



HAL
open science

La distance en analyse spatiale : une approche axiomatique

Jean-Marie Huriot, Jacques-François Thisse

► To cite this version:

Jean-Marie Huriot, Jacques-François Thisse. La distance en analyse spatiale : une approche axiomatique. [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1985, 24 p., bibliographie. hal-01543360

HAL Id: hal-01543360

<https://hal.science/hal-01543360>

Submitted on 20 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

I.M.E.

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU C.N.R.S.

DOCUMENT DE TRAVAIL



INSTITUT DE MATHEMATIQUES ECONOMIQUES

UNIVERSITE DE DIJON

FACULTE DE SCIENCE ECONOMIQUE ET DE GESTION

4, BOULEVARD GABRIEL — 21000 DIJON

N° 77

LA DISTANCE EN ANALYSE SPATIALE :
UNE APPROCHE AXIOMATIQUE

Jean-Marie HURIOT - Jacques-François THISSE

Mai 1985

LA DISTANCE EN ANALYSE SPATIALE :
UNE APPROCHE AXIOMATIQUE

Jean-Marie HURIOT * Jacques-François THISSE **

1. Introduction

L'analyse spatiale met en lumière des processus d'interdépendance où la **distance** joue un rôle explicatif fondamental. Une large partie de l'analyse spatiale est consacrée à l'étude de la forme de la relation entre les phénomènes économiques et sociaux observés et la distance à des lieux privilégiés, et aux variations de cette relation. Or cette forme est en partie conditionnée par la représentation de l'espace qu'on se donne, donc par la représentation de la distance dans cet espace. La littérature offre un certain nombre de spécifications analytiques de la distance entre deux lieux repérés par leurs coordonnées, par exemple la distance euclidienne, longtemps privilégiée, et plus récemment les distances rectilinéaire, l_p , les bloc-normes, etc... Ces formulations offrent une grande diversité, et elles sont rarement reliées les unes aux autres. Leurs propriétés métriques, quand elles sont nécessaires à l'analyse, sont posées sans autre justification que la commodité.

L'approche proposée dans ce papier s'attache à l'identification d'un fondement minimum de ces représentations, en proposant une construction axiomatique d'un groupe très général de distances. Dans ce sens, elle se situe dans la ligne de l'approche axiomatique de l'espace géographique considéré par BEGUIN et THISSE (1979).

Elle met en évidence les éléments qui sont à la base de ces distances :

* Institut de Mathématiques Economiques, Université de Dijon.

** C.O.R.E., Université Catholique de Louvain.

formes spatiales et comportements, et permet de montrer sous quelles conditions simples une distance peut avoir des propriétés métriques. Ces conditions sont énoncées comme des axiomes ; la plupart d'entre eux ne représentent que des propositions de bon sens. Ainsi les propriétés métriques ne seront plus des hypothèses, mais des résultats impliqués par nos axiomes.

Trois types de distances sont progressivement construits.

Une distance abstraite sert d'étalon de mesure (section 2). Elle est définie dans un espace purement abstrait. La **distance-transport** est déterminée à partir des déplacements effectués (section 3). Elle est mesurée en unités de longueur, grâce à la distance abstraite, et elle dépend du mode de transport utilisé. Les **distances-coût de transport** sont mesurées en unités de temps ou de monnaie (section 4). Elles sont reliées fonctionnellement à la distance-transport. Elles sont relatives au mode de transport et à la nature de ce qui est transporté : marchandises, individus.

Chacune de ces distances, définie de manière très générale, peut engendrer toute une série de représentations particulières.

La section 5 donne quelques conclusions.

2. La distance abstraite

Soit S un ensemble de lieux s . Il faut définir sur S une mesure de la distance -la distance abstraite- qui servira de base pour la mesure des distances concrètes correspondant aux niveaux ultérieurs de l'analyse. Elle définit l'espace mathématique dans lequel l'axiomatique est construite et, en conséquence, elle est conçue de manière purement abstraite.

Axiome 1. La distance abstraite d_a est mesurée à l'aide d'une métrique définie sur S .

Par définition, cette métrique est une application de S^2 dans \mathbb{R} (muni d'une unité de longueur) qui définit d_a de manière que, quels que soient $s_i, s_j, s_k \in S$, les quatre conditions suivantes soient vérifiées :

- (1) non négativité : $d_a(s_i, s_j) \geq 0$
- (2) identité : $d_a(s_i, s_j) = 0 \Leftrightarrow s_i = s_j$
- (3) symétrie : $d_a(s_i, s_j) = d_a(s_j, s_i)$
- (4) inégalité triangulaire : $d_a(s_i, s_j) \leq d_a(s_i, s_k) + d_a(s_k, s_j)$

La distance abstraite joue le rôle d'**étalon**. Elle doit être non négative et donner une mesure nulle pour deux lieux confondus (conditions 1 et 2). Elle doit avoir la même mesure, qu'on la prenne dans un sens ou dans l'autre (condition 3). Enfin, on conçoit mal une distance abstraite qui n'obéirait pas à l'inégalité triangulaire (condition 4) : la non satisfaction de cette condition fait que la distance a des propriétés non naturelles (BLUMENTHAL, 1970), telles que la cohérence spatiale disparaît et que la représentation cartographique, pour un espace à deux dimensions, devient très problématique. Les propriétés métriques de la distance abstraite n'impliquent rien au niveau des distances concrètes qu'elle sert à mesurer. Disons qu'elles semblent nécessaires pour qu'on puisse **mesurer** à l'aide de la distance abstraite.

L'ensemble S structuré par la métrique d_a constitue un espace dénommé (S, d_a) .

Dans le cas, raisonnable, où S est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , la métrique la plus commode est la distance euclidienne. De cette manière, l'étalon de mesure des distances est constitué par la distance en ligne droite. Ceci est intéressant car on peut approximer n'importe quelle courbe par une suite de segments de droite adjacents : la longueur de la courbe est alors égale à la limite de la somme des longueurs des segments lorsque chacune de ces longueurs tend vers zéro.

L'espace euclidien présente un autre avantage : il constitue une référence quasi-universelle par rapport à laquelle on construit d'autres espaces. Par exemple un espace sphérique (non euclidien) est décrit à partir d'un espace euclidien : la représentation de la sphère, et des distances sphériques, se fait dans un espace euclidien.

3. La distance-transport

La définition d'une distance-transport entre deux lieux passe par la mesure de la longueur du déplacement réalisable le plus court. Elle suppose donc qu'on ait préalablement défini et caractérisé la notion de déplacement dans un espace géographique.

3.1. La notion de déplacement

3.1.1. Définition d'un déplacement

Un déplacement dans l'espace géographique est le résultat du mouvement d'un individu ou d'un objet d'un lieu vers un autre lieu de l'espace. Intuitivement, un déplacement fait donc penser, en géométrie, à une figure engendrée par le mouvement d'un point, c'est-à-dire une courbe. Toutefois, la notion formelle de déplacement que nous retenons est plus étroite.

Rappelons d'abord ce qu'est une courbe. La définition la plus commune est la suivante :

Un ensemble C est une **courbe** s'il existe une application continue $f(t)$ de $[0, 1]$ vers (S, d_a) telle que C est l'image de $[0, 1]$ par f :
 $C = f([0, 1])$.

Cependant la notion de courbe ainsi définie englobe des figures qui ne correspondent pas à l'idée intuitive qu'on se fait d'un déplacement.

HILBERT a montré qu'il existe une application continue telle que la surface du carré est une courbe (SIMMONS, 1963). Pour éviter de tels cas aberrants, nous faisons appel à une notion plus restrictive que celle que nous venons de définir. On appelle **arc** un sous-ensemble \bar{C} de S

- qui est une courbe
- tel que deux points quelconques de \bar{C} puissent être séparés quand on enlève de \bar{C} un ensemble de points isolés.

En termes intuitifs, un arc est un continuum à une dimension orienté (WHYBURN, 1942).

Tout déplacement est un arc, mais l'inverse n'est pas vrai : il n'y a déplacement que si le mouvement correspondant est **réalisable**. Ce caractère réalisable dépend des possibilités offertes par la structure géographique des supports de transport.

Définition 1. Soit Δ une partie de l'ensemble des arcs contenus dans (S, d_a) . Tout élément δ de Δ est appelé déplacement.

Un déplacement est l'ensemble ordonné des lieux de S successivement occupés lors d'un mouvement réalisable d'un lieu initial vers un lieu terminal. La description d'un déplacement exige donc la spécification de ces deux types de lieu.

Parmi les lieux de S , certains sont les points initiaux d'un déplacement : ils constituent le sous-ensemble O des **origines** ; certains sont les points terminaux d'un déplacement : ils forment le sous-ensemble D des **destinations**. Les ensembles O et D sont inclus dans l'ensemble S .

La structure des déplacements est entièrement déterminée par le triplet (O, D, Δ) . Ce triplet détermine la "carte" des déplacements. Elle se représente par un graphe topologique. Nous désignons par $\Delta(s_i, s_j)$ l'ensemble des déplacements de s_i vers s_j , pour $s_i \in O$ et $s_j \in D$.

3.2.1. Longueur d'un déplacement

Nous avons déjà signalé que la longueur d'une courbe pouvait être approximée par la somme des longueurs d'une suite de petits segments convenablement choisis. Il en va de même pour un arc puisqu'un arc est une courbe particulière.

Soit une suite finie τ de points t_k ($k = 1, \dots, K$) de l'intervalle $[0, 1]$, telle que

$$t_1 = 0 < t_2 < t_3 < \dots < t_K = 1 ;$$

l'expression

$$\sum_{k=1}^{K-1} d_a[f(t_k), f(t_{k+1})],$$

où d_a est la distance abstraite, est la variation totale V_τ de la fonction $f(t)$ sur τ .

La longueur de l'arc \bar{C} est alors définie par (BERGE, 1966) :

$$l(\bar{C}) = \sup_{\tau} V_\tau,$$

C'est à dire que $l(\bar{C})$ est égale au supremum de la valeur de la variation totale pour une suite quelconque τ .

On démontre (CHOQUET, 1973) que la valeur $l(\bar{C})$ est la limite des valeurs V_τ quand le supremum des différences $|t_{k+1} - t_k|$ tend vers zéro. On peut maintenant définir la longueur d'un déplacement.

Définition 2. La longueur d'un déplacement est la longueur -au sens défini ci-dessus- de l'arc correspondant dans (S, d_a) .

Un déplacement est un arc correspondant à un mouvement rendu réalisable par la structure des supports de transport. Mais parmi les déplacements ainsi permis entre deux lieux, il peut exister des déplacements non acceptables dans le domaine de la géographie ou de l'économie, car ils sont de longueur infinie. C'est le cas notamment quand il existe des boucles que l'on peut répéter à l'infini sans en sortir. Une telle situation contredit l'idée intuitive du caractère réalisable d'un déplacement. Pour cette raison, on pose l'axiome suivant :

Axiome 2. Tout déplacement a une longueur finie.

3.1.3. Structure des déplacements

Il est naturel de considérer que la possibilité de rester sur place existe pour tout lieu de l'ensemble $O \cup D$. Ainsi l'ensemble $\Delta(s_i, s_i)$ contient nécessairement un déplacement de longueur nulle :

Axiome 3. Quel que soit s_i un lieu origine ou destination, il existe un déplacement de s_i vers lui-même dont le seul élément est s_i

$$\forall s_i \in O \cup D, \delta(s_i, s_i) = \{s_i\} \in \Delta.$$

Cela implique immédiatement que la longueur de ce déplacement est nulle. Une autre conséquence est que $O = D$. En effet, $s_i \in O$ implique $\delta(s_i, s_i) \in \Delta$, donc, $s_i \in D$. Inversement si $s_i \in D$. Dès lors l'ensemble des origines est confondu avec l'ensemble des destinations. Par commodité on désigne désor-

mais par A l'ensemble des **arrêts**, origines et destinations : $A = O = D$.

Dans l'état actuel des choses, il est a priori possible qu'il existe des couples $(s_i, s_j) \in A^2$ tels qu'il n'existe aucun déplacement de s_i vers s_j : $\Delta(s_i, s_j) = \emptyset$. De façon que la structure de ces déplacements ne soit pas limitée par la structure mathématique de l'ensemble S (mais le soit uniquement par des conditions d'ordre géographique), nous admettrons l'axiome suivant :

Axiome 4. Quels que soient deux lieux s_i et s_j de l'ensemble des arrêts, il existe nécessairement un déplacement de s_i vers s_j

$$\forall (s_i, s_j) \in A^2, \Delta(s_i, s_j) \neq \emptyset.$$

La structure des déplacements est maintenant complètement décrite par le couple (A, Δ) .

La pratique des déplacements suggère l'existence d'une loi de composition définie sur Δ : on peut effectuer successivement plusieurs déplacements, et considérer cette suite comme un seul grand déplacement.

Définition 3. On appelle concaténation $\delta_1 * \delta_2$ la "mise bout-à-bout" de deux déplacements δ_1 et δ_2 de manière que la destination du premier soit confondue avec l'origine du second.

Pour que le résultat de la concaténation soit un déplacement (loi de composition interne), il faut que ce résultat appartienne à l'ensemble Δ , ce qui n'est pas garanti. Supposons que $\Delta = \{\delta_1, \delta_2\}$. Dans ce cas, si δ_1 et δ_2 ne sont pas des déplacements nuls, $\delta_1 * \delta_2 \notin \Delta$. Cela ne semble pas raisonnable. Aussi convient-il d'éliminer une telle possibilité :

Axiome 5. Quels que soient δ_1 et δ_2 appartenant à l'ensemble des déplacements, le déplacement obtenu par la concaténation de δ_1 avec δ_2 est lui aussi un déplacement

$$\forall \delta_1, \delta_2 \in \Delta, \delta_1 * \delta_2 \in \Delta$$

La loi de concaténation est **associative**.

Soit trois déplacements $\delta_1(s_i, s_k)$, $\delta_2(s_k, s_h)$, $\delta_3(s_h, s_j) \in \Delta$.

Un déplacement est l'ensemble ordonné des lieux parcourus de l'origine vers la destination, y compris ces points. Donc :

$$\delta_1 * \delta_2 = \{\delta_1 \cup \delta_2\},$$

$$\begin{aligned} \text{donc } (\delta_1 * \delta_2) * \delta_3 &= \{\delta_1 \cup \delta_2\} \cup \delta_3 = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta_3 \\ &= \delta_1 \cup \{\delta_2 \cup \delta_3\} = \delta_1 * (\delta_2 * \delta_3). \end{aligned}$$

Il est établi, en topologie, que la variation totale V est additive (CHOQUET, 1973). Il en découle immédiatement l'additivité de la longueur d'une courbe, donc l'additivité de la longueur d'un déplacement : V_τ est additive, donc $\sup_\tau V_\tau$ est additive, donc $l(\bar{C})$ est additive. Un déplacement δ étant une courbe particulière, il est clair que $l(\delta)$ est additive :

$$l(\delta_1) + l(\delta_2) = l(\delta_1 * \delta_2)$$

3.2. La distance-transport

Intuitivement, une distance-transport de s_i à s_j se définit comme la longueur minimum d'un déplacement de s_i à s_j .

Cependant, le nombre des déplacements entre deux lieux donnés peut être infini et rien ne garantit a priori qu'il existe un déplacement de longueur minimum. Il est alors nécessaire de poser l'axiome suivant :

Axiome 6. Quels que soient deux lieux d'arrêt s_i et s_j , il existe un déplacement de s_i vers s_j dont la longueur est inférieure ou égale à la longueur de tout déplacement de s_i vers s_j .

$$\forall (s_i, s_j) \in A^2, \exists \delta^*(s_i, s_j) / l[\delta^*(s_i, s_j)] \leq l[\delta(s_i, s_j)]$$

$$\forall \delta(s_i, s_j) \in \Delta(s_i, s_j).$$

Dans ces conditions, il est possible de définir une distance-transport :

Définition 4. Etant donné une structure de déplacements (A, Δ) , la distance-transport d_t est donnée par l'application de A^2 dans \mathbb{R} :

$$(s_i, s_j) \rightarrow d_t(s_i, s_j) = \min_{\delta \in \Delta(s_i, s_j)} l[\delta(s_i, s_j)]$$

Cette distance présente un certain nombre de propriétés :

- de l'axiome 3, on tire :

$$\forall s_i \in A, d_t(s_i, s_i) = \min_{\delta \in \Delta(s_i, s_i)} l[\delta(s_i, s_i)] = 0,$$

$$\text{donc } s_i = s_j \Rightarrow d_t(s_i, s_j) = 0$$

- Nous savons que la distance abstraite d_a satisfait les conditions de non négativité et d'identité. Donc

$$s_i \neq s_j \Rightarrow d_t(s_i, s_j) > 0$$

Si $d_t(s_i, s_j) = 0$, il est impossible que $s_j \neq s_i$ puisqu'alors on aurait $d_t(s_i, s_j) > 0$. Donc

$$d_t(s_i, s_j) = 0 \Rightarrow s_i = s_j$$

Ces trois relations impliquent les deux propriétés d'**identité** et de **non négativité** de la distance-transport d_t

$$d_t(s_i, s_j) = 0 \Leftrightarrow s_i = s_j$$

$$d_t(s_i, s_j) \geq 0$$

- De même, on peut démontrer que d_t présente la propriété de l'**inégalité triangulaire**. En effet :

soit trois lieux s_i, s_j, s_k appartenant à A .

soit $\delta^*(s_i, s_j)$ le déplacement de longueur minimum de s_i vers s_j :

$$d_t(s_i, s_j) = l[\delta^*(s_i, s_j)].$$

Définissons de même $\delta^*(s_i, s_k)$ et $\delta^*(s_k, s_j)$. Il vient :

$$d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j) = l[\delta^*(s_i, s_k)] + l[\delta^*(s_k, s_j)].$$

Supposons que

$$l[\delta^*(s_i, s_j)] > l[\delta^*(s_i, s_k)] + l[\delta^*(s_k, s_j)].$$

De la propriété d'additivité de la longueur d'un déplacement et de l'axiome 5 il résulte qu'il existe $\delta(s_i, s_j)$, tel que :

$$\delta(s_i, s_j) = \delta^*(s_i, s_k) * \delta^*(s_k, s_j), \text{ et } l[\delta(s_i, s_j)] < l[\delta^*(s_i, s_j)].$$

Ceci est contraire à la définition de $\delta^*(s_i, s_j)$. En conséquence,

$$l[\delta^*(s_i, s_j)] \leq l[\delta^*(s_i, s_k)] + l[\delta^*(s_k, s_j)], \text{ ou}$$

$d_t(s_i, s_j) \leq d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j)$, qui est bien l'expression de l'inégalité triangulaire pour d_t .

Ainsi la distance-transport satisfait toutes les conditions d'une métrique sauf la symétrie.

Or lorsqu'une application de S^2 dans R définit une distance qui, quels que soient s_i, s_j et s_k , vérifie les conditions de non négativité, d'identité et d'inégalité triangulaire (section 2, p. 3), on a une **quasi-métrique**. On peut donc énoncer la propriété 1 :

Propriété 1. Si les axiomes 1 à 6 sont vérifiés, la distance-transport est une quasi-métrique sur A^2 .

Si on désire avoir une métrique, il faut en outre garantir la symétrie de d_t et, pour cela, admettre la symétrie des déplacements.

On appelle **déplacement inverse** $\delta^{-1}(s_i, s_j)$ du déplacement $\delta(s_i, s_j)$, un ensemble ordonné composé des mêmes éléments que l'ensemble $\delta(s_i, s_j)$ placés dans l'ordre inverse, de la destination vers l'origine de δ , ou encore :

$$\delta^{-1}(s_i, s_j) = f^{-1}[0, 1] \text{ où } f^{-1}(t) = f(1 - t).$$

La longueur d'un déplacement est égale à la longueur de son inverse :
la longueur d'un déplacement est **symétrique** :

$$\forall \delta, l(\delta) = l(\delta^{-1}).$$

Cette propriété découle de la symétrie de la distance abstraite d_a :

$$d_a[f(t_k), f(t_{k+1})] = d_a[f(t_{k+1}), f(t_k)]$$

$$\Rightarrow l(\delta^{-1}) = \sup_{\tau} \sum_{k=1}^{K-1} d_a[f(t_{k+1}), f(t_k)] = \sup_{\tau} \sum_{k=1}^{K-1} d_a[f(t_k), f(t_{k+1})] = l(\delta)$$

Pour assurer la symétrie de d_t , il faut d'abord assurer la symétrie des déplacements, c'est-à-dire l'existence des déplacements inverses :

Axiome 7. Tout déplacement d'un arrêt quelconque à un autre arrêt quelconque admet un déplacement inverse :

$$\forall (s_i, s_j) \in A^2, \forall \delta(s_i, s_j) \in \Delta, \delta(s_j, s_i) = \delta^{-1}(s_i, s_j) \in \Delta.$$

Dans ces conditions, la symétrie de la longueur d'un déplacement implique la **symétrie de la distance-transport** :

$$d_t(s_i, s_j) = l[\delta^*(s_i, s_j)] = l[\delta^{*-1}(s_i, s_j)] = l[\delta^*(s_j, s_i)] = d_t(s_j, s_i).$$

Alors la distance-transport vérifie les quatre conditions d'une métrique.

Propriété 2. Si les axiomes 1 à 7 sont vérifiés (1), la distance-transport d_t est une métrique sur A^2 .

(1) On remarque que la loi de concaténation munit l'ensemble des déplacements d'une structure algébrique, qui est celle de groupoïde, lorsque les axiomes 1 à 7 sont satisfaits. On parle dans ce cas du groupoïde des déplacements.

4. Les distances-coût de transport

L'analyse des configurations spatiales en géographie humaine repose principalement sur le coût de transport. Ce coût dépend bien entendu du déplacement effectué, mais aussi de la nature de ce qui est transporté. Il ne sera pas le même selon que l'on déplace une marchandise ou un individu. Le coût de transport d'une marchandise est donné par la dépense monétaire directe supportée pour transférer la marchandise. Le coût de transport d'un individu est donné par la somme de la dépense monétaire directe et de la valeur de la durée du déplacement correspondant.

4.1. Le transport d'une marchandise

4.1.1. Coût de transport d'une marchandise

Le coût de transport d'une marchandise le long d'un déplacement donné est régi par l'axiome suivant :

Axiome 8. Le coût de transport d'une unité de marchandise le long d'un déplacement $\delta(s_i, s_j)$ est une fonction c non négative et croissante de la longueur du déplacement $\delta(s_i, s_j)$ et une fonction non spécifiée de la marchandise transportée.

On le désigne par l'une des expressions équivalentes :

$c[\delta(s_i, s_j)] \equiv c[l(\delta(s_i, s_j))]$. Cet axiome implique que le coût de transport n'est pas fonction de l'origine et de la destination du déplacement : il ne dépend que de la longueur du déplacement. Intuitivement, cela signifie que l'espace de transport dans lequel on se situe est homogène. Par ailleurs, il est un fait d'expérience difficilement falsifiable que l'effort requis pour effectuer un déplacement croît avec la longueur de celui-ci. Il en va donc de même du coût monétaire correspondant (1).

(1) On pourrait préférer une fonction non décroissante de la longueur, qui pourrait donc être constante, en songeant au cas de la tarification postale intérieure. En fait, si l'on se place au niveau de l'espace international, il s'agit d'un système de tarification croissante par palliers. La tarification n'est alors qu'une grossière approximation des coûts réels qui sont bel et bien croissants avec la longueur du déplacement. Le tarif constant à l'intérieur d'un pallier résulte d'une redistribution de ces coûts entre les utilisateurs du service.

4.1.2. Distance-coût de transport d'une marchandise

Par analogie avec la distance-transport, on va définir la distance-coût de transport comme le coût de transport minimum associé au transfert de la marchandise d'un lieu vers un autre. Pour cela, il faut pouvoir identifier un déplacement de coût minimum. Les axiomes 6 et 8 impliquent que ce déplacement est identique au déplacement de longueur minimum. En effet, d'après l'axiome 6 :

$$\exists \delta^* \in \Delta(s_i, s_j) / l(\delta^*) \leq l(\delta), \forall \delta \in \Delta(s_i, s_j)$$

de sorte que, par l'axiome 8,

$$c(\delta^*) \leq c(\delta), \forall \delta \in \Delta(s_i, s_j).$$

On est donc assuré de l'existence d'un déplacement de coût minimum, et on peut définir la distance-coût de transport :

Définition 5. La distance-coût de transport d'une marchandise est donnée par l'application de A^2 vers \mathbb{R} : $(s_i, s_j) \rightarrow d_c(s_i, s_j) = \min_{\delta \in \Delta(s_i, s_j)} c(\delta)$.

Il découle quasi-immédiatement de ce qui précède que la distance-coût de transport est une fonction croissante de la distance-transport de la forme $d_c(s_i, s_j) = c[d_t(s_i, s_j)]$.

On peut établir les propriétés métriques de la distance-coût de transport au prix de deux axiomes supplémentaires très simples qui traduisent bien la réalité des pratiques observées en matière de coûts de transport.

Rappelons tout d'abord que nous avons posé à l'axiome 3 l'existence d'un déplacement nul dont la longueur est nulle. Dans la mesure où le coût de transport trouve son origine dans l'éloignement géographique, il semble naturel de penser que le coût de transport associé au déplacement nul est lui-même nul.

Axiome 9. Le coût de transport associé à un déplacement nul est égal à zéro

$$\forall s_i \in A, \delta(s_i, s_i) = \{s_i\} \Rightarrow c[\delta(s_i, s_i)] = 0$$

On obtient alors

$$\forall (s_i, s_j) \in A^2, d_c(s_i, s_j) \geq 0 \text{ par l'axiome 8,}$$

$$\forall s_i \in A, d_c(s_i, s_i) = c[\delta(s_i, s_i)] = 0 \text{ par l'axiome 9,}$$

$\forall (s_i, s_j) \in A^2, d_c(s_i, s_j) = 0 \Rightarrow d_t(s_i, s_j) = 0$ puisque la fonction est croissante $\Rightarrow s_i = s_j$ puisque d_t est une (quasi) métrique, de sorte que d_c satisfait les conditions de non négativité et d'identité.

Il est ensuite possible de préciser davantage la forme de la relation fonctionnelle reliant d_t à d_c . Pour cela, on fera appel à l'observation suivante, reprise par de nombreux auteurs en économie des transports et en théorie de la localisation (HOOVER, 1948 ; ISARD, 1956; LOCKLIN, 1954) : le coût de transport croît moins vite que la distance-transport ou varie proportionnellement avec la distance-transport. La cause principale de ce phénomène semble être l'existence de charges fixes liées au déplacement mais indépendantes de sa longueur. En outre, on relève aussi l'existence d'économies d'échelle relativement aux charges variables mais ce point est plus discuté. Enfin, on observe souvent que les politiques de tarif de transport amplifient les tendances précédentes : les tarifs sont établis de manière à réaliser une certaine redistribution des coûts à l'avantage des déplacements à longue distance. Ces considérations justifient donc l'introduction de l'axiome suivant :

Axiome 10. La distance-coût de transport d'une marchandise est une fonction concave de la distance-transport.

Etant donné que $c(d_t)$ est une fonction non négative et concave, le taux

de transport $\frac{c(d_t)}{d_t}$ est donc une fonction non croissante de la distance-

transport, conformément à ce qui a été mentionné plus haut.

On peut maintenant établir que la distance-coût de transport vérifie la condition d'inégalité triangulaire. Pour cela, on se sert de trois séries de propositions :

- (α) la distance-transport d_t vérifie l'inégalité triangulaire.
- (β) d_c est une fonction croissante de d_t
- (γ) l'axiome 10 et son implication immédiate : la fonction $c(d_t) / d_t$ est non croissante.

De (α) et (β), on tire $\forall s_i, s_j, s_k \in A$:

$$\begin{aligned}
 d_t(s_i, s_j) &\leq d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j) \Rightarrow d_c(s_i, s_j) \\
 &= c[d_t(s_i, s_j)] \leq c[d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j)] \\
 &= \frac{d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j)}{d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j)} c[d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j)] \\
 &= d_t(s_i, s_k) \frac{c[d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j)]}{d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j)} + d_t(s_k, s_j) \frac{c[d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j)]}{d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j)}
 \end{aligned}$$

De (γ),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c[d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j)]}{d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j)} \leq \frac{c[d_t(s_i, s_k)]}{d_t(s_i, s_k)} \\ \frac{c[d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j)]}{d_t(s_i, s_k) + d_t(s_k, s_j)} \leq \frac{c[d_t(s_k, s_j)]}{d_t(s_k, s_j)} \end{array} \right. \text{ et}$$

donc :

$$(s_i, s_j) \leq d_t(s_i, s_k) \frac{c[d_t(s_i, s_k)]}{d_t(s_i, s_k)} + d_t(s_k, s_j) \frac{c[d_t(s_k, s_j)]}{d_t(s_k, s_j)},$$

ou plus simplement :

$$d_c(s_i, s_j) \leq d_c(s_i, s_k) + d_c(s_k, s_j),$$

ce qui correspond à l'inégalité triangulaire pour la distance-coût de transport.

Utilisant les propriétés de quasi-métrie de d_t et les axiomes 8 à 10, nous avons établi que la distance-coût de transport vérifie les conditions d'identité, de non négativité, et d'inégalité triangulaire.

Propriété 3. Si la distance-transport est une quasi-métrie et si les axiomes 8 à 10 sont admis, alors la distance-coût de transport d'une marchandise est une quasi-métrie.

La proposition qui énonce la croissance de d_c avec d_t implique que :

$$\text{si } d_t(s_i, s_j) = d_t(s_j, s_i), \text{ alors } c[d_t(s_i, s_j)] = c[d_t(s_j, s_i)].$$

Donc, si d_t vérifie la condition de symétrie :

$$\forall (s_i, s_j) \in A^2, d_t(s_i, s_j) = d_t(s_j, s_i), \text{ on a :}$$

$$\forall (s_i, s_j) \in A^2, c[d_t(s_i, s_j)] = c[d_t(s_j, s_i)], \text{ ou}$$

$$d_c(s_i, s_j) = d_c(s_j, s_i),$$

et la distance-coût de transport vérifie la condition de symétrie.

Propriété 4. Si la distance-transport est une métrie, et si les axiomes 8 à 10 sont admis, alors la distance-coût de transport d'une marchandise est une métrie.

4.2. Le transport d'un individu

A la différence du transport d'une marchandise, le transport d'un individu conduit à distinguer deux types de déplacement. Dans le premier cas, le déplacement est **instrumental** : il est un moyen pour réaliser un but autre

que lui-même. Plus précisément, c'est la destination qui est recherchée pour ce qui s'y trouve localisé. Dans le second cas, le déplacement est **non instrumental** : il est un but en soi indépendamment de la destination. Par exemple, un déplacement dans une région touristique peut être recherché pour lui-même. Dans ce qui suit, nous ne retenons que les déplacements instrumentaux.

Nous avons déjà noté que le coût de déplacement d'un individu était composé de deux termes, à savoir la valeur du temps de transport et la dépense monétaire directe. Cela nous amène à étudier successivement le temps de transport, sa valeur et le coût généralisé de transport.

4.2.1. Distance-temps

L'approche suivie pour définir la distance-temps de transport est parfaitement similaire à celle utilisée pour définir la distance-coût de transport d'une marchandise.

Axiome 11. Le temps de transport le long d'un déplacement $\delta(s_i, s_j)$ est une fonction τ non négative et croissante de la longueur du déplacement $\delta(s_i, s_j)$.

On le désigne par l'une des expressions équivalentes :

$$\tau[\delta(s_i, s_j)] \equiv \tau[l(\delta(s_i, s_j))].$$

Partant, il est alors facile de montrer que le déplacement le plus rapide est donné par le déplacement le plus court.

Définition 6. La distance-temps de transport est donnée par l'application de A^2 vers \mathbb{R} : $d_\tau(s_i, s_j) = \min_{\delta \in \Delta(s_i, s_j)} \tau(\delta)$.

Dès lors, la distance-temps de transport est une fonction croissante de la distance-transport : $d_\tau(s_i, s_j) = \tau[d_t(s_i, s_j)]$.

En poursuivant l'analogie, on peut admettre sans difficulté l'axiome suivant :

Axiome 12. Le temps de transport associé à un déplacement nul est égal à zéro.

$$\forall s_i \in A, \delta(s_i, s_i) = \{s_i\} \Rightarrow \tau[\delta(s_i, s_i)] = 0$$

Il en résulte que la distance-temps de transport vérifie les conditions de non négativité et d'identité.

Enfin, les transports sont souvent organisés de manière que le franchissement de longues distances soit plus efficace en termes de temps (citons par exemple le cas du mode ferroviaire où les omnibus servent les itinéraires courts et les rapides les itinéraires longs). On constate également l'existence de servitudes terminales (temps d'attente) plus ou moins indépendants la longueur du déplacement. Cela conduit à introduire un nouvel axiome, qui est comparable à l'axiome 10.

Axiome 13. La distance-temps de transport est une fonction concave de la distance-transport.

Ici aussi, l'inégalité triangulaire peut être déduite, de sorte que nous pouvons affirmer

Propriété 5. Si la distance-transport est une (quasi-) métrique et si les axiomes 11, 12 et 13 sont admis, alors la distance-temps de transport est une (quasi-)métrique.

4.2.2. Valeur du temps de transport d'un individu (1)

Soit un individu dont l'utilité U est une fonction croissante du revenu R et du temps de loisirs L . Son revenu est une donnée R_0 . Son temps de travail étant généralement institutionnalisé et fixe, son temps disponible (par période) pour le loisir et le transport est aussi une donnée L_0 .

Supposons maintenant que l'individu considéré désire se rendre du lieu s_i au lieu s_j . Il choisit pour cela un déplacement $\delta \in \Delta(s_i, s_j)$.

(1) Pour une autre approche, on peut consulter par exemple WINGO (1961).

Le temps correspondant, à savoir $\tau(\delta)$, est pris sur sa dotation en temps disponible L_0 , ce qui réduit d'autant son temps de loisirs. **La valeur du temps** $\tau(\delta)$ pour l'individu est alors définie par le montant non négatif de monnaie v qu'il est prêt à payer pour éviter ce temps de transport. Plus précisément, ce montant de monnaie v est celui pour lequel l'individu est indifférent entre, d'une part, payer v et éviter le temps de transport $\tau(\delta)$ et, d'autre part, ne rien payer et réduire son temps de loisirs de $\tau(\delta)$:

$$U(R_0 - v, L_0) = U(R_0, L_0 - \tau(\delta)).$$

Etudions maintenant les propriétés de la solution $v(\tau)$ de cette équation. Pour cela, on suppose que la fonction d'utilité U est deux fois continuellement différentiable. Le calcul de la différentielle première totale montre que

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{U'_L}{U'_R}$$

où U'_L et U'_R sont évalués respectivement aux points $(R_0, L_0 - \tau(\delta))$ et $(R_0 - v, L_0)$. Puisque U est croissante dans R et L , on voit que $\frac{dv}{d\tau} > 0$.

Cela signifie que **la valeur du temps de transport est une fonction croissante du temps de transport.**

Considérons maintenant la dérivée seconde. Un calcul simple montre que

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} = -U''_L \frac{U'_R}{U'_R} + (U'_L)^2 \cdot \frac{U''_R}{U'_R}.$$

A priori, le signe de $\frac{d^2v}{d\tau^2}$ est donc indéterminé. Toutefois, il est possible d'obtenir une propriété intéressante au prix de deux nouveaux axiomes. Le premier est relativement standard en théorie de l'utilité.

Axiome 14. L'utilité U est une fonction strictement concave du loisir.

Cela signifie que l'utilité marginale du loisir est décroissante.

On pose ensuite l'axiome suivant :

Axiome 15. L'utilité marginale du revenu est constante.

Ces deux axiomes impliquent que le taux marginal de substitution entre le loisir et le revenu est décroissant.

Il est aisé de vérifier que, étant donné les axiomes 14 et 15, on a

$\frac{d^2v}{d\tau^2} > 0$ de sorte que **la valeur du temps de transport est une fonction**

convexe du temps de transport.

Supposons maintenant que δ soit un déplacement de durée minimum de s_i vers s_j , et donc, par l'axiome 11, un déplacement de longueur minimum.

Il vient : $v(\tau)$ est une fonction convexe de τ , et, par l'axiome 13, τ est une fonction concave de la distance-transport d_t : $v[\tau(d_t)]$. Aucun

résultat général ne peut donc être obtenu quant à la forme de la fonction composée. En particulier, la concavité de cette fonction n'est pas garantie. Considérons par exemple les spécifications suivantes :

$$v(\tau) = (\tau)^\alpha, \alpha > 1$$

$$\tau(d_t) = (d_t)^\beta, 0 < \beta < 1.$$

Alors $v[\tau(d_t)] = d_t^{\alpha\beta}$ qui est convexe en d_t si $\alpha\beta \geq 1$ et concave si $\alpha\beta \leq 1$.

Alternativement, on peut remplacer les axiomes 14 et 15 par les axiomes suivants :

Axiome 14'. L'utilité marginale du loisir est constante.

Axiome 15'. L'utilité U est une fonction strictement concave du revenu.

Dans le cas présent, le taux marginal de substitution entre le loisir et le revenu est croissant.

Il est alors facile de voir que les axiomes 14' et 15' impliquent

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} < 0$$

ce qui veut dire que **la valeur du temps de transport est une fonction concave du temps de transport**. Par conséquent, si δ est un déplacement de durée minimum, $v[\tau(d_t)]$ est une fonction **concave** de la distance-transport.

A priori, rien ne nous permet d'opter pour un ensemble d'axiomes ou pour l'autre. Les situations correspondantes sont toutes deux plausibles et seules des études empiriques permettraient de trancher.

4.2.3. Distance-coût de transport d'un individu

On sait que le coût de transport C d'un individu le long d'un déplacement $\delta(s_i, s_j)$ est donné par la somme du coût monétaire direct $c[\delta(s_i, s_j)]$ et de la valeur du temps de transport $v[\tau(\delta(s_i, s_j))]$. Le coût monétaire direct c a ici les mêmes propriétés que le coût de transport d'une marchandise.

Par analogie avec la distance-coût de transport d'une marchandise, on va définir la distance-coût de transport d'un individu comme le coût de transport minimum associé à un déplacement d'un lieu vers un autre.

Il est aisé de voir que le déplacement de coût minimum est le déplacement de longueur minimum. En effet, nous savons par ce qui précède que le coût monétaire direct et la valeur du temps de transport sont des fonctions croissantes de la distance-transport. En conséquence, le déplacement de longueur minimum est celui qui minimise à la fois le coût monétaire direct et la valeur du temps de transport. Il est dès lors le déplacement de coût minimum. Ceci assure l'existence d'un déplacement de coût minimum quels que soient les lieux origine et destination. On peut alors définir la distance-coût de transport :

Définition 7. La distance-coût de transport d'un individu est donnée par l'application de A^2 vers \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} (s_i, s_j) \rightarrow d_C(s_i, s_j) &= \min_{\delta \in \Delta(s_i, s_j)} C(\delta) \\ &= \min_{\delta \in \Delta(s_i, s_j)} [c(\delta) + v[\tau(\delta)]]. \end{aligned}$$

En tout lieu, il existe un déplacement de coût monétaire nul (axiome 9), ainsi qu'un déplacement de durée nulle (axiome 12). Dans ce cas, l'équation

$$U(R_0 - v, L_0) = U(R_0, L_0 - \tau)$$

montre que le coût du temps associé à ce déplacement est lui-même nul.

Comme dans les cas précédents, il est aisé de montrer que la distance-coût de transport vérifie les propriétés d'identité et de non négativité.

Dans le cas où les axiomes 14 et 15 sont vérifiés, la concavité de la fonction $v[\tau(d_t)]$ n'est pas garantie. En conséquence, la concavité de la fonction de coût $C(d_t) = c(d_t) + v[\tau(d_t)]$ n'est pas non plus garantie.

Or la concavité est apparue précédemment (§ 4.1.2.) comme une condition essentielle pour établir l'inégalité triangulaire. Donc, en général, **la distance-coût de transport d'un individu ne vérifie pas nécessairement cette inégalité, donc n'est pas une quasi-métrique.**

Dans le cas opposé où les axiomes 14' et 15' sont vérifiés, les fonctions $c(d_t)$ et $v[\tau(d_t)]$ sont concaves en d_t , donc $C(d_t)$ est concave en d_t .

Dans ce cas, la propriété d'inégalité triangulaire se démontre de la même manière qu'au § 4.1.2., et on peut énoncer :

Propriété 6. Si la distance-transport est une (quasi-)métrique, et si les axiomes 11, 12, 13, 14' et 15' sont admis, alors la distance-coût de transport d'un individu est une (quasi-)métrique.

5. Conclusion

Sur la base d'une série d'axiomes intuitifs, nous avons construit des concepts génériques de distance recouvrant à peu près toutes les représentations analytiques utilisées dans la littérature. Ces concepts étant tout à fait généraux, ils peuvent également recouvrir de nouvelles représentations.

Nous avons démontré, sur la base de nos axiomes, que ces concepts correspondaient, selon le cas, à des quasi-métriques ou à des métriques. Cette axiomatique peut donc servir de guide à la construction de représentations particulières. Lorsqu'on a l'expression analytique d'une distance, il est en général aisé de montrer qu'elle possède -ou non- les propriétés d'une métrique. On sait maintenant **pourquoi** elle les possède, ce qui peut éviter des tâtonnements à la construction. Une distance devra avant tout respecter ces axiomes, si l'on veut être sûr, en fin de compte, d'obtenir une métrique. La présente axiomatique, tout en approfondissant la **connaissance** théorique de l'espace, constitue aussi un **instrument méthodologique** au service de la représentation de l'espace.

Bibliographie

- BEGUIN (H.), THISSE (J.), 1979.** "An Axiomatic Approach to Geographical Space. Geographical Analysis, 11 (325-341).
- BERGE (C.), 1966.** Espaces topologiques - fonctions multivoques. Paris : Dunod.
- BLUMENTHAL (L.M.), 1970.** Theory and Applications of Distance Geometry. New York : Chelsea.
- CHOQUET (G.), 1973.** Cours d'analyse - tome II : topologie. Paris : Masson.
- HOOVER (E.M.), 1948.** The Location of Economic Activity, New York.
- HOOVER (E.M.), 1971.** An Introduction to Regional Economics. New York : Knopf.
- ISARD (W.), 1956.** Location and Space-Economy. Cambridge : M.I.T. Press.
- LOCKLIN (D.P.), 1954.** Economics of Transportation. Homewood, Il. : Irwin.
- SIMMONS (G.F.), 1963.** Introduction to Topology and Modern Analysis. New York : McGraw-Hill.
- WHYBURN (G.T.), 1942.** What is a Curve? American Mathematical Monthly, 49 (493-497).
- WINGO (L.), 1961.** Transportation and Urban Land, Baltimore : Johns Hopkins.