



HAL
open science

Tests d'exogénéité

Alberto Holly

► **To cite this version:**

Alberto Holly. Tests d'exogénéité. [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1984, 25 p., bibliographie. hal-01542787

HAL Id: hal-01542787

<https://hal.science/hal-01542787>

Submitted on 20 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

I.M.E.

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU C.N.R.S.

DOCUMENT DE TRAVAIL



INSTITUT DE MATHEMATIQUES ECONOMIQUES

UNIVERSITE DE DIJON

FACULTE DE SCIENCE ECONOMIQUE ET DE GESTION

4, BOULEVARD GABRIEL — 21000 DIJON

N° 71

TESTS D'EXOGENEITE

Alberto HOLLY

Novembre 1984

TESTS D'EXOGENEITE *

par Alberto Holly

novembre 1984

Adresse de l'auteur : Département d'économétrie
et d'économie politique (DEEP)
Université de Lausanne
Ecole des H.E.C.
1015 Lausanne
Suisse

* Ce texte a été rédigé pour le 16ème colloque annuel de l'I.M.E.
(30 novembre 1984). Il a été financé, en partie, par le Fonds
national suisse de la recherche scientifique,
subside no 1.582-082.

R E S U M E

Dans cet article nous considérons le problème consistant à tester l'exogénéité d'un sous-ensemble de variables supposées a priori endogènes dans un modèle économétrique.

Nous montrons d'abord qu'il est possible de présenter de façon générale ce problème à la fois dans le cadre des variables instrumentales et dans celui du maximum de vraisemblance, le cas des modèles à équations simultanées en étant un cas particulier.

Nous proposons une procédure simple permettant d'effectuer ce test sur la base d'une "régression étendue". Nous comparons cette procédure à celles qui ont été proposées dans la littérature. Nous montrons également qu'elle possède les mêmes propriétés asymptotiques (locales) que celle des tests classiques fondés sur la vraisemblance.

I. INTRODUCTION

Nous assistons depuis quelques années à un intérêt marqué pour l'étude des tests d'exogénéité portant sur un sous-ensemble de variables supposées endogènes, dans le cadre des modèles à équations simultanées. Parmi les références nous devons citer : Dufour (1980), Engle (1982), Hausman-Taylor (1981), Hwang (1980), Smith (1983), Spencer-Berk (1981), (1982), Reiss (1982).

L'objet de ce présent travail est double. Tout d'abord, nous allons montrer qu'il existe un formalisme permettant d'étudier le problème de l'exogénéité dans le cadre général des variables instrumentales, et que, de ce fait, le cas des modèles à équations simultanées en est un cas particulier. Nous voulons également proposer une méthode simple permettant d'effectuer le test d'exogénéité, exigeant de petites modifications à un programme de régression par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO). ^{1/}

A la section II, nous présentons le cadre général dans lequel le problème du test d'exogénéité peut être étudié. Il s'agit à la fois de l'approche en terme de variables instrumentales (VI) et de l'approche du maximum de vraisemblance (MV).

Nous proposons, dans la section III, une procédure permettant de tester l'hypothèse d'exogénéité dans le cadre d'une "régression étendue" (notions introduite par Hausman (1978)).

La comparaison avec d'autres procédures suggérées dans la littérature, et mentionnées plus haut, est faite à la section IV. Nous montrons également à la section V que la procédure suggérée ici possède les mêmes propriétés asymptotiques (locales) que celles des tests classiques appliqués dans le cadre de la vraisemblance. Nous concluons enfin ce travail par quelques considérations numériques.

II. EXOGENEITE : VARIABLES INSTRUMENTALES ET MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE EN INFORMATION LIMITEE.

De nombreux modèles économétriques peuvent être estimés en utilisant le formalisme des variables instrumentales. On considère dans ce cas un "pseudo modèle linéaire".

$$(2.1) \quad \begin{cases} y = Zd + u \\ \text{avec} \\ E(u) = 0, V(u) = \sigma^2 I \\ u \text{ non indépendant de } Z \end{cases}$$

pour lequel on suppose l'existence de variables instrumentales H.

Le plus souvent, il est commode de retenir la formulation suivante

$$(2.2) \quad \begin{cases} y = Zd + u \\ Z = HD + V \end{cases}$$

où H est une matrice de T observations sur p variables instrumentales, D une matrice de coefficients inconnus de format (p,k), et V une matrice de perturbations, et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{plim } \frac{H'u}{T} = 0 \\ \text{plim } \frac{H'H}{T} = M_{HH} \text{ de rang } P \gg k \\ \text{plim } \frac{H'V}{T} = 0 \end{array} \right.$$

D de rang k

Cette formulation est particulièrement adaptée à l'étude des équations simultanées. Il est important de noter ici qu'elle est très générale en ce sens qu'elle permet de décrire toutes les situations dans lesquelles la technique des variables instrumentales peut être utilisée.

Dans le cas particulier où certaines colonnes de Z sont indépendantes, par hypothèse, de u, il convient d'adopter la formulation suivante

$$(2.3) \quad \begin{cases} y = Y \alpha + X_1 \beta + u \\ Y = X \Pi + V \end{cases}$$

où $X = (X_1, X_2)$ est une matrice de T observations sur K variables instrumentales.

Notons que dans cette formulation nous pouvons interpréter la première équation comme étant une équation structurelle particulière d'un modèle à équations simultanées (disons la première) et la deuxième comme étant la forme réduite associée aux variables endogènes apparaissant dans le membre de droite. Dans ce cas, en adoptant la terminologie de Godfrey - Wickens (1982), nous désignerons ce modèle par "système incomplet", car il ignore les variables endogènes du modèle n'apparaissant pas dans l'équation structurelle en question.

Toutefois, notons encore une fois que ce formalisme dépasse le simple cadre des équations simultanées.

Supposons à présent que l'on décompose Y , de format (T,N) en $Y = (Y_1, Y_2)$ où Y_1 est de format (T, N_1) et Y_2 de format (T, N_2) . Tout en admettant que Y_1 est corrélé avec u , nous pouvons vouloir tester l'hypothèse selon laquelle Y_2 est corrélé avec u (c'est-à-dire Y_2 endogène dans cette équation particulière) ou bien est indépendante de u (c'est-à-dire que Y_2 est "exogène" dans cette équation).

Afin de mettre en oeuvre des procédures permettant de tester cette hypothèse, il est commode de supposer que les lignes de (u, V) sont indépendantes et suivent une loi normale d'espérance nulle et de matrice de variances - covariances

$$(2.4) \quad \psi = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \theta' \\ \theta & \Omega \end{pmatrix}$$

A la décomposition de Y en (Y_1, Y_2) correspond la décomposition de θ en

$$(2.5) \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Tester l'exogénéité de Y_2 revient dans ce cas à tester l'indépendance de Y_2 et de u , c'est-à-dire $H_0 : \theta_2 = 0$ contre $H_a : \theta_2 \neq 0$.

L'approche fondée sur le maximum de vraisemblance permet d'appliquer des procédures classiques, désormais bien connues en économétrie, à savoir

le test du score (ou encore, test du Multiplicateur de Lagrange), le test de Wald, et le test des rapports des maxima de vraisemblance.

L'objet du présent article est de proposer une procédure alternative simple permettant d'effectuer le même test. Avant de la décrire, il convient d'indiquer quelques résultats importants et fort utiles liés au maximum de vraisemblance.

Revenons, à cet effet, au système (2.3), dans lequel nous lui donnons l'interprétation de "système incomplet", dans le cadre d'un modèle à équations simultanées. Il est important de remarquer que, si nous estimons ce "système incomplet" par le maximum de vraisemblance, nous obtenons comme estimateurs des paramètres de la première équation, les estimateurs du maximum de vraisemblance en information limitée (MVIL). ^{2/}

Rappelons, à ce stade, que les estimateurs des variables instrumentales (VI) de ces mêmes paramètres sont les doubles moindres carrés (2MC) avec X pour instruments.

Afin de préciser certaines notations, écrivons la première équation de la manière suivante

$$(2.6) \quad y = Y_1 \alpha_1 + Y_2 \alpha_2 + X_1 \beta + u$$

et posons

$$(2.7) \quad \delta' = (\alpha_1', \alpha_2', \beta')$$

L'équation précédente s'écrit, plus traditionnellement

$$y = Z \delta + u$$

avec

$$Z = (Y_1, Y_2, X_1).$$

Nous désignerons par $\tilde{\delta}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance du système (2.3) [qui est l'estimateur du MVIL, noté $\tilde{\delta}_{MVIL}$, lorsque ce système s'interprète comme un "système incomplet"]. Nous désignerons également par $\tilde{\delta}_X$ l'estimateur des VI de δ , lorsque X sont les variables instrumentales, c'est-à-dire

$$\tilde{\delta}_X = (Z' P_X Z)^{-1} Z' P_X y$$

avec $P_X = X (X'X)^{-1} X'$.

Il convient également, à ce stade de la présentation de préciser l'expression du logarithme de la vraisemblance associée au modèle (2.3).

Si nous posons

$$S = \begin{pmatrix} u'u & u'v \\ v'u & v'v \end{pmatrix}$$

celle-ci s'écrit

$$(2.8) \quad \mathcal{L} = \text{const.} - (T/2) \text{Log det } \psi - (1/2) \text{tr } \psi^{-1} S$$

Nous pouvons écrire cette vraisemblance de deux manières différentes, selon la décomposition de ψ^{-1} . En premier lieu, si nous décomposons

cette matrice en

$$(2.9) \quad \Psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma^2 + (1/\sigma^4)\theta'(\Omega - (1/\sigma^2)\theta\theta')^{-1}\theta & -(1/\sigma^2)\theta'(\Omega - (1/\sigma^2)\theta\theta')^{-1} \\ -(1/\sigma^2)(\Omega - (1/\sigma^2)\theta\theta')^{-1}\theta & (\Omega - (1/\sigma^2)\theta\theta')^{-1} \end{pmatrix}$$

nous avons

$$(2.10) \quad \begin{aligned} L = \text{const.} - (T/2)\log \sigma^2 - u'u / 2\sigma^2 - (T/2)\log \det(\Omega - (1/\sigma^2)\theta\theta') \\ - (1/2)\text{tr}[(\Omega - (1/\sigma^2)\theta\theta')^{-1}(V - u\theta'/\sigma^2)'(V - u\theta'/\sigma^2)] \end{aligned}$$

Cette expression est utile lorsque l'on souhaite établir, de façon commode, diverses propriétés "algébriques" des estimateurs du MVIL. Elle correspond à la factorisation de la loi jointe $D(y, Y)$ en $D(Y|y) \cdot D(y)$, où $D(Y|y)$ est la loi conditionnelle de Y sachant y et $D(y)$ la loi marginale de (y) .

En deuxième lieu, si nous décomposons Ψ^{-1} en

$$(2.11) \quad \Psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\eta^2 & -\theta'\Omega^{-1}/\eta^2 \\ -\Omega^{-1}\theta/\eta^2 & \Omega^{-1} + (\Omega^{-1}\theta\theta'\Omega^{-1}/\eta^2) \end{pmatrix}$$

avec

$$(2.12) \quad \eta^2 = \sigma^2 - \theta'\Omega^{-1}\theta$$

nous avons,

$$(2.13) \quad \begin{aligned} L = \text{const.} & - (T/2) \log \eta^2 - (1/2\eta^2) (u - V\Omega^{-1}\theta)' (u - V\Omega^{-1}\theta) \\ & - (T/2) \log \det \Omega - (1/2) \text{tr} \Omega^{-1} V'V \end{aligned}$$

Elle correspond à la factorisation de la distribution jointe $D(y, Y)$ en la distribution conditionnelle $D(y|Y)$ et la loi marginale $D(Y)$.

Comme nous le verrons un peu plus loin, l'expression (2.13) sera à la base de la procédure de test que nous allons suggérer. Toutefois, avant de décrire cette procédure, il convient d'indiquer quelques résultats concernant l'estimation du modèle (2.3) sous contrainte $\theta_2 = 0$, c'est-à-dire lorsque l'hypothèse nulle est vérifiée.

Ainsi que nous l'avons noté plus haut, l'exogénéité de Y_2 est équivalente à son indépendance avec la perturbation u . Du point de vue de l'estimation par la méthode des VI, cela revient à inclure Y_2 parmi les variables instrumentales, c'est-à-dire à considérer le système

$$(2.14) \quad \begin{cases} y = Y_1 \alpha_1 + Y_2 \alpha_2 + X_1 \beta + u \\ Y_1 = (Y_2, X)C + E \end{cases}$$

Si nous posons

$$H = (Y_2, X)$$

l'estimateur des VI de δ est, bien entendu,

$$\tilde{\delta}_H = (Z'P_H Z)^{-1} Z'P_H y$$

avec $P_H = H(H'H)^{-1}H'$.

considérons à présent l'estimation par le maximum de vraisemblance sous contrainte $\theta_2 = 0$. Désignons par $\tilde{\delta}^0$ l'estimateur de δ obtenu en maximisant la vraisemblance (2.8) du système initial (2.3). L'intuition suggère que lorsque Y_2 est indépendant de u , $\tilde{\delta}^0$ doit être identique à l'estimateur du MV de δ obtenu en ajoutant Y_2 aux instruments X . Autrement dit, l'intuition suggère que l'estimateur $\tilde{\delta}^0$ de δ , obtenu en minimisant (2.8) sous contrainte $\theta_2 = 0$, est identique à l'estimateur du MV de δ dans le système (2.14) où Y_2 fait partie des instruments.

Des calculs relativement simples permettent de confirmer ces résultats. Il est possible de montrer, en effet, que lorsque $\theta_2 = 0$, la vraisemblance du "système incomplet" initial (2.8) se décompose en un produit de deux vraisemblances à savoir, celle du second "système incomplet" (2.14) (dans lequel Y_2 est supposé exogène) et celle de la forme réduite de Y_2 . Deux remarques importantes peuvent alors être faites sur la base de ce résultat. En premier lieu, la définition de l'exogénéité utilisée jusqu'à présent correspond, dans le cadre de notre problème, à "l'exogénéité faible" de Y_2 , au sens de Engle - Hendry - Richard (1983). En deuxième lieu, cette factorisation nous montre bien que l'estimateur du MV de δ dans le système incomplet initial (2.3) sous contrainte $\theta_2 = 0$ est identique à l'estimateur du MV de δ dans le second système incomplet (2.14) dans lequel Y_2 est ajouté à X pour former la liste des instruments.

Indiquons encore une fois que les résultats que nous avons indiqués jusqu'à présent sont valables dans le cadre général des variables instrumentales. Ils nous seront utiles pour les développements que nous allons proposer ci-dessous.

III. REGRESSION ETENDUE

Les résultats décrits précédemment peuvent conduire à la mise en oeuvre des procédures classiques en vue de tester l'exogénéité (faible) de Y_2 . Nous allons présenter maintenant une procédure permettant de tester la même hypothèse dans le cadre d'une "régression étendue" (selon la terminologie introduite par Hausman (1978)).

Il convient sans doute de présenter brièvement, à ce stade, l'idée à la base de la suggestion de Hausman (1978). Supposons en effet que l'on souhaite tester l'exogénéité de Y (c'est-à-dire que nous supposons que Y_2 se confond avec Y) et considérons la régression

$$y = Y\alpha + X_1\beta + v$$

Désignons par \hat{V} le résidu de la régression de Y sur X , et remplaçons Y par $\hat{Y} + \hat{V}$. Nous obtenons la nouvelle régression

$$y = \hat{Y}\alpha + X_1\beta + \hat{V}\alpha + v.$$

Etant donné les propriétés de \hat{V} , l'estimateur des MCO de α , comme coefficient associé à \hat{Y} est l'estimateur des 2MC habituel $\tilde{\alpha}_{2MC}$. Toutefois, l'estimateur des MCO de α , comme coefficient associé à \hat{V} aura la même probabilité limite que celle de $\tilde{\alpha}_{2MC}$ que lorsque Y est exogène dans cette régression. D'où l'idée de tester l'égalité des estimateurs de α et γ dans la régression suivante

$$y = \hat{Y} \alpha + X_1 \beta + \hat{V} \gamma + v$$

Celle-ci peut également s'écrire

$$y = Y\alpha + X_1 \beta + \hat{V}(\gamma - \alpha) + v$$

ou encore,

$$y = Y \alpha + X_1 \beta + \hat{V} \phi + v$$

Tester $\gamma = \alpha$ revient donc à tester $\phi = 0$ dans cette "régression étendue". Ce raisonnement est plus difficile à généraliser dans le cas d'un test portant sur le sous-ensemble Y_2 . Pour cette raison, la régression étendue que nous suggérons ici procède d'un point de vue différent. Comme nous l'avons signalé plus haut, les deux premiers termes apparaissant dans l'expression de la log-vraisemblance (2.13) correspondent à la loi conditionnelle de y sachant Y . Il en résulte, en particulier, que

$$(3.1) \quad E(y|Y) = Y_1 \alpha_1 + Y_2 \alpha_2 + X_1 \beta + v \Omega^{-1} \theta$$

et que

$$(3.2) \quad V(y|Y) = \eta^2$$

Nous constatons ainsi que $E(y|Y)$ est linéaire en θ . En raisonnant par analogie avec ce que nous savons de la relation entre "régression théorique" et régression linéaire, la relation (3.1) nous invite à considérer une régression de la forme

$$y = Y_1 \alpha_1 + Y_2 \alpha_2 + X_1 \beta + V \Omega^{-1} \theta + e.$$

Toutefois, dans une telle régression, Ω est inconnue et V n'est pas observable. Nous sommes donc conduits à les remplacer par des "estimateurs". En posant $M_X = I_T - P_X$, une "estimation" naturelle de V est $\hat{V} = M_X Y$, résidu de la régression par les moindres carrés ordinaires (MCO) de Y sur X , et une estimation non moins naturelle de Ω est $\hat{\Omega} = \hat{V}' \hat{V} / T$. Autrement dit, en négligeant T apparaissant dans $\hat{\Omega}$, nous sommes conduits à considérer la "régression étendue" suivante

$$(3.3) \quad y = Y_1 \alpha_1 + Y_2 \alpha_2 + X_1 \beta + \hat{V} (\hat{V}' \hat{V})^{-1} \theta + e.$$

La procédure proposée dans ce travail est de tester l'hypothèse nulle $H_0: \theta_2 = 0$ contre l'hypothèse alternative $H_a: \theta_2 \neq 0$ en utilisant cette "régression étendue" estimée par les MCO. Il faut noter ici que dans le cas où Y_2 est l'ensemble des variables Y , le changement de paramètre $(\hat{V}' \hat{V})^{-1} \theta = \phi$ nous ramène à la régression étendue (3.3) précédemment suggérée par Hausman (1978).

Il faut également noter que la "régression étendue" (3.3) ne dépend pas d'un choix particulier du sous-ensemble Y_2 de Y . En effet, les variables additionnelles $\hat{V} (\hat{V}' \hat{V})^{-1}$, sont formées à partir des résidus des MCO de Y sur X .

Nous reviendrons plus loin à certains aspects numériques liés à la procédure de test que nous suggérons ici. Mais auparavant, nous allons établir quelques propriétés intéressantes de cette procédure.

IV. COMPARAISON AVEC D'AUTRES PROCEDURES SUGGEREES DANS LA LITTERATURE

Nous allons comparer ici la procédure que nous venons d'indiquer avec celle qui a été proposée indépendamment par Spencer-Berk (1981), (1982), Hausman-Taylor (1981) et Reiss (1982).

Il est sans doute utile de rappeler que cette procédure est du type "test m de Hausman", en ce sens qu'elle compare les deux estimateurs des VI de δ à savoir $\tilde{\delta}_X$ et $\tilde{\delta}_H$. Plus exactement, cette procédure est fondée sur une forme quadratique du type

$$(4.1) \quad (\tilde{\delta}_X - \tilde{\delta}_H)' [V(\tilde{\delta}_X) - V(\tilde{\delta}_H)]^- (\tilde{\delta}_X - \tilde{\delta}_H)$$

où $[]^-$ désigne une g-inverse quelconque, et, par convention,

$$(4.2) \quad V(\tilde{\delta}_X) = \sigma^2 (Z'P_X Z)^{-1}$$

$$(4.3) \quad V(\tilde{\delta}_H) = \sigma^2 (Z'P_H Z)^{-1}$$

Notons que l'estimation de σ^2 étant un aspect que nous serons amenés à commenter plus loin, nous allons ignorer, pour l'instant, σ^2 et comparer (numériquement) la procédure que nous suggérons avec la forme quadratique

$$(4.4) \quad (\tilde{\delta}_X - \tilde{\delta}_H)' [(Z'P_X Z)^{-1} - (Z'P_H Z)^{-1}]^{-1} (\tilde{\delta}_X - \tilde{\delta}_H)$$

A cet effet, nous allons écrire notre régression étendue (3.3) sous une forme faisant apparaître explicitement θ_1 et θ_2 . Posons,

$$Q = (Y_2' M_2 Y_2)^{-1}$$

$$R = (Y_1' M_1 Y_1 - Y_1' M_1 Y_2 Q Y_2' M_1 Y_1)^{-1}$$

Nous avons,

$$(\hat{V}' \hat{V})^{-1} = \begin{bmatrix} R & -R(Y_1' M_1 Y_2)Q \\ -Q(Y_2' M_2 Y_1)R & Q + Q(Y_2' M_2 Y_1)R(Y_1' M_1 Y_2)Q \end{bmatrix}$$

de sorte que la régression étendue (3.3) peut s'écrire

$$(4.5) \quad y = Y_1 a_1 + Y_2 a_2 + X_1 \beta + F_1 \theta_1 + F_2 \theta_2 + e$$

avec

$$F_1 = [M_1 Y_1 - M_1 Y_2 Q(Y_2' M_2 Y_1)] R$$

$$F_2 = M_2 Y_2 [Q + Q(Y_2' M_2 Y_1)R(Y_1' M_1 Y_2)Q] - M_2 Y_2 R(Y_1' M_1 Y_2)Q$$

A ce stade, il convient également de citer certains résultats que nous allons utiliser un peu plus loin, sans y faire, à chaque fois, référence explicite.

Tout d'abord, puisque l'espace engendré par les colonnes de X est contenu dans celui qui est engendré par les colonnes de H, nous avons

$$(4.6) \quad P_H = P_X + M_2 Y_2 Q Y_2' M_2$$

Ensuite, il est aisé de vérifier que F_1 et F_2 vérifient les relations suivantes.

$$(4.7) \quad Y_1' F_1 = I_{N_1}; \quad Y_1' F_2 = 0; \quad X_1' F_1 = 0; \quad F_1' F_1 = R; \quad Y_1' - R^{-1} F_1' = Y_1' P_H;$$

La première étape permettant de comparer la procédure suggère ici est le résultat suivant :

LEMME : 1) Lorsque $\theta_2 = 0$, l'estimateur des MCO de δ dans la régression étendue (3.) est l'estimateur des VI de δ , en supposant Y_2 exogène, c'est-à-dire $\delta_H = (Z' P_H Z)^{-1} Z' P_H y$.

2) Lorsque $\theta_2 \neq 0$, l'estimateur des MCO de δ dans la régression étendue (3.3) est l'estimateur des VI habituel $\delta_X = (Z' P_X Z)^{-1} Z' P_X y$.

DEMONSTRATION

Nous allons nous limiter à la démonstration de 1), puisque celle de 2) est tout-à-fait semblable.

En utilisant les relations (4.7) les équations normales de la régression étendue s'écrivent, lorsque $\theta_2 = 0$,

$$\begin{aligned} Y_1' Y_1 \hat{a}_1 + Y_1' Y_2 \hat{a}_2 + Y_1' X_1 \hat{\beta} + \hat{\theta}_1 &= Y_1' y \\ Y_2' Y_1 \hat{a}_1 + Y_2' Y_2 \hat{a}_2 + Y_2' X_1 \hat{\beta} &= Y_2' y \\ X_1' Y_1 \hat{a}_1 + X_1' Y_2 \hat{a}_2 + X_1' X_1 \hat{\beta} &= X_1' y \\ \hat{a}_1 + R \hat{\theta}_1 &= F_1' y \end{aligned}$$

En substituant $\hat{\theta}_1$ de la dernière équation dans la première, et en utilisant la dernière relation de (4.7) ainsi que l'expression de R^{-1} nous obtenons

$$Y_1' P_H Y_1 \hat{a}_1 + Y_1' Y_2 \hat{a}_2 + Y_1' X_1 \hat{\beta} = Y_1' P_H y$$

que nous pouvons écrire

$$(Z'P_H Z) \hat{\delta} = Z'P_H y$$

Ceci montre bien que l'estimateur des MCO de δ est $\tilde{\delta}_H$ comme indiqué dans l'énoncé.

Nous devons introduire de nouvelles notations en vue de la deuxième étape de la comparaison que nous souhaitons effectuer. Désignons par $\tilde{\theta}_{1,X}$ et $\tilde{\theta}_{1,H}$ respectivement les estimateurs non contraints et contraints (avec $\theta_2 = 0$) de θ_1 dans la régression (4.5) et désignons par $\tilde{\theta}_2$ l'estimateur non contraint de θ_2 .

Afin de simplifier la présentation des résultats, nous allons omettre la variance des perturbations dans l'expression de la "variance" des estimateurs des MCO dans la régression étendue et poser

$$V \begin{bmatrix} \delta_X \\ \tilde{\theta}_{1,X} \\ \tilde{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B^{-1} \\ B' & C \end{bmatrix}$$

avec,

$$A = \begin{bmatrix} Y_1'Y_1 & Y_1'Y_2 & Y_1'X_1 & I_{N_1} \\ Y_2'Y_1 & Y_2'Y_2 & Y_2'X_1 & 0 \\ X_1'Y_1 & X_1'Y_2 & X_1'X_1 & 0 \\ I_{N_1} & 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

$$B' = (0 : I_{N_2} : 0 : -Q(Y_1'M_1 Y_1)R)$$

$$C = Q + Q(Y_2'M_2 Y_2)R(Y_1'M_1 Y_1)Q$$

Nous avons,

$$V \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_H \\ \tilde{\theta}_{1,H} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

$$V \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_X \\ \tilde{\theta}_{1,X} \end{bmatrix} = (A - BC^{-1}B')^{-1}$$

et

$$V(\tilde{\theta}_2) = (C - B'A^{-1}B)^{-1}$$

Nous allons à présent citer un résultat dont la démonstration se trouve dans Holly (1983).

PROPOSITION : La forme quadratique

$$\begin{bmatrix} \tilde{\delta}_X - \tilde{\delta}_H \\ \tilde{\theta}_{1,X} - \tilde{\theta}_{1,H} \end{bmatrix}' \left[\begin{array}{c} V \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_X \\ \tilde{\theta}_{1,X} \end{bmatrix} \\ - V \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_H \\ \tilde{\theta}_{1,H} \end{bmatrix} \end{array} \right] - \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_X - \tilde{\delta}_H \\ \tilde{\theta}_{1,X} - \tilde{\theta}_{1,H} \end{bmatrix}$$

est numériquement invariante par rapport au choix de la g-inverse est égale à $\tilde{\theta}_2' [V(\tilde{\theta}_2)]^{-1} \tilde{\theta}_2$ (presque sûrement).

Les tests statistiques en vue de tester l'exogénéité de Y_2 , sur la base de la régression étendue ont, au dénominateur, $\tilde{\theta}_2' [V(\tilde{\theta}_2)]^{-1} \tilde{\theta}_2$. Pour montrer que cette quantité est égale à la "statistique-m de Hausman" donnée par (4.4) il suffit de remarquer, que celle-ci est un cas particulier de la forme quadratique apparaissant dans l'énoncé de la Proposition (ce résultat est démontré dans Holly (1983)).

Pour conclure cette comparaison, il convient de souligner l'aspect pratique du résultat que nous venons de montrer : le recours à la "régression étendue" nous permet de calculer un élément important des statistiques de test sans avoir recours au calcul d'inverse généralisée.

V. EFFICACITE ASYMPTOTIQUE LOCALE

Nous avons souligné jusqu'à présent la facilité numérique de mise en oeuvre de la procédure de test dans le cadre de la régression étendue. Toutefois, cet aspect ne doit pas suffire à lui seul, à indiquer sa supériorité vis-à-vis d'autres procédures. En effet, une question importante doit être posée : cette procédure nous fait-elle perdre de la puissance par rapport aux procédures classiques fondées sur la vraisemblance ? Notons que la réponse à cette question devra revêtir un caractère "local" puisque nous étudions un modèle non linéaire. Aussi, l'étude de la puissance asymptotique locale de la procédure suggérée ici fournit une partie de la réponse à cette question.

Heureusement, la réponse à cette question est positive : la puissance asymptotique locale d'un test effectué dans le cadre de la régression étendue est égale à celle des procédures classiques mises en oeuvre dans l'approche par la vraisemblance.

La justification de ce résultat s'obtient selon un raisonnement en deux étapes.

La première étape utilise des résultats indiqués plus haut, à la section II. En effet, nous savons, tout d'abord, que $\tilde{\delta}_X$ l'estimateur des 2MC est asymptotiquement équivalent à l'estimateur du MVIL $\tilde{\delta}$. En outre, d'après la

remarque faite à la section II, $\tilde{\delta}^0$, l'estimateur du MV sous contrainte est identique à l'estimateur du MV de δ dans le système (2.14). Or, l'estimateur des VI de δ dans ce système n'est rien d'autre que $\tilde{\delta}_H$. Il en résulte que, à son tour, $\tilde{\delta}^0$ est asymptotiquement équivalent à $\tilde{\delta}_H$. Nous pouvons donc conclure, au bout de cette première étape, que le test m- de Hausman (4.1) est asymptotiquement équivalent au test fondé sur la forme quadratique.

$$(5.1) \quad (\tilde{\delta} - \tilde{\delta}^0)' [V(\tilde{\delta}) - V(\tilde{\delta}^0)]^{-1} (\tilde{\delta} - \tilde{\delta}^0)$$

Il en est de même, bien entendu, de la procédure fondée sur la régression étendue en raison du résultat énoncé précédemment dans la Proposition.

Il reste maintenant à examiner, dans une deuxième étape, si dans le cadre du maximum de vraisemblance, la "statistique-m de Hausman" (5.1) a la même puissance asymptotique locale que celle des procédures classiques. Pour répondre à cette question, il est nécessaire de faire appel aux résultats obtenus dans Holly (1982) où cette question d'équivalence asymptotique a été examinée de façon très générale.

Il a été montré, en effet, dans Holly (1982) que l'équivalence (ou la non-équivalence) asymptotique dépendait du rang d'un bloc particulier de la matrice d'information du problème considéré. Nous allons indiquer ci-dessous, l'expression de cette matrice pour le problème que nous sommes en train d'étudier. Il convient, à cet effet, d'adopter une représentation paramétrique de la vraisemblance (2.13) en terme de $\theta, \delta, \omega, \pi, \eta^2$ où $\pi = \text{vec } \Pi$, et ω est le vecteur obtenu à partir de $\text{vec } \Omega$ en éliminant les éléments supradiagonaux de Ω .

De plus, nous désignerons par D la "matrice de duplication" telle que $\text{vec } \Omega = D \omega$. Avec ces notations on peut montrer que la matrice d'information est égale à \mathcal{J}

$$(5.2) \quad \mathcal{J} = \begin{matrix} & \theta & \delta & \omega & \pi & \eta^2 \\ \theta & \mathcal{J}_{\theta\theta} & \mathcal{J}_{\theta\delta} & \mathcal{J}_{\theta\omega} & 0 & 0 \\ \delta & \mathcal{J}_{\delta\theta} & \mathcal{J}_{\delta\delta} & \mathcal{J}_{\delta\omega} & \mathcal{J}_{\delta\pi} & 0 \\ \omega & \mathcal{J}_{\omega\theta} & \mathcal{J}_{\omega\delta} & \mathcal{J}_{\omega\omega} & 0 & 0 \\ \pi & 0 & \mathcal{J}_{\pi\delta} & 0 & \mathcal{J}_{\pi\pi} & 0 \\ \eta^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2 \eta^2)^2 \end{matrix}$$

où

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_{\theta\theta} &= (1/\eta^2)\Omega^{-1} \quad ; \quad \mathcal{J}_{\theta\delta} = (1/\eta^2) [(I_N, 0)] \\ \mathcal{J}_{\theta\omega} &= -(1/\eta^2) [\theta'\Omega^{-1} \otimes \Omega^{-1}]D \\ \mathcal{J}_{\theta\omega} &= -(1/\eta^2) [\theta'\Omega^{-1} \otimes (I_N, 0)']D \\ \mathcal{J}_{\delta\delta} &= (1/\eta^2)\text{plim} [(Y, X_1)'(Y, X_1) / T] \\ \mathcal{J}_{\delta\pi} &= -(1/\eta^2) [\theta'\Omega^{-1} \otimes \text{plim} (Y, X_1)'X/T] \\ \mathcal{J}_{\omega\omega} &= D' [((1/2)\Omega^{-1} + (1/\eta^2)\Omega^{-1}\theta\theta'\Omega^{-1}) \otimes \Omega^{-1}]D \\ \mathcal{J}_{\pi\pi} &= [(\Omega - (1/\sigma^2)\theta\theta')^{-1} \otimes \text{plim}(X'X/T)] \end{aligned}$$

L'équivalence asymptotique repose ici sur le rang de $\mathcal{J}_{\theta_2\delta} = (1/\eta^2)[I_{N_2}, 0]$. Celui-ci est égal à N_2 , c'est-à-dire à la dimension du vecteur θ_2 , ou encore au nombre de restrictions à tester. C'est précisément ce résultat qui nous permet d'affirmer, sur la base des résultats présentés dans

Holly (1982), que le "test m de Hausman" (5.1) a la même puissance asymptotique que les tests classiques. Ce qui nous permet de conclure, sur la base de la première étape de notre raisonnement qu'il en est de même pour la procédure de test qui est suggérée dans ce travail.

Les considérations relatives à la puissance asymptotique locale, nous permettent de discuter également un aspect pratique important, à savoir le choix de l'estimateur de la variance des résidus. En effet, les variances asymptotiques de $T^{1/2}(\tilde{\delta} - \delta^*)$ et de $T^{1/2}(\tilde{\delta}^0 - \delta^*)$, où δ^* est le vrai paramètre, sont respectivement égales à $\sigma^2 \text{plim} [(Z'P_X Z)/T]$ et $\sigma^2 \text{plim} [(Z'P_H Z)/T]$. En raison de l'expression (5.1) et de l'équivalence asymptotique que nous venons d'évoquer, il est nécessaire que, dans le cadre de la régression étendue, le dénominateur de la statistique soit un estimateur convergent de σ^2 . Posons

$$\tilde{u}_H = y - Z\tilde{\delta}_H$$

$$\tilde{u}_X = y - Z\tilde{\delta}_X$$

$$\hat{e}_X = y - Z\tilde{\delta}_X - \hat{V}(\hat{V}'\hat{V})^{-1} \tilde{\theta}_X$$

$$\hat{e}_H = y - Z\tilde{\delta}_H - \hat{V}(\hat{V}'\hat{V})^{-1} \tilde{\theta}_H$$

Or, peut montrer que $\hat{e}_X' \hat{e}_X / T$ et $\hat{e}_H' \hat{e}_H / T$ sont des estimateurs convergents de $\eta^2 = \sigma^2 - \theta' \Omega^{-1} \theta$. Par contre, $\tilde{u}_X' \tilde{u}_X / T$ et $\tilde{u}_H' \tilde{u}_H / T$ sont des estimateurs convergents de σ^2 . Il en résulte que nous ne pouvons pas utiliser les résidus de la régression étendue (3.3) pour former le dénominateur des statistiques. Il est nécessaire de modifier le programme afin de calculer $\tilde{u}_X' \tilde{u}_X / T$ ou $\tilde{u}_H' \tilde{u}_H / T$.

Pour conclure cet exposé, nous voudrions souligner encore une fois, le fait que les statistiques suggérées ici en vue de tester l'exogénéité de Y_2 sont facilement calculables. De ce fait, il n'est pas inutile, à l'avenir, d'en étudier les propriétés dans les petits échantillons afin de mieux pouvoir les comparer.

N O T E S

- 1/ Les résultats présentés ici sont étudiés avec plus de détails dans Holly (1983). La présentation que nous donnons ici dépasse toutefois le simple cadre des modèles à équations simultanées. Elle s'applique aux variables instrumentales de façon très générale.

- 2/ Il est à présent bien connu que les estimateurs MVIL de δ peuvent être obtenus en appliquant le maximum de vraisemblance (en information complète) au "système incomplet". Le résultat semble avoir été obtenu indépendamment par plusieurs auteurs. Outre les noms de Goldberger et Zellner mentionnés par Hall-Pagan (1981), J. Hausman, A.J. Hughes-Hallet, J.F. Richard et J.D. Sargan m'ont signalé qu'ils ont obtenu ce résultat dans des travaux non publiés. Cette liste de noms n'est sans doute pas exhaustive.

- 3/ Les propriétés de la matrice de duplication D ont été étudiées en détail par Balestra (1976) et par Magnus-Neudecker (1980). Nous utilisons ici la terminologie introduite par ces auteurs.

Références

- Balestra, P. (1976) La dérivation matricielle, Collection de l'Institut de Mathématiques Economiques, no 12, Université de Dijon. Editions Sirey, Paris
- Dufour, J.M. (1980), "Tests of exogeneity", Département de Sciences Economiques, Université de Montréal, cahier 8026.
- Engle, R.F. (1982), "A general approach to Lagrange multiplier model diagnostics", Journal of Econometrics, 20, pp. 83-104.
- Engle, R.F., Hendry D.F. et Richard J.F. (1983), "Exogeneity", Econometrica, 51, pp. 277-304.
- Godfrey, L.G. et Wickens M.R. (1982), "A simple derivation of the limited information maximum likelihood estimator", Economics Letters, 10, pp. 277-283.
- Hall, A.D. et Pagan A.R. (1981), "The LIML and related estimators of an equation with moving average disturbances", International Economic Review, 22, pp. 719-730.
- Hausman, J.A. (1978), "Specification tests in econometrics", Econometrica, 48, pp. 697-720.
- Hausman, J.A. et Taylor W.E. (1981), "A generalized specification test", Economics Letters, 8, pp. 239-245.
- Holly, A. (1982), "A remark on Hausman's specification test", Econometrica, 50, pp. 749-759.

- Holly, A. (1983), "A simple procedure for testing whether a subset of endogenous variables is independent of the disturbance term in a structural equation", Cahiers de recherches économiques, no 8306, Université de Lausanne.
- Hwang, H.S. (1980), "Test of independence between a subset of stochastic regressors and disturbances", International Economic Review, 21, pp. 749-760.
- Magnus, J.R. and Neudecker H. (1980), "The elimination matrix : some lemmas and applications", SIAM J; Alg. Disc. Meth., 1, pp. 422-449.
- Reiss, P.C. (1982), "A limited information specification test : a comment", mimeo, February 1982.
- Smith, R. (1983), "Limited information classical tests for the independence of stochastic variables and disturbance of a single linear stochastic simultaneous equation", Discussion paper, Manchester University.
- Spencer, D.E. and Berk K.N. (1981), "A limited information specification test", Econometrica, 49, pp. 1079-1085.
- Spencer, D.E. and Berk (1982), "Erratum", Econometrica, 50, p. 1087.