



HAL
open science

Révélation des préférences dans l'allocation de biens publics 0-1

Xavier Freixas

► **To cite this version:**

Xavier Freixas. Révélation des préférences dans l'allocation de biens publics 0-1. [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1981, 24 p., figures, bibliographie. <hal-01542401>

HAL Id: hal-01542401

<https://hal.science/hal-01542401v1>

Submitted on 19 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

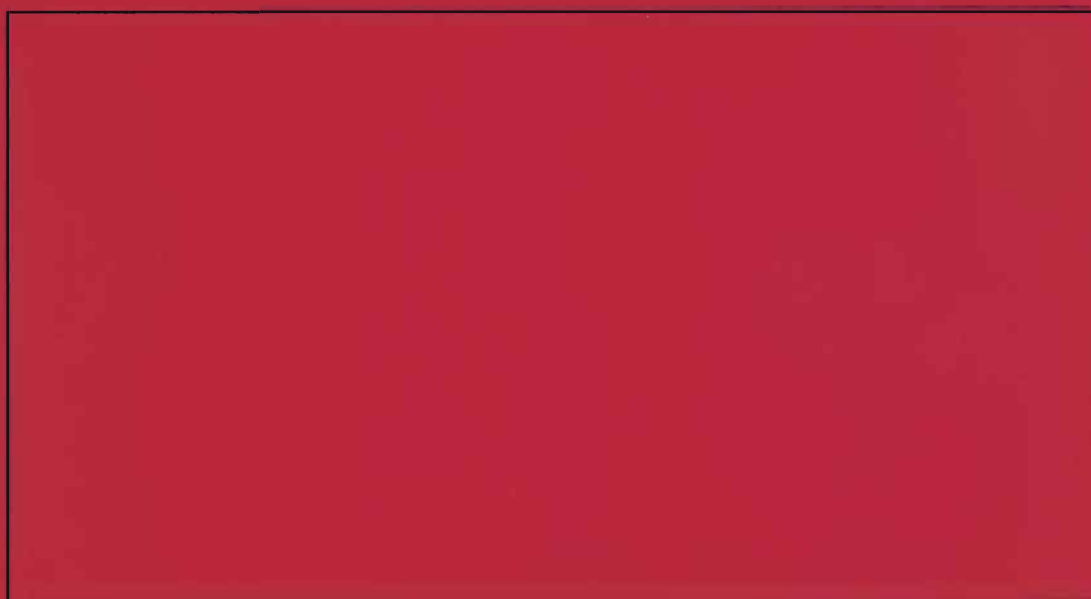


HAL Authorization

I.M.E.

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU C.N.R.S.

DOCUMENT DE TRAVAIL



INSTITUT DE MATHEMATIQUES ECONOMIQUES

UNIVERSITE DE DIJON

FACULTE DE SCIENCE ECONOMIQUE ET DE GESTION

4, BOULEVARD GABRIEL — 21000 DIJON

N° 52

Revelation des Préférences dans l'Allocation
de Biens Publics 0-1^{*x}

Xavier FREIXAS

Juillet 1981

* Ce travail constitue un prolongement des recherches sur les thèmes développés dans ma thèse complémentaire "Procédures probabilistes de révélation des préférences". Je tiens à exprimer ma reconnaissance aux membres du Jury, Mrs J. VINCENT, J. FERICELLI, G. MOLINS-YSAL et J-J. LAFFONT, pour leurs encouragements et leurs suggestions.

x Ce papier a fait l'objet d'une communication au Colloque de l'I.M.E. du 28 novembre 1980.

Monsieur Xavier Freixas est maître assistant à l'Université des Sciences Sociales de Toulouse I.

TRAVAUX DEJA PUBLIES

- N° 1 Michel PREVOT : Théorème du point fixe. Une étude topologique générale (juin 1974)
- N° 2 Daniel LEBLANC : L'introduction des consommations intermédiaires dans le modèle de LEFEBER (juin 1974)
- N° 3 Colette BOUBON : Spatial Equilibrium of the Sector in Quasi-Perfect Competition (september 1974)
- N° 4 Claude PONSARD : L'imprécision et son traitement en analyse économique (septembre 1974)
- N° 5 Claude PONSARD : Economie urbaine et espaces métriques (septembre 1974)
- N° 6 Michel PREVOT : Convexité (mars 1975)
- N° 7 Claude PONSARD : Contribution à une théorie des espaces économiques imprécis (avril 1975)
- N° 8 Aimé VOGT : Analyse factorielle en composantes principales d'un caractère de dimension-n (juin 1975)
- N° 9 Jacques THISSE et Jacky PERREUR : Relation between the Point of Maximum Profit and the Point of Minimum Total Transportation Cost : A Restatement (juillet 1975)
- N° 10 Bernard FUSTIER : L'attraction des points de vente dans des espaces précis et imprécis (juillet 1975)
- N° 11 Régis DELOCHE : Théorie des sous-ensembles flous et classification en analyse économique spatiale (juillet 1975)
- N° 12 Gérard LASSIBILLE et Catherine PARRON : Analyse multicritère dans un contexte imprécis (juillet 1975)
- N° 13 Claude PONSARD : On the Axiomatization of Fuzzy Subsets Theory (july 1975)
- N° 14 Michel PREVOT : Probability Calculation and Fuzzy Subsets Theory (august 1975)
- N° 15 Claude PONSARD : Hiérarchie des places centrales et graphes - flous (avril 1976)
- N° 16 Jean-Pierre AURAY et Gérard DURU : Introduction à la théorie des espaces multiflous (avril 1976)
- N° 17 Roland LANTNER, Bernard PETITJEAN et Marie-Claude PICHERY : Jeu de simulation du circuit économique (août 1976)
- N° 18 Claude PONSARD : Esquisse de simulation d'une économie régionale : l'apport de la théorie des systèmes flous (septembre 1976)
- N° 19 Marie-Claude PICHERY : Les systèmes complets de fonctions de demande (avril 1977)
- N° 20 Gérard LASSIBILLE et Alain MINGAT : L'estimation de modèles à variation dépendante dichotomique - La sélection universitaire et la réussite en première année d'économie (avril 1977)

- N° 21 Claude PONSARD : La région en analyse spatiale (mai 1977)
- N° 22 Dan RALESCU : Abstract Models for Systems Identification (juin 1977)
- N° 23 J. MARCHAL et F. POULON : Multiplicateur, graphes et chaînes de Markov
(décembre 1977)
- N° 24 Pietro BALESTRA : Determinant and Inverse of a Sum of Matrices with
Applications in Economics and Statistics (avril 1978)
- N° 25 Bernard FUSTIER : Etude empirique sur la notion de région homogène
(avril 1978)
- N° 26 Claude PONSARD : On the Imprecision of Consumer's Spatial Preferences
(avril 1978)
- N° 27 Roland LANTNER : L'apport de la théorie des graphes aux représentations
de l'espace économique (avril 1978)
- N° 28 Emmanuel JOLLES : La théorie des sous-ensembles flous au service de la
décision : deux exemples d'application (mai 1978)
- N° 29 Michel PREVOT : Algorithme pour la résolution des systèmes flous (mai 1978)
- N° 30 Bernard FUSTIER : Contribution à l'analyse spatiale de l'attraction impré-
cise (juin 1978)
- N° 31 TRAN QUI Phuoc : Régionalisation de l'économie française par une méthode
de taxinomie numérique floue (juin 1978)
- N° 32 Louis De MESNARD : La dominance régionale et son imprécision, traitement
dans le type général de structure (juin 1978)
- N° 33 Max PINHAS : Investissement et taux d'intérêt. Un modèle stochastique
d'analyse conjoncturelle (octobre 1978)
- N° 34 Bernard FUSTIER , Bernard ROUGET : La nouvelle théorie du consommateur est-
elle testable ? (janvier 1979)
- N° 35 Didier DUBOIS : Notes sur l'intérêt des sous-ensembles flous en analyse de
l'attraction de points de vente (février 1979)
- N° 36 Heinz SCHLEICHER : Equity Analysis of Public Investments : Pure and Mixed
Game-Theoretic Solutions (avril 1979)
- N° 37 Jean JASKOLD GABSZHWICZ : Théories de la concurrence imparfaite : illustra-
tions récentes de thèmes anciens (juin 1979)
- N° 38 Bernard FUSTIER : Contribution à l'étude d'un caractère statistique flou
(janvier 1980)
- N° 39 Pietro BALESTRA : Modèles de régression avec variables muettes explicatives
(janvier 1980)
- N° 40 Jean-Jacques LAFFONT : Théorie des incitations un exemple introductif
(février 1980)
- N° 41 Claude PONSARD : L'équilibre spatial du consommateur dans un contexte im-
précis (février 1980)

- N° 42 Jean-Marie HURIOT : Rente foncière et modèles de production (avril 1980)
- N° 43 Claude PONSARD : Fuzzy Economic Spaces (avril 1980)
- N° 44 Alan KIRMAN : Imperfect Communication in Markets - A big world problem
(avril 1980)
- N° 45 Michel PREVOT : Variétés différentielles (mai 1980)
- N° 46 Claude PONSARD : Producer's spatial equilibrium with a fuzzy constraint
(may 1980)
- N° 47 Michel PREVOT : Théorie des catastrophes (mai 1980)
- N° 48 Bernadette MARECHAL : Recherche de la forme d'un modèle à retards échelonnés
application à la fonction d'investissement, (novembre 1980)
- N° 49 Bernard FUSTIER : Une méthode d'analyse multicritère, SPARTE, (mars 1981)
- N° 50 Jan SERCK-HANSEN : On the Optimal Capital/ Labour Ratios in Towns when
Demands for Outputs are Stochastic (may 1981)
- N° 51 Claude PONSARD : Partial Spatial Equilibria with Fuzzy Constraints (may 1981)

La forme la plus simple de choix à laquelle une société peut se trouver confrontée est une alternative dont chacun des termes conditionne le niveau de satisfaction de tous les individus la composant. Le choix que la société doit effectuer correspond à la détermination d'une quantité d'un bien public particulier, qui est indivisible et qui ne peut être consommé qu'en deux quantités, 0 ou 1. Nous appellerons ce type de biens publics "biens publics 0-1". Mettre en place ou non un système d'aide financé par une augmentation des impôts, adopter ou rejeter un texte de loi définitif (sans qu'il soit possible d'introduire des amendements) constituent des exemples de bien public 0-1. Et le référendum est un exemple d'un mode de choix de la quantité désirée pour ce bien public.

Nous nous intéresserons ici aux mécanismes de choix compatibles avec la révélation des préférences. Plus précisément, nous étudierons les mécanismes dans lesquels l'annonce de ses véritables préférences ne peut jamais désavantager un individu. (Dans le langage de la théorie des jeux, cela signifie, que, la révélation des préférences constitue une stratégie dominante). Nous dirons de ces mécanismes qu'ils sont non-manipulables.

La détermination de mécanismes de choix pour les biens publics 0-1 relève non seulement de la théorie des biens publics mais aussi de la théorie des choix sociaux. En effet, le choix entre les projets ou états sociaux 0 et 1 peut être effectué par un mode de scrutin, du type majorité simple ou majorité qualifiée. Mais nous préférons adopter ici une des hypothèses usuelles dans la théorie des biens publics, l'hypothèse de comparabilité interindividuelle de niveaux d'utilité, car elle permet de définir un plus grand nombre de mécanismes que lorsqu'on suppose des utilités ordinales et non-comparables. Par ailleurs, en supposant que les utilités individuelles sont comparables, nous serons à même de mesurer l'efficacité des différentes formes de choix en utilisant les critères de bien-être utilitariste et maximin.

Nous considérerons les formes les plus générales de mécanismes et en particulier des mécanismes stochastiques, dans lesquels

la décision est parfois effectuée en fonction du résultat d'une expérience aléatoire. Considérer de tels mécanismes peut paraître superflu dans la mesure où la plupart des assemblées excluent ce mode de choix. Mais cela indique peut-être uniquement que le critère de bien-être adopté par ces assemblées conduit à des décisions qui ne font pas intervenir d'aléa. Il est donc nécessaire d'étudier des mécanismes stochastiques dès lors que nous ignorons si ceux-ci sont écartés quel que soit le critère de bien-être adopté ou uniquement sur la base d'un critère de bien-être spécifique.

Notre analyse consistera tout d'abord, à caractériser les mécanismes stochastiques et non-manipulables de choix de bien public 0-1, lorsque les préférences individuels sont supposées cardinales et comparables. Nous montrerons que ces mécanismes ne sont autres que ceux obtenus en postulant des utilités ordinales et non-comparables¹⁾.

Ensuite, nous déterminerons lesquels de ces mécanismes sont optimaux par rapport aux critères utilitariste d'une part et maximim d'autre part. Nous établirons que les mécanismes optimaux par rapport au critère utilitariste sont des mécanismes déterministes presque partout, dans lesquels la décision est prise presque toujours à l'issue d'un vote. Au contraire, les mécanismes optimaux par rapport au critère maximin sont des mécanismes presque partout aléatoires et la décision est prise presque toujours à l'issue d'un tirage aléatoire.

Enfin, en utilisant le critère utilitariste nous étudierons l'effet de l'imposition de la condition de non-manipulabilité. Nous montrerons que celle-ci crée, en général, une perte sociale non-nulle. Ce résultat permettra, en outre, d'apporter une clarification quant à la méthode d'analyse : la perte sociale existe, et les mécanismes optimaux sont ceux qui la minimisent. Si, de plus, nous exigeons l'optimalité de Pareto, ou optimalité non contrainte, cela conduira soit à l'inexistence de mécanismes, soit aux cas particuliers pour lesquels la perte sociale s'annule : les mécanismes dictatoriaux. Cette remarque,

qui apparaît évidente dans l'analyse des biens publics 0-1, est essentielle à une meilleure compréhension de certains résultats concernant les mécanismes d'allocation non-manipulables. Elle permet une interprétation des théorèmes d'impossibilité qui supposent l'optimalité de Pareto : ces théorèmes indiquent simplement l'existence d'une perte sociale imputable à la condition de non-manipulabilité.

La section 1 est consacrée à la caractérisation des mécanismes non-manipulables. Dans la section 2 les mécanismes non-manipulables optimaux pour les critères utilitariste et maximin sont déterminées. Enfin, dans la section 3 est abordé le problème de la perte sociale imputable à la contrainte de non-manipulabilité.

SECTION 1 : Caractérisation des procédures non-manipulables

Notons x un état social quelconque, x pouvant être égal à 0 ou à 1.

La fonction d'utilité d'un individu U_i , sera caractérisée par un seul paramètre θ_i .

$$U_i(x) = U(x, \theta_i)$$

Par conséquent, il est équivalent de connaître U_i ou de connaître θ_i , ce qui constitue une double hypothèse : d'une part le domaine des utilités est restreint, et d'autre part les niveaux d'utilité d'individus différents sont comparables.

Deux individus i et i' peuvent préférer tous les deux l'état social 1 à l'état 0, s'ils sont caractérisés par des θ_i et $\theta_{i'}$, qui vérifient les inégalités :

$$U(1, \theta_i) > U(0, \theta_i)$$

$$U(1, \theta_{i'}) > U(0, \theta_{i'})$$

Mais par ailleurs il est possible de mesurer l'intensité des préférences puisque l'inégalité

$$U(1, \theta_i) > U(1, \theta_{i'})$$

signifie que l'individu i préfère plus intensément l'état 1 que ne le fait l'individu i' .

Nous pouvons concrétiser cette formalisation des préférences en proposant un exemple (au risque, peut-être, d'une dramatisation du choix public).

Supposons que l'état 0 soit l'interdiction absolue de fumer, et l'état 1, l'absence d'interdiction.

Alors, les fumeurs invétérés préfèrent l'état 1 "plus intensément" que les fumeurs occasionnels qui préfèrent cependant aussi l'état 1 à l'état 0. De même certains non fumeurs souffrent plus ou moins des effets externes provoqués par les fumeurs, et préfèrent l'état 0 avec une intensité plus ou moins grande.

Si nous faisons abstraction du problème de la révélation des préférences, l'état social choisi serait celui qui maximise un certain critère de bien-être. Il faudrait alors tenir compte de l'intensité des préférences des individus, puisque l'utilité collective, dépend de ces intensités.

Nous montrerons ici que les mécanismes stochastiques non-manipulables ne dépendent pas des intensités exprimées par les agents.

Nous établirons tout d'abord un théorème de caractérisation que nous interpréterons ensuite en termes de vote. Nous aurons ainsi montré que l'introduction de la cardinalité, même dans le cas d'utilités comparables ayant un domaine restreint ne permet pas d'accroître le nombre de mécanismes non-manipulables.

Caractérisation

Notons $P_0(\theta)$ et $P_1(\theta)$ les probabilités respectives des états 0 et 1 lorsque l'individu i annonce la composante θ_i du vecteur $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n)$. Puisque le choix est restreint ici à deux états, la somme des probabilités est égale à l'unité.

$$P_0(\theta) + P_1(\theta) = 1 \text{ pour tout } \theta$$

Le mécanisme $P = (P_0, P_1)$ est donc complètement déterminé par la donnée de $P_1(\theta)$.

Etudions, tout d'abord, le comportement stratégique des individus quant à la révélation des préférences, en utilisant l'égalité ci-dessus.

L'individu i maximise son espérance d'utilité par rapport à son annonce θ_i , son utilité étant caractérisée par la vraie valeur, $\hat{\theta}_i$, du paramètre θ_i , valeur qu'il est le seul à connaître.

Par conséquent, l'individu i annonce la valeur θ_i solution de

$$(1.1) \quad \text{Max}_{\theta_i} [P_0(\theta_{-i}, \theta_i) U(0, \hat{\theta}_i) + P_1(\theta_{-i}, \theta_i) U(1, \hat{\theta}_i)]$$

pour $\theta_{-i} = (\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$ fixé.

Or, en utilisant la relation $P_0(\theta) = 1 - P_1(\theta)$, et puisque $U(0, \hat{\theta}_i)$ est une constante par rapport à θ_i , nous déduisons une formulation équivalente du problème (1) ci-dessus.

$$(1.2) \quad \text{Max}_{\theta_i} P_1(\theta_{-i}, \theta_i) [U(1, \hat{\theta}_i) - U(0, \hat{\theta}_i)]$$

La solution du problème ainsi formulé est immédiate.

Trois cas doivent être distingués en fonction des valeurs prises par le paramètre $\hat{\theta}_i$ qui caractérise l'utilité de l'individu i .

Notons θ_0 l'ensemble des paramètres $\hat{\theta}_i$ pour lesquels l'état 0 est préféré à l'état 1, θ_1 l'ensemble de ceux pour lesquels l'état 1 est préféré à l'état 0 et θ_I l'ensemble de ceux pour lesquels les deux états sont indifférents.

$$\theta_0 = \{\hat{\theta}_i : U(1, \hat{\theta}_i) - U(0, \hat{\theta}_i) < 0\}$$

$$\theta_1 = \{\hat{\theta}_i : U(1, \hat{\theta}_i) - U(0, \hat{\theta}_i) > 0\}$$

$$\theta_I = \{\hat{\theta}_i : U(1, \hat{\theta}_i) - U(0, \hat{\theta}_i) = 0\}$$

1. Si $\hat{\theta}_i \in \theta_0$, alors le problème de maximisation

$$\text{Max}_{\theta_i} P_1(\theta_{-i}, \theta_i) \{U(1, \hat{\theta}_i) - U(0, \hat{\theta}_i)\}$$

est équivalent à celui de minimisation

$$\text{Min}_{\theta_i} P_1(\theta_{-i}, \theta_i)$$

2. Si $\hat{\theta}_i \in \theta_1$, alors la solution du problème (2) doit être aussi solution de

$$\text{Max}_{\theta_i} P_1(\theta_{-i}, \theta_i)$$

3. Si $\hat{\theta}_i \in \theta_1$, alors tout θ_i est solution de (2) (Le maximande est nul).

Pour que le mécanisme $P = (P_0, P_1)$ soit non-manipulable, il est donc nécessaire :

1) que tout $\hat{\theta}_i$ de θ_0 soit solution de

$$\text{Min}_{\theta_i} P_1(\theta_{-i}, \theta_i)$$

2) que tout $\hat{\theta}_i$ de θ_1 soit solution de

$$\text{Max}_{\theta_i} P_1(\theta_{-i}, \theta_i)$$

Notons $\text{Min}_{\theta_i} P_1(\theta_{-i}, \theta_i) = k_1^i(\theta_{-i})$ et $\text{Max}_{\theta_i} P_1(\theta_{-i}, \theta_i) = k_2^i(\theta_{-i})$

Une condition nécessaire et suffisante pour que P soit non-manipulable est que pour tout θ_{-i}

$$\begin{aligned}
 & \forall \hat{\theta}_i \in \Theta_0, P_1(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i) = k_1^i(\theta_{-i}) \\
 (1.3) \quad & \forall \hat{\theta}_i \in \Theta_1, P_1(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i) = k_2^i(\theta_{-i}) \\
 & \forall \hat{\theta}_i \in \Theta_I, k_1^i(\theta_{-i}) \leq P_1(\theta_{-i}, \hat{\theta}_i) \leq k_2^i(\theta_{-i})
 \end{aligned}$$

et ceci pour tout i .

Considérons l'application Ψ définie sur l'ensemble Θ des valeurs possibles de θ_i par

$$\begin{aligned}
 \Psi(\theta_i) &= 0 && \text{si } \theta_i \in \Theta_0 \\
 \Psi(\theta_i) &= 1 && \text{si } \theta_i \in \Theta_1 \\
 0 \leq \Psi(\theta_i) \leq 1 &&& \text{si } \theta_i \in \Theta_I \quad (\Psi \text{ injective sur } \Theta_I)
 \end{aligned}$$

et notons Ψ^n l'application produit cartésien $\prod_{i=1}^n \Psi$ de Θ^n dans $[0,1]^n$.

En utilisant l'application Ψ , nous pouvons mettre en évidence une caractérisation des procédures non-manipulables équivalente à la condition 1-3) : ci-dessus. Notons P le mécanisme probabiliste binaire.

Proposition 1 : Une condition nécessaire et suffisante pour que P soit non-manipulable, est que $P_1 = h \circ \Psi^n$ pour une fonction h monotone croissante de $[0,1]^n$ dans $[0,1]$.

Démonstration

Si $P_1 = h \circ \varphi^n$, alors pour tout i la condition 3) est vérifiée. Par ailleurs, si P_1 vérifie la condition (1.3) alors d'une part, pour θ et θ' vérifiant $\varphi^n(\theta) = \varphi^n(\theta')$ on a $P_1(\theta) = P_1(\theta')$ et d'autre part $\varphi^n(\theta) \leq \varphi^n(\theta')$ d'après (1.3) implique $P_1(\theta) \leq P_1(\theta')$.

Il s'ensuit que P_1 peut s'écrire sous la forme $P_1 = h \circ \varphi^n$ pour une fonction monotone h .

Interprétation en termes de réduction d'information

La proposition précédente fait apparaître clairement la forme particulière que prennent ici les mécanismes non-manipulables. Les paramètres θ_i qui indiquent l'intensité des préférences des agents ne peuvent être utilisés que lorsque les agents sont indifférents entre les deux états 0 et 1.

En ce qui concerne les paramètres qui expriment une préférence pour un des deux états, la proposition établie contient un dilemme. En effet, les individus annoncent les vraies intensités de leurs préférences uniquement dans des mécanismes où ces intensités ne sont pas prises en compte. Et réciproquement, si en annonçant un certain niveau d'intensité les individus voyaient augmenter la probabilité de l'état qu'ils préfèrent, ils annonceraient cette intensité. Dans l'exemple ci-dessus concernant la possibilité de fumer dans une salle, cela équivaut à dire que si un mécanisme pondère plus fortement les voix des fumeurs invétérés, tous les fumeurs se déclareraient tels.

L'alternative dans le choix d'un mécanisme est donc la suivante : soit les vraies intensités sont annoncées dans un mécanisme qui les néglige, soit des intensités fausses sont annoncées dans un mécanisme qui en tient compte. En d'autres termes, la collectivité peut recenser les informations correctes quand elle décide de ne pas s'en servir et est incapable de les obtenir quand elle décide d'en tenir compte dans sa décision.

Si nous restreignons l'analyse aux procédures non-manipulables, une réduction d'information est possible, puisque la procédure n'utilise pas les paramètres θ_i annoncés mais uniquement leur image $\varphi(\theta_i)$.

Dans ce cas, les individus non indifférents annoncent soit 0, soit 1. Si de plus, une seule valeur ϑ_i de -1 permet l'indifférence, la fonction φ s'interprète comme un vote où 1 est un vote pour l'état 1, 0 un vote contre et où $\varphi(\vartheta_i)$, qui indique l'indifférence, correspond à une abstention.

Par conséquent, dans le cas des choix binaires, si seules des préférences strictes sont prises en considération, les procédures non-manipulables à utilités cardinales comparables et avec domaine restreint sont simplement les mécanismes non-manipulables à utilités ordinales. Les hypothèses plus fortes formulées sur les préférences ne permettent donc pas de définir de nouveaux mécanismes non-manipulables.

SECTION 2 : Mécanismes probabilistes optimaux

Puisque la cardinalité ne permet pas d'élargir la classe des mécanismes non-manipulables, l'ensemble des optima ex post se déduit uniquement des préférences ordinales. Cet ensemble est très facilement caractérisé, la condition d'optimalité ex post implique simplement qu'en cas d'unanimité des préférences, l'état unanimement préféré ait une probabilité égale à 1 d'être obtenu. En l'absence de comparabilité, c'est là la seule propriété de bien-être que l'on peut imposer aux mécanismes non-manipulables.

Mais, la comparabilité permet ici de déterminer l'optimum associé à différents critères d'utilité collective. Nous étudierons ce choix pour les critères utilitariste et maximin.

D'après les résultats ci-dessus, si les utilités cardinales étaient prises en compte, le mécanisme optimal pour un de ces deux critères serait manipulable. C'est pourquoi, ces critères ne peuvent tenir compte que de l'espérance d'utilité des individus conditionnée par leurs utilités ordinales.

§1. Le critère utilitariste

Le critère utilitariste mesure le bien-être social par la somme pondérée des espérances d'utilité des individus.

Le mécanisme optimal P_1 , sera solution du problème suivant:

$$(2.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{P_1} \quad E_{\theta} \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i P_1(\theta) [U(1, \theta_i) - U(0, \theta_i)] \right\} \\ 0 \leq P_1(\theta) \leq 1 \\ P_1(\theta) = h \circ \Psi^n(\theta), \text{ où } h \text{ est une fonction monotone et où } \Psi \text{ est} \\ \text{définie comme dans la section précédente.} \end{array} \right.$$

Nous pouvons remplacer la contrainte de non-manipulabilité, $P_1 = h \circ \Psi$, dans la maximande afin d'obtenir le problème équivalent :

$$(2.2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{P_1} \sum_{i=1}^n \lambda_i (h \circ \Psi^n(\theta)) \cdot \Psi(\theta_i) E_{\theta} [(U(1, \theta_i) - U(0, \theta_i))] \\ 0 \leq h(\Psi^n(\theta)) \leq 1 \end{array} \right.$$

Les solutions h^* de ce problème linéaire sont obtenues aisément :

$$h^*(\Psi^n(\theta)) = 1 \text{ lorsque } \sum_i \lambda_i \Psi E_{\theta_i} (U(1, \theta_i) - U(0, \theta_i)) > 0 \quad \text{et}$$

$$h^*(\Psi^n(\theta)) = 0 \text{ lorsque } \sum_i \lambda_i \Psi E_{\theta_i} (U(1, \theta_i) - U(0, \theta_i)) < 0 ,$$

$$0 \leq h^*(\Psi^n(\theta)) \leq 1 \text{ indéterminé lorsque } \sum_i \lambda_i \Psi E_{\theta} (U(1, \theta_i) - U(0, \theta_i)) = 0$$

Par conséquent, la solution de ce problème est un mécanisme déterministe sauf sur les points d'indifférence sociale (s'il en existe).

$$\text{Notons } A_1 = \frac{\Psi=1}{E} (U(1, \theta_i) - U(0, \theta_i)) \text{ et } A_0 = - \frac{\Psi=0}{E} (U(1, \theta_i) - U(0, \theta_i))$$

Soit $I_0 = \{1 \leq i \leq n : \Psi(\theta_i) = 0\}$ et $I_1 = \{1 \leq i \leq n : \Psi(\theta_i) = 1\}$.

La fonction h^* peut donc être caractérisée par

$$h^* = 1 \iff \sum_{i \in I_1} \lambda_i A_1 > \sum_{i \in I_0} \lambda_i A_0 \quad (\text{en négligeant le cas } \sum_{i \in I_1} \lambda_i A_1 + \sum_{i \in I_0} \lambda_i A_0 = 0)$$

Ainsi, dans le mécanisme optimal pour le critère utilitariste un état est choisi de façon certaine, après un vote qui permet de discriminer entre les états (si $A_0 \neq A_1$) et entre les individus (si $\lambda_i \neq \lambda_j$).

Mais il faut noter ici que la discrimination entre les états résulte de la forme particulière de la fonction d'utilité.

La majorité simple ne sera solution de ce problème que s'il y a, outre la non-discrimination entre individus, ($\lambda_i = \lambda_j$), symétrie de la fonction d'espérance d'utilité :

$$\frac{\Psi=1}{E} (U(1, \theta_i) - U(0, \theta_i)) + \frac{\Psi=0}{E} (U(1, \theta_i) - U(0, \theta_i)) = 0$$

C'est-à-dire si

$$E_{\theta_i} U(1, \theta_i) = E_{\theta_i} U(0, \theta_i)$$

Si cette condition est vérifiée, la majorité simple est le mécanisme optimal pour le critère utilitariste dans le cas d'absence de discrimination entre les individus.

Le critère de Rawls

Le critère de Rawls, dit encore maximin, mesure le bien-être social par l'espérance d'utilité de l'individu le plus défavorisé.

Il s'agit donc de choisir h de façon à maximiser l'espérance d'utilité individuelle minimale.

$$\text{Max}_h \min_i \mathbb{E}_{\theta_i}^{\Psi} [h(\Psi(\theta)) U(1, \theta_i) + (1-h(\Psi(\theta))) U(0, \theta_i)]$$

$$0 \leq h(\Psi(\theta)) \leq 1$$

$$\text{Notons } \mathbb{E}_{\theta_i}^{\Psi=x} U(1, \theta_i) = U_1^x, \mathbb{E}_{\theta_i}^{\Psi=x} U(0, \theta_i) = U_0^x \quad x = 1, 0$$

Deux cas sont à considérer :

1) S'il y a unanimité, $\Psi(\theta_i) = 0$ ou $\Psi(\theta_i) = 1$ pour tout i , alors

$h(\Psi^n(\theta_i)) = \Psi(\theta_i)$, ce qui correspond à la condition d'optimalité ex post.

2) S'il existe deux individus i et i' ayant des préférences différentes, alors leurs espérances d'utilité doivent être identiques. En effet, dans le cas contraire il serait possible d'augmenter l'espérance d'utilité des individus défavorisés en diminuant l'espérance d'utilité des autres individus.

Comme il n'existe que deux états 0 et 1, ceci implique que l'espérance d'utilité des individus qui préfèrent l'état 0 soit la même que celles des individus qui préfèrent l'état 1 :

$$\begin{aligned} & \Psi=0 \\ & E_{\theta_i} [h \cdot U(1, \theta_i) + (1-h) U(0, \theta_i)] \\ \\ = & \Psi=1 \\ & E_{\theta_i} [h \cdot U(1, \theta_i) + (1-h) U(0, \theta_i)] \end{aligned}$$

d'où une équation linéaire en h :

$$h \cdot U_1^0 + (1-h) U_0^0 - h U_1^1 - (1-h) U_0^1 = 0$$

dont la solution est

$$h^* = \frac{U_0^0 - U_0^1}{U_0^0 - U_0^1 + U_1^1 - U_1^0}$$

Comme $U_0^0 > U_0^1$ et $U_1^1 > U_1^0$, h^* est compris entre 0 et 1. Notons

$$G_0 = U_0^0 - U_0^1 \quad \text{et} \quad G_1 = U_1^1 - U_1^0$$

les gains nets des individus (en espérance) lorsque leur état préféré se réalise. Alors, pour le critère de Rawls la probabilité d'obtention de l'état 1 est proportionnelle au gain net de l'individu qui préfère l'état 0 :

$$h^* = \frac{G_0}{G_0 + G_1},$$

ce qui assure des gains nets identiques en espérance, puisque

$$h^* \cdot G_1 = (1-h^*) G_0$$

Par conséquent le mécanisme h optimal pour le critère de Rawls et défini par

$$\begin{aligned} h(\bar{1}) &= 1 & \bar{1} &= (1,1,\dots,1) \\ h(0) &= 0 \\ h(v) &= h^* \text{ pour } v \in [0,1]^n, v \neq 0 \text{ et } v \neq 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, une collectivité qui se serait donné comme critère de bien-être le critère de Rawls effectuerait les choix publics 0-1 de la façon suivante : en un premier temps, chaque individu pourrait exercer son droit de veto à l'encontre de la mise en oeuvre d'un des deux projets, 0 ou 1. (Le nombre vetos qu'obtient un projet est sans intérêt). Si un des deux projets n'est pas écarté par un veto, il est mis en oeuvre. Si les deux sont écartés, un tirage au sort est effectué dans un deuxième temps pour savoir lequel des deux projets sera finalement choisi.

A la différence du mécanisme optimal pour le critère utilitariste, qui est généralement déterministe, la procédure ci-dessus est presque toujours stochastique. Sauf dans le cas d'unanimité, le choix final est toujours issu d'un tirage aléatoire qui assure à tous les individus ayant les préférences moyennes $E^{\varphi=0} u(\cdot, \theta^i)$ ou $E^{\varphi=1} u(\cdot, \theta^i)$, la même espérance de gain net.

La différence entre les deux types de mécanismes optimaux est donc fondamentale ; et toute assemblée qui prend ses décisions au moyen d'un vote majoritaire adopte implicitement le critère utilitariste comme critère de bien-être²⁾.

SECTION 3. PERTE SOCIALE ASSOCIEE A LA NON OBSERVABILITE

Dans la section précédente, nous avons déterminé les procédures non-manipulables et optimales pour les critères utilitariste et de Rawls. Nous avons maximisé une fonction d'utilité collective sur l'ensemble des procédures non-manipulables. Notre démarche a donc été celle de la recherche d'un optimum de second rang. En effet, nous avons imposé la contrainte de non-manipulabilité des procédures puis nous avons maximisé sur l'ensemble de procédures qui satisfont à cette contrainte.

Le point de vue de l'optimalité de second rang n'étant pas celui habituellement adopté dans l'analyse des procédures non-manipulables, il est intéressant d'étudier à quels résultats aurait conduit la recherche d'un optimum non contraint. Nous nous serions alors demandés à quelle(s) condition(s) il est possible de conserver l'optimalité non contrainte quand on impose, par ailleurs, la condition de non-manipulation des mécanismes. Cette question conduira ici à un théorème d'impossibilité. Mais, à notre sens, l'intérêt majeur de cette question apparaît lorsqu'on compare l'optimalité non contrainte et l'optimalité de second rang. La différence entre la valeur maximale du critère de bien être en ces deux points optimaux n'est autre chose que la perte sociale imputable à la non-observabilité des préférences individuelles. Par conséquent, en recherchant les conditions d'existence de mécanismes non-manipulables qui atteignent un optimum non-contraint, nous nous interrogerons simultanément sur la possibilité de rendre nulle la perte sociale due à la non-observabilité des préférences.

Cette remarque est essentielle à la compréhension des nombreux théorèmes d'inexistence apparus dans l'étude des mécanismes non-manipulables : l'inexistence de procédures non-manipulables et optimales signifie que la contrainte de non-manipulabilité est effective et qu'il y a donc une perte sociale qui lui est imputable³⁾

Nous établirons ici un théorème d'inexistence et nous l'interpréterons en termes de perte d'utilité sociale uniquement pour le critère utilitariste⁴⁾.

Nous montrerons qu'il est possible d'annuler la perte sociale pour le critère utilitariste si et seulement si il existe un dictateur.

Lorsque i est un dictateur, cela correspond à un optimum pour le critère utilitariste avec $\lambda_i=1$, $\lambda_{i'}=0$ $i' \neq i$. De plus, il est clair que tout mécanisme dictatorial est non-manipulable. Ainsi la condition suffisante est évidente. Seule la condition nécessaire apporte un élément nouveau .

Proposition 2

Si la distribution de probabilités de θ_i est absolument continue sur $[0,1]$, si la fonction $U(1,\theta_i) - U(0,\theta_i)$ est continue et strictement croissante en θ_i et si, de plus, Θ_1 est non vide, alors tout mécanisme optimal et non-manipulable est dictatorial.

Démonstration

Déterminons tout d'abord les caractéristiques des mécanismes optimaux $P = (P_0, P_1)$. Cela revient à résoudre le problème :

$$\text{Max}_{\theta} E P_1(\theta) \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i [U(1,\theta_i) - U(0,\theta_i)] \right\}$$

$$0 \leq P_1(\theta) \leq 1$$

Les solutions sont données par l'ensemble de toutes les fonctions P_1 qui vérifient

$$P_1(\theta) = 1 \quad \forall \theta \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i [U(1, \theta_i) - U(0, \theta_i)] > 0$$

$$P_1(\theta) = 0 \quad \forall \theta \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i [U(1, \theta_i) - U(0, \theta_i)] < 0$$

sauf sur un sous-ensemble de Θ de mesure nulle.

Supposons maintenant que le mécanisme P ne soit pas dictatorial et montrons qu'il est manipulable.

Dire que P n'est pas dictatorial signifie qu'il existe deux indices, i et i' auxquels sont associés des coefficients de pondération λ_i et $\lambda_{i'}$, strictement positifs.

Puisque $U(1, \theta_i) - U(0, \theta_i)$ est continue et strictement croissante, il est possible de déterminer un point θ tel que :

$$\hat{\theta}_j \in \Theta_1, \quad j \in \{i, i'\}$$

$$\hat{\theta}_i \in \Theta_1$$

$$\hat{\theta}_{i'} \in \Theta_0$$

$$\text{vérifiant } \sum_{k=1}^n \lambda_k [U(1, \hat{\theta}_k) - U(0, \hat{\theta}_k)] = 0$$

Mais comme d'après l'hypothèse de continuité, Θ est un ouvert, il existe $\varepsilon > 0$, tel que

$$] \hat{\theta}_i - \varepsilon, \hat{\theta}_i + \varepsilon[\subset \Theta_1. \text{ Puisque}$$

$U(1, \theta_i) - U(0, \theta_i)$ est strictement croissante, il vient :

$$P_1(\hat{\theta}_{-i}, \hat{\theta}_i - \frac{\varepsilon}{2}) = 0$$

$$P_1(\hat{\theta}_{-i}, \hat{\theta}_i + \frac{\varepsilon}{2}) = 1$$

et le mécanisme ne vérifie pas la condition (1.3) de non-manipulabilité.

En termes d'utilité sociale, la proposition ci-dessus établit que la perte sociale due à la non-observabilité est strictement positive pour tout mécanisme non-dictatorial. Il est possible d'illustrer graphiquement ce résultat dans le cas où il n'y a que deux individus.

$$\text{Posons } U(0, \theta_i) = 1 \quad \forall \theta_i,$$

et $U(1, \theta) = [0, 2]$, de sorte qu'un individu préfère 1 à 0 si seulement si $U(1, \theta_i) > 1$.

En choisissant des coefficients de pondération λ_1 et λ_2 qui vérifient $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, la procédure optimale pour le critère utilitariste vérifie

$$P_1(\theta) = 1 \quad \forall \theta : \lambda_1 U(1, \theta_1) + \lambda_2 U(1, \theta_2) > 1$$

$$P_1(\theta) = 0 \quad \forall \theta : \lambda_1 U(1, \theta_1) + \lambda_2 U(1, \theta_2) < 1$$

$$P_1(\theta) \text{ indéterminé } \forall \theta : \lambda_1 U(1, \theta_1) + \lambda_2 U(1, \theta_2) = 1$$

Ainsi lorsque les préférences individuelles sont observables, l'utilité collective est égale à 1 si le projet 0 est réalisé et à $\lambda_1 U(1, \theta_1) + \lambda_2 U(1, \theta_2)$ si le projet 1 est réalisé. Par conséquent l'utilité collective associée à θ est égale à

$$W(\theta_1, \theta_2) = \text{Max} (\lambda_1 U(1, \theta_1) + \lambda_2 U(1, \theta_2), 1)$$

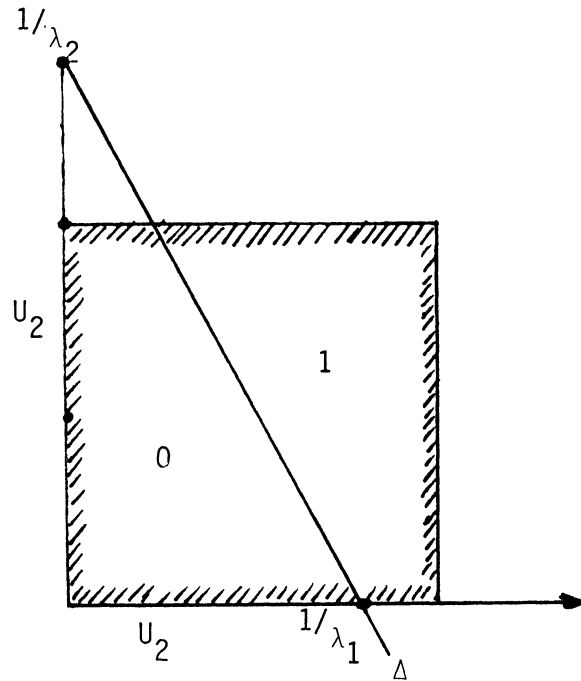


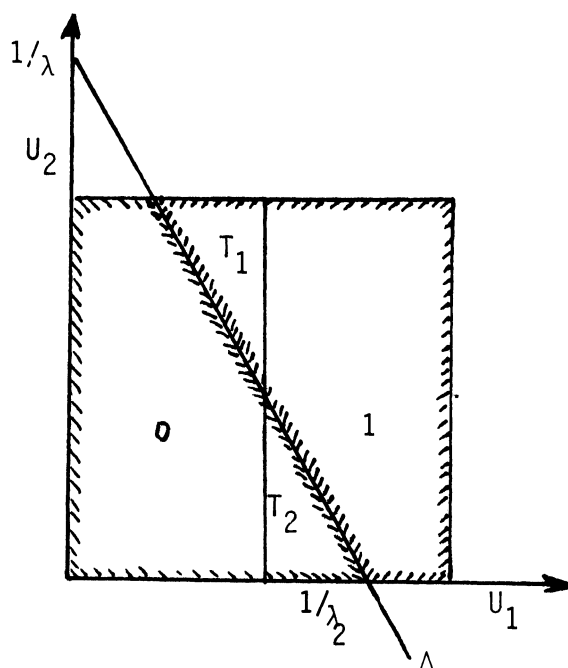
Figure 1

Dans la figure 1, le projet 0 est réalisé lorsque (U_1, U_2) se trouve dessous de la droite Δ et le projet 1 est réalisé lorsque (U_1, U_2) se trouve au dessus. L'espérance d'utilité est donc égale à

$$EW(\theta) = \int_{[0,2] \times [0,2]} W(\theta_1, \theta_2) \cdot f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$$

où $f(\theta_1, \theta_2)$ est la densité de probabilité de θ_1, θ_2 .

Lorsque les préférences individuelles ne sont pas observables. Le choix collectif ne peut être fait qu'à partir de la comparaison des espérances d'utilité conditionnelles. La droite Δ ne départage donc plus l'ensemble des points de l'ensemble $[0,2] \times [0,2]$, mais simplement les quatre points qui combinent deux à deux les différentes espérances conditionnelles.



La comparaison des figures 1 et 2 met en évidence le fait que les décisions collectives sont sous-optimales du fait de la non-observabilité. En effet, pour tous les points (U_1, U_2) du triangle T_1 , la décision prise par la procédure non-manipulable est de réaliser le projet 0, alors que la décision optimale serait de réaliser le projet 1. De façon symétrique, une décision incorrecte est prise sur le triangle T_2 .

Nous pouvons donc mesurer l'espérance de perte sociale qui est égale à

$$\pi = \int_{T_1} [\lambda_1 U(1, \theta_1) + \lambda_2 U(1, \theta_2) - 1] f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 +$$

$$\int_{T_2} [1 - \lambda_1 U(1, \theta_1) - \lambda_2 U(1, \theta_2)] f(\theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2$$

Si les fonctions de l'intégrande sont strictement positives, la perte sociale ne s'annule que lorsque la surface des triangles T_1 et T_2 est nulle, ce qui correspond, soit à $\lambda_1=0, \lambda_2=1$, soit à

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.$$

Dans tous les autres cas d'absence d'un dictateur, la perte sociale sera strictement positive, ce qui correspond à l'énoncé de la proposition 2.

L'analyse qui précède nous semble clarifier l'équivalence qui existe entre, d'une part, les théorèmes d'impossibilité qui supposent l'optimalité non-contrainte et, d'autre part, l'exigence d'une perte sociale nulle. Cette équivalence permet une meilleure compréhension des théorèmes d'impossibilité obtenus dans l'étude des mécanismes d'allocation non-manipulables. Elle indique aussi les limites de ces résultats. Compte-tenu de l'existence d'une perte sociale, il semble naturel non pas de rechercher les critères de bien-être qui permettent de l'annuler, mais plutôt de déterminer les mécanismes qui minimisent cette perte sociale, pour un critère de bien-être donné. Adopter ce point de vue, c'est reconnaître que la notion d'optimalité pertinente dans l'analyse des problèmes de révélation des préférences est celle d'optimalité de second rang. Et les résultats obtenus montrent l'intérêt qu'il y a à rechercher les optima de second rang : au lieu d'obtenir un théorème d'impossibilité (proposition 2) dont la portée est limitée, nous avons caractérisé les mécanismes optimaux de second rang et montré que le vote majoritaire est celui qui correspond à un critère utilitariste avec des pondérations identiques (critère de Bentham).

N O T E S

- 1) Ce résultat est spécifique aux biens publics 0-1 et est invalidé dès lors que le choix se fait entre trois états sociaux ou plus (cf [2]).

- 2) Ce résultat, qui peut être obtenu quel que soit le nombre d'états sociaux ou de projets intervenant dans le choix renvoie à la question du critère de bien-être implicite dans nos sociétés, question qui dépasse le cadre de cette étude.

- 3) Parmi les théorèmes d'inexistence de mécanismes non manipulables et optimaux, il est intéressant de rappeler les suivants :
 - a) Green et Laffont [3] ont montré l'inexistence de ces mécanismes lorsqu'on impose, de plus, que la somme des transferts intervenant entre les individus est nulle (procédures équilibrées). Voir aussi [7].

 - b) Hurwicz [4] a montré que dans une économie d'échange et en l'absence de biens publics il n'existe pas, en général, de mécanismes non-manipulables et optimaux qui ne soient pas dictatoriaux.

 - d) Hylland [5] a établi l'inexistence de mécanismes stochastiques non-manipulables et non-dictatoriaux qui soient optimaux ex ante.

- 4) Un théorème semblable peut aussi être établi pour le critère maximin. Il est possible, en effet, de démontrer l'inexistence de procédures optimales pour le critère maximin qui soient non-manipulables.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) DASGUPTA P., HAMMOND P., MASKIN E. "The implementation of choice rules : some general results on incentive compatibility"
Review of Economic Studies, 46, 1979, p 185-216.
- (2) FREIXAS X., "Procédures probabilistes de révélation des préférences".
Thèse complémentaire, Université de Toulouse 1980.
- (3) GREEN J., LAFFONT J.J., "Incentives in public decision-making",
North-Holland, Amsterdam 1979.
- (4) HURWICZ L., "On informationally decentralized systems" dans Mc Guire
et Radner (eds) Decision and organization, North Holland, Amsterdam 1972.
- (5) HYLLAND A., "Strategy proofness of voting procedures with lotteries
as outcomes and infinite sets of strategies"
Note ronéotée, Université d'Oslo.
- (6) LAFFONT J.J., MASKIN E., "The theory of incentives : an overview"
Cahier n°1802 du Groupe de Recherche en Economie Mathématique et Quantita-
tive.
- (7) WALKER M. "On the non-existence of a dominant strategy mechanism making
optimal public decisions"
Econometrica, 48, 1521-1540.