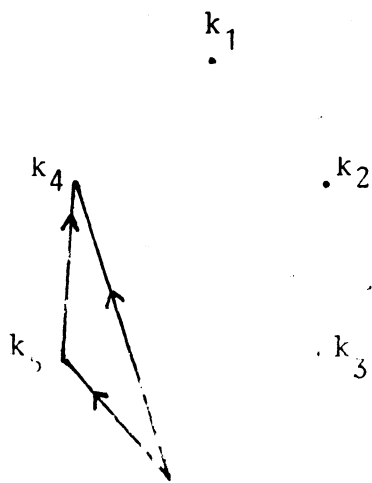
$\curvearrowright$   $k'$

$\bar{a}_{kk'}(0)$   
 $\bar{a}_{kk'}(1)$   
 $\bar{a}_{kk'}(2)$

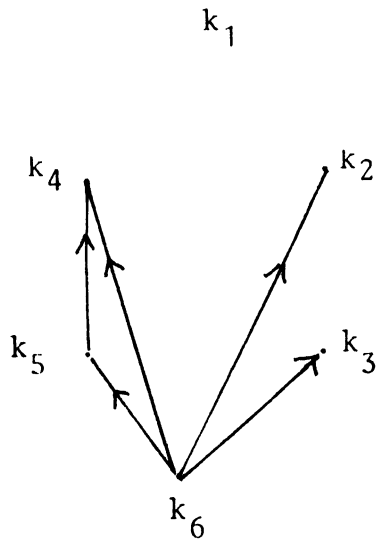
$k$

5.4. Graphes de surclassement.

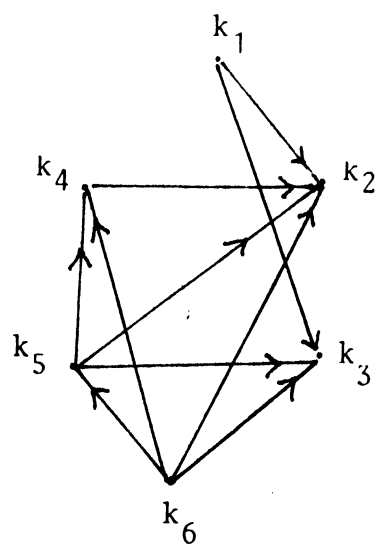
$G_1; 0$



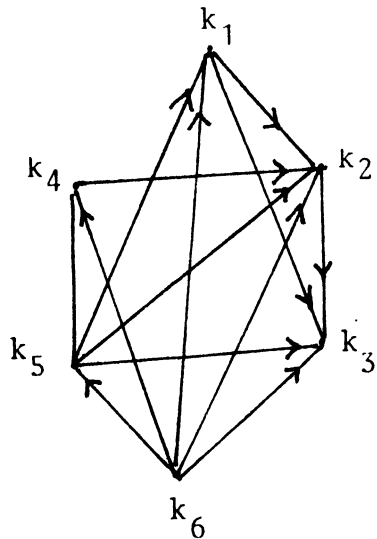
$G_{0,90;0}$



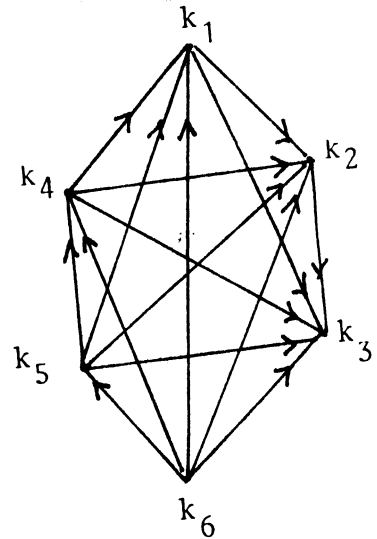
$G_{0.90;1}$



$G_{0.70;1}$



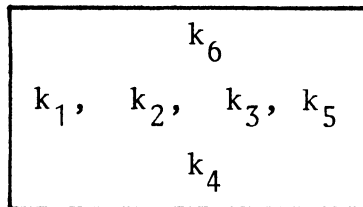
$G_{0.70;2}$



5.5. Classements.  $G_{1;0}$  :

	$e_k^1$	$e_k^2$	$e(k)$	$s_k^1$	$s_k^2$	$s(k)$	$v(k)$
$k_1$	0	0	0	0	0	0	0
$k_2$	0	0	0	0	0	0	0
$k_3$	0	0	0	0	0	0	0
$k_4$	0	0	0	2	1	2.5	-2.5
$k_5$	1	0	1	1	0	1	0
$k_6$	2	1	2.5	0	0	0	2.5

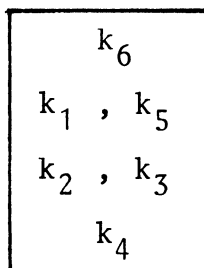
Le préordre suivant est obtenu :



$G_{0.90;0}$  :

	$e_k^1$	$e_k^2$	$e(k)$	$s_k^1$	$s_k^2$	$s(k)$	$v(k)$
$k_1$	0	0	0	0	0	0	0
$k_2$	0	0	0	1	0	1	- 1
$k_3$	0	0	0	1	0	1	- 1
$k_4$	0	0	0	2	1	2.5	- 2.5
$k_5$	1	0	1	1	0	1	0
$k_6$	4	1	4.5	0	0	0	4,5

d'où le classement :



$G_{0.90;1}$

	$e_k^1$	$e_k^2$	$e_k^3$	$e(k)$	$s_k^1$	$s_k^2$	$s_k^3$	$s(k)$	$v(k)$
$k_1$	2	0	0	2	0	0	0	0	2
$k_2$	0	0	0	0	4	3	1	5.8	-5.8
$k_3$	0	0	0	0	3	1	0	3.5	-3.5
$k_4$	1	0	0	1	2	1	0	2.5	-1.5
$k_5$	3	1	0	3.5	1	0	0	1	2.5
$k_6$	4	4	1	6.3	0	0	0	0	6.3

le classement est le suivant :

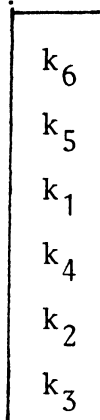
$k_6$
$k_5$
$k_1$
$k_4$
$k_3$
$k_2$

Remarquons que  $k_2$  et  $k_3$  arrivent en première position sur l'échelle associée au critère  $c_4$  qui possède, par conséquent, un droit de veto sur le surclassement de ces deux objets par des objets situés au bas de l'échelle ( $k_1, k_4, k_5$ ).

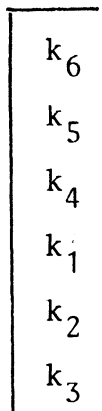
La suppression du droit de veto est acquise au seuil  $\alpha = 1$  (elle est légitime puisque le poids de  $c_4$  est faible) et relègue  $k_3$  et  $k_2$  aux derniers rangs du classement synthétique.

Des ordres sensiblement différents sont obtenus en atténuant la sévérité des seuils :

G<sub>0.70;1</sub> :



G<sub>0.70;2</sub> :



### 5.6. Hiérarchies de centralité.

Une application possible de l'analyse multicritère à l'espace économique concerne l'étude de la centralité.

Chaque point d'un espace de référence peut, en effet, être plus ou moins central selon la nature et l'importance relative des critères retenus (dans l'espace urbain, par exemple, les fonctions commerciales, financières... sont assimilés à des critères de classement des quartiers).

Dans le classement synthétique un indice de centralité, noté C(k) est affecté à tout lieu k comme suit :

$$C(k) = \frac{v(k) - \min_k v(k)}{\max_k v(k) - \min_k v(k)}$$

de telle sorte que le lieu le plus central k<sub>0</sub> possède un indice égal à l'unité et le lieu le moins central k'<sub>0</sub> un indice égal à zéro (k<sub>0</sub> et k'<sub>0</sub> ne sont pas nécessairement des entités spatiales uniques saufs si le classement synthétique retenu est un ordre).

A la distance physique séparant chaque lieu de l'espace de son centre, on substitue l'indicateur d(k) tel que :

$$d(k) = 1 - C(k)$$

avec : d(k<sub>0</sub>) = 0 et d(k'<sub>0</sub>) = 1



Cette distance qualifiée d'"abstraite" (par opposition à la distance physique) est utilisée comme variable explicative dans un modèle stochastique :

$$y = f(d)$$

où y désigne toute grandeur économique contenue dans l'espace de référence (prix fonciers, densité de population, taux de chômage, etc...)

Bien entendu, le test du modèle ne se trouve aucunement affecté - comme c'est le cas dans les modèles traditionnels - si l'espace possède des centres multiples.

Des résultats très encourageants ont été obtenus selon cette méthode par les chercheurs dijonnais du groupe "Espace".

BIBLIOGRAPHIE

- ANTOINE J. - ROY B. 1969 : "Les techniques préparatoires de la décision, intérêt et limites", Revue Projet.
- BERTIER P. - de MONTGOLFIER J. 1971 : "Comment choisir en tenant compte de points de vue non commensurables" - Analyse et Prévision.
- BENAYOUN R., ROY B., SUSSMANN B., 1966 : "Une méthode pour guider le choix en présence de points de vue multiples". Note de travail de la SEMA, n° 49, Paris.
- BINZACK P., 1983 : Application de la méthode SPARTE à la localisation d'un laboratoire d'analyses médicales dans l'agglomération dijonnaise. Mémoire de Maîtrise, Faculté de Science Economique et de Gestion, Dijon.
- FUSTIER B., 1981 : "Une méthode d'analyse multicritère - SPARTE", Document de Travail de l'Institut de Mathématiques Economiques, n° 49, Dijon.
- FUSTIER B., 1983 : "Nouvelle théorie de la demande et prescription médicale. Le cas des normolipémiants". Communication présentée à la Table Ronde de Médiométrie régionale - Les Diablerets - Suisse.
- ROY B., 1968 a : "Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE)" - Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle. n° 8.
- ROY B., 1968 b : "Classement et choix en présence de points de vue multiples (La méthode ELECTRE)" Revue de l'AFIRO (série verte).
- ROY B., 1969 : "Algèbre moderne et théorie des graphes, Tome 1, Dunod, Paris.
- ROY B., 1975 : "Vers une modélisation générale d'aide à la décision - Rapport scientifique de la SEMA, n° 87.