



**HAL**  
open science

## Estimateurs récursifs 2

Zaka Ratsimalahelo

► **To cite this version:**

Zaka Ratsimalahelo. Estimateurs récursifs 2. [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1991, 22 p., ref. bib.: 7 ref. hal-01542285

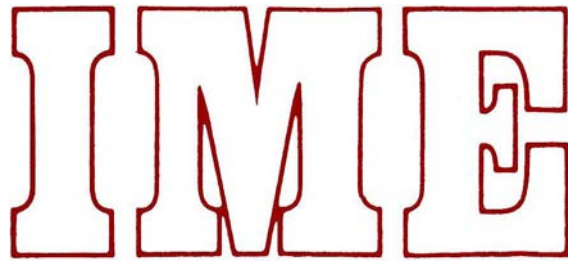
**HAL Id: hal-01542285**

**<https://hal.science/hal-01542285>**

Submitted on 19 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ÉCONOMIQUES

LATEC C.N.R.S. URA 342

**DOCUMENT de TRAVAIL**



UNIVERSITE DE BOURGOGNE

FACULTE DE SCIENCE ECONOMIQUE ET DE GESTION

4, boulevard Gabriel - 21000 DIJON - Tél. 80 39 54 30 - Fax 80 39 56 48

ISSN : 0292-2002

9107

ESTIMATEURS RECURSIFS 2

Zaka RATSIMALAHELO\*

*juin 1991*

*\* Institut de Mathématiques Economiques*



## ESTIMATEURS RECURSIFS 2

### RESUME

Dans cet article nous généralisons les méthodes récursives d'estimation des paramètres d'un modèle de régression dans le cas non sphérique. Nous développons d'abord les formulations récursives des estimateurs des moindres carrés généralisés. La formulation récurrente de la somme des carrés des erreurs qui sert pour les tests statistiques est établie. Enfin nous donnons les formulations récursives des variables instrumentales généralisées.

### ABSTRACT

In this paper the techniques for recursive estimation of linear model are extended to non-spherical disturbances. First we present the recursive formulae of generalized least squares. The recurrence relation for the residual sum of squares are derived. We show in the second part of the paper a recursive formulae of generalized instrumental variables.

**MOTS-CLES :** Les moindres carrés généralisés, variables instrumentales généralisées, estimation récursive.

**KEYWORDS :** Generalized least squares, generalized instrumental variables, recursive estimation.

## Introduction.

Après avoir étudié dans la première partie les méthodes d'estimations récursives des paramètres constants et variants dans le temps d'un modèle de régression et celles des moindres carrés doubles récursives, nous traitons dans cette partie un cadre plus général où les erreurs sont non sphériques.

Nous verrons dans un premier temps les formulations récursives des moindres carrés généralisés; ensuite nous établissons une formulation récurrente de la somme des carrés des erreurs; enfin nous démontrons des formulations récursives des variables instrumentales généralisées.

### I - Formulation récursive des moindres carrés généralisés.

Soit le modèle

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (1)$$

où  $Y$  : un vecteur de  $n$  observations,  
 $X$  : une matrice de variables aléatoires  $(n, m)$ ,  
 $\beta$  : un vecteur inconnu de  $\mathbb{R}^m$ ,  
 $\varepsilon$  : un vecteur d'erreurs d'espérance nulle et de matrice des variances-covariances  $V$ .

Nous supposons d'abord que les erreurs sont indépendantes de la matrice des variables explicatives :  $E(\varepsilon / X) = 0$ , par suite  $\text{plim } \frac{1}{n} X' \varepsilon = 0$ . Dans ce cas l'estimateur des moindres carrés généralisés (m.c.g.) est convergent.

L'estimateur des moindres carrés généralisés  $\hat{\beta}$  de  $\beta$  pour les  $n + 1$  observations est défini par :

$$\hat{\beta}_{n+1} = (X'_{n+1} V^{-1}_{n+1} X_{n+1})^{-1} X'_{n+1} V^{-1}_{n+1} Y_{n+1} \quad (2)$$

La structure de la matrice des variances-covariances des erreurs pour les  $n+1$  observations est définie comme suit :

$$\left. \begin{aligned} E(\varepsilon_n \varepsilon_n') &= V_n \\ E(\varepsilon_{n+1} \varepsilon_n') &= v_n' \\ E(\varepsilon_{n+1} \varepsilon_{n+1}') &= v_{n+1} > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{n+1} = \begin{bmatrix} V_n & v_n \\ v_n' & v_{n+1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

où  $v_n' = (v_{1n} \dots v_{nn})$  (vecteur ligne).

Si les erreurs sont stationnaires alors la matrice des variances-covariances  $V_{n+1}$  est une matrice de Toeplitz symétrique.

En appliquant à la matrice des variances-covariances (matrice de Toeplitz symétrique dans le cas stationnaire) la formule d'inversion des matrices partitionnées, on obtient :

$$V_{n+1}^{-1} = \begin{bmatrix} V^{11} & v^{12} \\ v^{21} & c^{-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

où

$$V^{11} = V_n^{-1} + c^{-1} V_n^{-1} v_n v_n' V_n^{-1} \quad (5)$$

$$v^{21} = -c^{-1} v_n' V_n^{-1} \quad (6)$$

$$c^{-1} = (v_{n+1} - v_n' V_n^{-1} v_n)^{-1} \quad (7)$$

Nous pouvons remarquer que la relation (5) est analogue à la formulation récursive de la matrice des variances-covariances des moindres carrés ordinaires (voir Partie I).

L'inverse de la matrice  $V_{n+1}$  s'écrit également :

$$V_{n+1}^{-1} = L V_n^{-1} L' + c^{-1} J' J \quad (8)$$

avec  $L = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $J = \begin{bmatrix} -v_n' V_n^{-1} & 1 \end{bmatrix}$

De cette relation, on déduit

$$X'_{n+1} V_{n+1}^{-1} X_{n+1} = X'_n V_n^{-1} X_n + u'_{n+1} u_{n+1} \quad (9)$$

$$\text{avec } u_{n+1} = J X_{n+1} / \sqrt{c} = (x_{n+1} - v'_n V_n^{-1} X_n) / \sqrt{c} \quad (10)$$

$$\text{et } X_{n+1} = \begin{bmatrix} X_n \\ x'_{n+1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

En appliquant le résultat du lemme d'inversion matricielle<sup>1</sup>, nous avons :

$$(X'_{n+1} V_{n+1}^{-1} X_{n+1})^{-1} = (X'_n V_n^{-1} X_n)^{-1} - A_{n+1} u_{n+1} (X'_n V_n^{-1} X_n)^{-1} \quad (12)$$

avec  $A_n = (X'_n V_n^{-1} X_n)^{-1} u'_{n+1} [1 + u'_{n+1} (X'_n V_n^{-1} X_n)^{-1} u_{n+1}]^{-1}$  qui est la matrice de gain.

La relation (12) nous permet de définir l'estimateur récurrent des m. c. g.

### Théorème 1.

L'estimateur récurrent des moindres carrés généralisés s'écrit :

$$\hat{\beta}_{n+1} = \hat{\beta}_n + A_n (w_{n+1} - u_{n+1} \hat{\beta}_n) \quad (13.a)$$

où  $w_{n+1} - u_{n+1} \hat{\beta}_n$  est l'erreur de prédiction

<sup>1</sup>Nous rappelons le lemme d'inversion matricielle auquel nous nous référerons souvent. Soit A et B, deux matrices non singulières, alors

$$(A + CBD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C (B^{-1} + DA^{-1}C)^{-1} DA^{-1}$$

$$(A + CBD)^{-1} CB = A^{-1}C (B^{-1} + DA^{-1}C)^{-1}.$$

(voir Première partie pour la démonstration).



avec 
$$w_{n+1} = J Y_{n+1} / \sqrt{c} = (y_{n+1} - v'_n V_n^{-1} Y_n) / \sqrt{c} \quad (13.b)$$

Preuve.

L'estimateur des m.c.g. est défini par :

$$\hat{\beta}_{n+1} = (X'_{n+1} V_{n+1}^{-1} X_{n+1})^{-1} X'_{n+1} V_{n+1}^{-1} Y_{n+1}$$

En développant le deuxième terme du membre de droite, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{n+1} &= (X'_{n+1} V_{n+1}^{-1} X_{n+1})^{-1} \left\{ X'_{n+1} \left[ L V_n^{-1} L' + c^{-1} J' J \right] Y_{n+1} \right\} \\ &= (X'_{n+1} V_{n+1}^{-1} X_{n+1})^{-1} \left\{ X'_n V_n^{-1} Y_n + c^{-1} X'_{n+1} J' J Y_{n+1} \right\} \\ &= (X'_{n+1} V_{n+1}^{-1} X_{n+1})^{-1} \left\{ X'_n V_n^{-1} Y_n + u'_{n+1} w_{n+1} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

avec 
$$w_{n+1} = J Y_{n+1} / \sqrt{c} = (y_{n+1} - v'_n V_n^{-1} Y_n) / \sqrt{c}$$

Or 
$$\begin{aligned} X'_n V_n^{-1} Y_n &= (X'_n V_n^{-1} X_n) \hat{\beta}_n \\ &= (X'_{n+1} V_{n+1}^{-1} X_{n+1} - u'_{n+1} u_{n+1}) \hat{\beta}_n \end{aligned}$$

d'après la relation (9).

En reportant cette expression dans (14), il vient

$$\hat{\beta}_{n+1} = \hat{\beta}_n + (X'_{n+1} V_{n+1}^{-1} X_{n+1})^{-1} u'_{n+1} (w_{n+1} - u_{n+1} \hat{\beta}_n).$$

La matrice de gain est définie par  $A_n = (X'_{n+1} V_{n+1}^{-1} X_{n+1})^{-1} u'_{n+1}$ ,

ou encore en utilisant le lemme d'inversion matricielle par

$$A_n = (X'_n V_n^{-1} X_n)^{-1} u'_{n+1} [1 + u_{n+1} (X'_n V_n^{-1} X_n)^{-1} u'_{n+1}]^{-1} \quad \blacksquare$$

Remarques.

1) La prévision de  $y$  pour la période  $n+1$ ,  $\hat{y}_{n+1} = x_{n+1}' \hat{\beta}_n + v_n' V_n^{-1} \hat{\varepsilon}_n$ , est corrigée par un terme qui dépend de  $\hat{\varepsilon}_n$  les erreurs estimées de la période  $n$  et de  $v_n' V_n^{-1}$  le rapport de la covariance des erreurs de deux périodes successives  $n$  et  $n+1$  sur la variance des erreurs de la période  $n$ . Cette expression indique clairement que le terme  $v_n' V_n^{-1}$  joue le rôle de coefficient de correction.

2) L'erreur de prédiction s'exprime par

$$(w_{n+1} - u_{n+1}' \hat{\beta}_n) = \left[ y_{n+1} - (x_{n+1}' \hat{\beta}_n + v_n' V_n^{-1} \hat{\varepsilon}_n) \right] / \sqrt{c}$$

et ses propriétés sont :

$$E(w_{n+1} - u_{n+1}' \hat{\beta}_n) = 0$$

$$V(w_{n+1} - u_{n+1}' \hat{\beta}_n) = 1 + u_{n+1}' (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} u_{n+1}$$

3) L'estimateur récurrent des moindres carrés généralisés s'écrit également

$$\hat{\beta}_{n+1} = \hat{\beta}_n + c^{-1/2} A_n (y_{n+1} - x_{n+1}' \hat{\beta}_n) - c^{-1/2} A_n v_n' V_n^{-1} \hat{\varepsilon}_n \quad (15)$$

4) La mise à jour de l'estimateur s'effectue en pondérant les données disponibles  $Y_{n+1}$ ,  $X_{n+1}$  par  $c^{-1/2} J$ . Le coefficient de correction  $v_n' V_n^{-1}$  dépend alors de la structure de la matrice de variances-covariances.

**La somme des carrés des erreurs.**

La somme des carrés des erreurs pour les  $n+1$  observations est définie par

$$SS_{n+1} = Y_{n+1}' \left[ V_{n+1}^{-1} - V_{n+1}^{-1} X_{n+1} \left( X_{n+1}' V_{n+1}^{-1} X_{n+1} \right)^{-1} X_{n+1}' V_{n+1}^{-1} \right] Y_{n+1}$$

Théorème 2.

La formulation récurrente de la somme des carrés des erreurs s'écrit :

$$SS_{n+1} = SS_n + e_n^2$$

avec 
$$e_n = (w_{n+1} - u_{n+1}' \hat{\beta}_n) / \sqrt{d}$$

$$d = 1 + u_{n+1}' (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} u_{n+1}$$

Les propriétés du terme d'erreur sont :

$$\left. \begin{array}{l} E(e) = 0 \\ V(e) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow e \sim \text{i.i.d. } (0, 1)$$

Preuve.

D'après les relations (8) et (9), nous avons

$$\begin{aligned} SS_{n+1} &= Y_n' V_n^{-1} Y_n + w_{n+1}' w_{n+1} - (Y_n' V_n^{-1} X_n + w_{n+1}' u_{n+1}) \left[ (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} - \right. \\ &\quad \left. d^{-1} (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} u_{n+1}' u_{n+1} (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} \right] (X_n' V_n^{-1} Y_n + u_{n+1}' w_{n+1}) \\ &= Y_n' V_n^{-1} Y_n - Y_n' V_n^{-1} X_n (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} X_n' V_n^{-1} Y_n + w_{n+1}' w_{n+1} \\ &\quad - w_{n+1}' u_{n+1} (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} u_{n+1}' w_{n+1} \\ &\quad + d^{-1} w_{n+1}' u_{n+1} (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} u_{n+1}' u_{n+1} (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} u_{n+1}' w_{n+1} \\ &\quad - w_{n+1}' u_{n+1} (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} X_n' V_n^{-1} Y_n \\ &\quad + d^{-1} w_{n+1}' u_{n+1} (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} u_{n+1}' u_{n+1} (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} X_n' V_n^{-1} Y_n \\ &\quad - Y_n' V_n^{-1} X_n (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} u_{n+1}' w_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + d^{-1} Y_n' V_n^{-1} X_n (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} u_{n+1}' u_{n+1} (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} u_{n+1}' w_{n+1} \\
& + d^{-1} Y_n' V_n^{-1} X_n (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} u_{n+1}' u_{n+1} (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} X_n' V_n^{-1} Y_n
\end{aligned}$$

avec 
$$d = 1 + u_{n+1}' (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} u_{n+1}$$

après simplification, on obtient

$$\begin{aligned}
SS_{n+1} = SS_n & + w_{n+1}' w_{n+1} - d^{-1} w_{n+1}' u_{n+1} (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} u_{n+1}' w_{n+1} - d^{-1} w_{n+1}' u_{n+1} \hat{\beta}_n \\
& - d^{-1} \hat{\beta}_n' u_{n+1}' w_{n+1} + d^{-1} \hat{\beta}_n' u_{n+1}' u_{n+1} \hat{\beta}_n
\end{aligned}$$

$$SS_{n+1} = SS_n + d^{-1} (w_{n+1} - u_{n+1} \hat{\beta}_n)^2 \quad \blacksquare$$

L'estimateur récursif des moindres carrés généralisés dépend de la structure de la matrice des variances-covariances, il se simplifie considérablement dans le cas où la covariance est nulle.

### Cas hétéroscédastique.

Pour un modèle hétéroscédastique, la matrice des variances-covariances a une structure diagonale, i.e.  $v = 0$ , dans ce cas l'estimateur récurrent devient

$$\hat{\beta}_{n+1} = \hat{\beta}_n + A_n (y_{n+1} - x_{n+1}' \hat{\beta}_n)$$

avec la matrice de gain

$$A_n = (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} x_{n+1}' [v_{n+1} + x_{n+1}' (X_n' V_n^{-1} X_n)^{-1} x_{n+1}]^{-1}$$

On reconnaît la forme récursive des moindres carrés ordinaires, la procédure de calcul se simplifie donc considérablement.

De la même manière, la somme des carrés des erreurs devient

$$SS_{n+1} = SS_n + \tilde{e}_n^2$$

$$\text{où } \tilde{e}_n = (y_{n+1} - x'_{n+1} \hat{\beta}_n) / (v_{n+1} + x'_{n+1} (X'_n V_n^{-1} X_n)^{-1} x_n)^{-1/2}$$

La formulation récurrente des m.c.g. nous permet d'établir une formulation récursive de l'estimateur des variables instrumentales généralisées.

## II- Formulation récursive de l'estimateur des variables instrumentales généralisées.

Considérons maintenant le cas souvent rencontré dans les modèles à équations simultanées, modèles à erreurs sur les variables, modèles des anticipations rationnelles, modèles dynamiques avec erreurs autocorrélées et en général les modèles des séries temporelles où les erreurs ne sont pas orthogonales aux variables explicatives ( $E(\varepsilon/X) \neq 0$ ) par suite  $\text{plim } X'\varepsilon \neq 0$ .

Dans ce cas, l'estimateur des m.c.g est non convergent. On obtient en revanche la convergence en utilisant la méthode d'estimation par les variables instrumentales ( V.I ).

Soit Z la matrice instrumentale de dimension  $n \times l$  tel que  $l \geq m$ , l'estimateur de  $\beta$  par la méthode des variables instrumentales peut être obtenu :

a/ soit par la minimisation d'une norme d'erreur quadratique pondérée par une matrice définie positive S.

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta} \| Z'T'Y - Z'T'X\beta \|_S^2 \quad (16)$$

où  $\| . \|$  désigne une norme et T est une matrice connue, définie positive,

la solution de ce problème est :

$$\hat{\beta} = (X'QX)^{-1} X'QY \quad (17)$$

où  $Q = TZSZ'T'$ .

Il est évident que le choix de la matrice de pondération S et de la matrice T permet de définir différents estimateurs.

ia) V.I. ordinaires (analogues aux m.c.d.).

$T = I$  et  $S = (Z'Z)^{-1}$  l'estimateur associé est défini par

$$\hat{\beta} = \left[ X'Z (Z'Z)^{-1} Z'X \right]^{-1} X'Z (Z'Z)^{-1} Z'Y$$

ii) Sa généralisation.

$T = I$  et  $S = (Z'VZ)^{-1}$  l'estimateur des V.I. est défini par :

$$\hat{\beta} = \left[ X'Z (Z'VZ)^{-1} Z'X \right]^{-1} X'Z (Z'VZ)^{-1} Z'Y$$

iii) V.I. généralisées (analogues aux m.c.g.)

$T = V^{-1}$  et  $S = (Z'V^{-1}Z)^{-1}$ , on obtient l'estimateur des V.I. généralisées,

$$\hat{\beta} = \left[ X'V^{-1}Z (Z'V^{-1}Z)^{-1} Z'V^{-1}X \right]^{-1} X'V^{-1}Z (Z'V^{-1}Z)^{-1} Z'V^{-1}Y$$

b/ soit par la généralisation de la méthode des V.I. En supposant que  $l > m$ , l'estimateur de  $\beta$  peut être généralisé en :

$$\hat{\beta} = (Z'X)^{-} Z'Y \quad (18)$$

où  $(Z'X)^{-}$  désigne une inverse généralisée.

La matrice  $Z'X$  est de dimension  $l \times m$ , si elle est de rang maximum  $r(Z'X) = m$ , alors  $(Z'X)^{-} Z'X = I_m$ .

La matrice inverse généralisée peut être définie par :

$$ib) (Z'X)^{-} = \left[ X'Z (Z'Z)^{-1} Z'X \right]^{-1} X'Z (Z'Z)^{-1}$$

$$\text{iib) } (Z'X)^{-} = \left[ X'Z \left( Z'VZ \right) Z'X \right]^{-1} X'Z \left( Z'VZ \right)^{-1}$$

$$\text{iiib) } (Z'X)^{-} = \left[ X'V^{-1}Z \left( Z'V^{-1}Z \right)^{-1} Z'V^{-1}X \right]^{-1} X'V^{-1}Z \left( Z'V^{-1}Z \right)^{-1} Z'V^{-1}$$

En reportant ces résultats dans (18), on obtient les trois estimateurs (ia - iiaa) décrits ci-dessus.

En effet, toutes les solutions du problème (16) reviennent à trouver l'inverse généralisée de la matrice  $(Z'X)$ .

Dans le cas iiaa), nous pouvons constater que les observations  $X$  et  $Y$  ont été transformées par la matrice  $V^{-1}$ . Une telle méthode est appelée préfiltrage des observations (transformations des observations) pour les modèles à anticipations rationnelles, les modèles à retards échelonnés et les modèles des séries temporelles.

Considérons par exemple la décomposition de la matrice des variances-covariances des erreurs  $V$  définie positive; il existe alors une matrice de transformation  $T$  triangulaire inférieure ou supérieure (factorisation de Cholesky) telle que :

$$TVT' = I \text{ (matrice unité).}$$

Si  $T$  est une matrice triangulaire supérieure, on obtient l'estimateur de Hayashi et Sims (1983)

$$\text{iiic) } \hat{\beta} = [X'T'Z(Z'Z)^{-1}Z'TX]^{-1}X'T'Z(Z'Z)^{-1}Z'TY$$

Stoica et Söderström (1983) ont utilisé une formulation analogue à (17) pour estimer les paramètres d'un modèle ARMAX (Autorégressif à moyenne ajustée avec entrée auxiliaire). Ils ont supposé que  $T$  est un polynôme rationnel stable c'est-à-dire que les racines du polynôme rationnel  $T(z)$  doivent être à l'intérieur du cercle unité

$$T(z) = 0 \quad |z| < 1.$$

**La convergence des estimateurs.**

Ces estimateurs sont convergents sous les hypothèses suivantes :

$$\text{plim } \frac{1}{n} Z' T \varepsilon = 0 \quad (19.a)$$

$$\text{plim } \frac{1}{n} Z' T X = Q_{ZX} \text{ existe et est de plein rang.} \quad (19.b)$$

$$\lim \frac{1}{n} S = Q_S \text{ définie positive} \quad (19.c)$$

**Quelques remarques.**

- 1) Si  $V = \sigma^2 I$  les trois estimateurs sont identiques
- 2) Si  $\dim Z = m$  les deux estimateurs ia) et iia) sont identiques mais en général différent de iiaa).
- 3) Cette méthode permet d'obtenir une estimation non biaisée de la partie AR d'un processus ARMA, Stoica, Söderström et Friedlander (1985).

**Estimateur récurrent des variables instrumentales généralisées.**

L'estimateur des V.I. généralisées, pour les  $n+1$  observations, est défini par :

$$\hat{\beta}_{n+1} = \left[ X'_{n+1} V_{n+1}^{-1} Z_{n+1} \left( Z'_{n+1} V_{n+1}^{-1} Z_{n+1} \right)^{-1} Z'_{n+1} V_{n+1}^{-1} X_{n+1} \right]^{-1} X'_{n+1} V_{n+1}^{-1} Z_{n+1} \\ \times \left( Z'_{n+1} V_{n+1}^{-1} Z_{n+1} \right)^{-1} Z'_{n+1} V_{n+1}^{-1} Y_{n+1}$$

il s'écrit également

$$\hat{\beta}_{n+1} = \left[ \tilde{X}'_{n+1} (Z'_{n+1} V_{n+1}^{-1} Z_{n+1}) \tilde{X}_{n+1} \right]^{-1} \tilde{X}'_{n+1} (Z'_{n+1} V_{n+1}^{-1} Z_{n+1}) \tilde{Y}_{n+1}$$

où  $\tilde{X}_{n+1} = (Z'_{n+1} V_{n+1}^{-1} Z_{n+1})^{-1} Z'_{n+1} V_{n+1}^{-1} X_{n+1} \quad (20)$

$$\tilde{Y}_{n+1} = (Z'_{n+1} V_{n+1}^{-1} Z_{n+1})^{-1} Z'_{n+1} V_{n+1}^{-1} Y_{n+1} \quad (21)$$



L'obtention de la formulation récurrente de cet estimateur nécessite les propositions suivantes.

**Proposition 1.**

La formulation récurrente de la matrice  $Z'_{n+1} V_{n+1}^{-1} Z_{n+1}$  s'écrit :

$$Z'_{n+1} V_{n+1}^{-1} Z_{n+1} = Z'_n V_n^{-1} Z_n + k'_{n+1} k_{n+1} \quad (22.a)$$

avec  $k_{n+1} = JZ_{n+1} / \sqrt{c} = (z'_{n+1} - v'_n V_n^{-1} Z_n) / \sqrt{c}$  (22.b)

Les formulations récurrentes de  $\tilde{X}_{n+1}$  et  $\tilde{Y}_{n+1}$  sont respectivement

$$\tilde{X}_{n+1} = \tilde{X}_n + B_n (u_{n+1} - k_{n+1} \tilde{X}_n) \quad (22.c)$$

$$\tilde{Y}_{n+1} = \tilde{Y}_n + B_n (w_{n+1} - k_{n+1} \tilde{Y}_n) \quad (22.d)$$

avec  $B_n = (Z'_n V_n^{-1} Z_n)^{-1} k'_{n+1} (1 + k_{n+1} (Z'_n V_n^{-1} Z_n)^{-1} k'_{n+1})^{-1}$  la matrice de gain.

**Preuve.**

La relation (22.a) est immédiate

$$\begin{bmatrix} Z'_n \\ z'_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} LV_n^{-1} L' + c^{-1} J' J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_n \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = Z'_n V_n^{-1} Z_n + c^{-1} z'_{n+1} J' J z_{n+1}$$

Définissons le vecteur  $k_{n+1} = c^{-1/2} J z_{n+1}$ .

Les deux expressions (22.c) et (22.d) sont obtenues en appliquant la formulation récurrente des m.c.g. ■

**Proposition 2.**

La formulation récurrente de la matrice  $P_n = \tilde{X}'_n (Z'_n V_n^{-1} Z_n) \tilde{X}_n$  s'écrit :

$$P_{n+1} = P_n + u'_{n+1} u_{n+1} - f'_{n+1} f_{n+1} \quad (23. a)$$

$$\text{avec } f_{n+1} = (u_{n+1} - k_{n+1} \tilde{X}_n) / \sqrt{r} \quad (23. b)$$

$$r = (1 + k_{n+1} (Z' V^{-1} Z)^{-1} k'_{n+1}) \quad (23. c)$$

elle peut s'écrire également

$$P_{n+1} = P_n + h'_{n+1} l_{n+1} \quad (24. a)$$

$$\text{avec } h'_{n+1} = [u'_{n+1} \quad f'_{n+1}] \quad (24. b)$$

$$l_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ -f_{n+1} \end{bmatrix} \quad (24. c)$$

### Preuve.

D'après les relations (22), nous avons :

$$P_{n+1} = \left[ \tilde{X}_n + B_n (u_{n+1} - k_{n+1} \tilde{X}_n) \right]' \left[ Z' V^{-1} Z + k'_{n+1} k_{n+1} \right] \\ \times \left[ \tilde{X}_n + B_n (u_{n+1} - k_{n+1} \tilde{X}_n) \right]$$

En remplaçant la matrice de gain  $B_n$  par son expression et après quelques manipulations, nous avons

$$P_{n+1} = \tilde{X}'_n (Z' V^{-1} Z) \tilde{X}_n + \tilde{X}'_n k'_{n+1} k_{n+1} \tilde{X}_n \\ + (u_{n+1} - k_{n+1} \tilde{X}_n)' k_{n+1} \tilde{X}_n + \tilde{X}'_n k'_{n+1} (u_{n+1} - k_{n+1} \tilde{X}_n)$$

$$+ r^{-1} (u_{n+1} - k_{n+1} \tilde{X}_{n+1})' k_{n+1} (Z_n' V_n^{-1} Z_n) k_{n+1}' (u_{n+1} - k_{n+1} \tilde{X}_{n+1})$$

avec  $r = (1 + k_{n+1}' (Z_n' V_n^{-1} Z_n)^{-1} k_{n+1})$

Après simplification, on obtient

$$P_{n+1}^{-1} = \tilde{X}_n' (Z_n' V_n^{-1} Z_n) \tilde{X}_n + u_{n+1}' u_{n+1} - r^{-1} (u_{n+1} - k_{n+1} \tilde{X}_{n+1})' (u_{n+1} - k_{n+1} \tilde{X}_{n+1}) \blacksquare$$

Cette proposition nous permet de calculer l'inverse de la matrice  $P_n$ , en appliquant le lemme d'inversion matricielle sur la relation (24.a), nous avons la proposition suivante.

**Proposition 3.**

La matrice  $P_{n+1}^{-1} = \left[ \tilde{X}_{n+1}' (Z_{n+1}' V_{n+1}^{-1} Z_{n+1}) \tilde{X}_{n+1} \right]^{-1}$  s'écrit sous la formulation suivante :

$$P_{n+1}^{-1} = P_n^{-1} - C_n l_{n+1} P_n^{-1}$$

où  $C_n = P_n^{-1} h_{n+1}' (I + l_{n+1} P_n^{-1} h_{n+1}')^{-1} = P_{n+1}^{-1} h_{n+1}'$  est la matrice de gain.

Cette dernière proposition nous permet de définir une formulation récurrente de l'estimateur.

**Théorème 3.**

L'estimateur récurrent des V.I. généralisées s'écrit :

$$\hat{\beta}_{n+1} = \hat{\beta}_n + C_n (m_{n+1} - l_{n+1} \hat{\beta}_n)$$

$$\text{avec } m_{n+1} = \begin{bmatrix} w_{n+1} \\ -p_{n+1} \end{bmatrix} \quad p_{n+1} = (w_{n+1} - k_{n+1}' \tilde{Y}_n) / \sqrt{r}$$

$$l_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ -f_{n+1} \end{bmatrix} \quad f_{n+1} = (u_{n+1} - k_{n+1}' \tilde{X}_n) / \sqrt{r}$$

$$r = 1 + k_{n+1}' (Z_n' V_n^{-1} Z_n)^{-1} k_{n+1}$$

Preuve.

$$\hat{\beta}_{n+1} = P_{n+1}^{-1} \left\{ \tilde{X}_{n+1}' (Z_{n+1}' V_{n+1}^{-1} Z_{n+1}) \tilde{Y}_{n+1} \right\}$$

Compte tenu des relations (22), nous avons

$$\hat{\beta}_{n+1} = P_{n+1}^{-1} \left\{ \left[ \tilde{X}_n + r^{-1} (Z_n' V_n^{-1} Z_n)^{-1} k_{n+1} (u_{n+1} - k_{n+1}' \tilde{X}_n) \right]' \left[ Z_n' V_n^{-1} Z_n + k_{n+1}' k_{n+1} \right] \right. \\ \left. \left[ \tilde{Y}_n + r^{-1} (Z_n' V_n^{-1} Z_n)^{-1} k_{n+1} (w_{n+1} - k_{n+1}' \tilde{Y}_n) \right] \right\}$$

Après quelques manipulations, on obtient :

$$\hat{\beta}_{n+1} = P_{n+1}^{-1} \left\{ \tilde{X}_n' (Z_n' V_n^{-1} Z_n) \tilde{Y}_n + u_{n+1}' w_{n+1} - (u_{n+1} - k_{n+1}' \tilde{X}_n)' (w_{n+1} - k_{n+1}' \tilde{Y}_n) r^{-1} \right\} \\ = P_{n+1}^{-1} \left\{ \tilde{X}_n' (Z_n' V_n^{-1} Z_n) \tilde{Y}_n + h_{n+1}' m_{n+1} \right\} \quad (25)$$

$$\text{où } h_{n+1}' = (u_{n+1}' \quad f_{n+1}') \quad f_{n+1} = (u_{n+1} - k_{n+1}' \tilde{X}_n) r^{-1/2}$$

$$m_{n+1} = \begin{bmatrix} w_{n+1} \\ -p_{n+1} \end{bmatrix} \quad p_{n+1} = (w_{n+1} - k_{n+1}' \tilde{Y}_n) r^{-1/2}$$

$$\text{or} \quad \tilde{X}'_n (Z'_n V_n^{-1} Z_n) \tilde{Y}_n = \tilde{X}'_n (Z'_n V_n^{-1} Z_n) \tilde{X}_n \hat{\beta}_n \quad (26)$$

$$= [P_{n+1}^{-1} - h'_{n+1} l_{n+1}] \hat{\beta}_n \quad (27)$$

Finalement nous avons

$$\hat{\beta}_{n+1} = \hat{\beta}_n + P_{n+1}^{-1} h'_{n+1} (m_{n+1} - l_{n+1} \hat{\beta}_n)$$

La formulation que nous venons de développer, nécessite le calcul de l'inverse de la matrice  $(I + l_{n+1} P_n^{-1} h'_{n+1})$  pour obtenir la matrice de gain.

Mais on peut établir une formulation récurrente sans inversion supplémentaire de matrice, considérons d'abord la proposition suivante.

**Proposition 4.**

Le calcul de l'inverse de la matrice des variances-covariances

$$P_{n+1} = \left[ \tilde{X}'_{n+1} (Z'_{n+1} V_{n+1}^{-1} Z_{n+1}) \tilde{X}_{n+1} \right]$$

de façon récursive s'effectue en deux étapes :

1<sup>ère</sup> étape.

$$\tilde{P}_n^{-1} = P_n^{-1} - M_n^* u_{n+1} P_n^{-1}$$

avec  $M_n^* = P_n^{-1} u'_{n+1} (1 + u_{n+1} P_n^{-1} u'_{n+1})^{-1}$

$$= \tilde{P}_n^{-1} u'_{n+1}$$

qui est la matrice de gain.

2<sup>ème</sup> étape.

$$P_{n+1}^{-1} = \tilde{P}_n^{-1} - N_n^* f_n \tilde{P}_n^{-1}$$

avec la matrice de gain

$$\begin{aligned}
N_n^* &= \tilde{P}_n^{-1} f'_{n+1} (f'_{n+1} \tilde{P}_n^{-1} f'_{n+1} - 1)^{-1} \\
&= - P_{n+1}^{-1} f'_{n+1}
\end{aligned}$$

Preuve.

Ecrivons la relation (23.a) comme suit

$$P_{n+1} = \tilde{P}_n - f'_{n+1} f_{n+1} \quad (28)$$

$$\text{avec } \tilde{P}_n = P_n + u'_{n+1} u_{n+1} \quad (29)$$

Calculons d'abord l'inverse de cette dernière relation, en appliquant à (29) le lemme d'inversion matricielle, nous avons

$$\tilde{P}_n^{-1} = P_n^{-1} - P_n^{-1} u'_{n+1} u_{n+1} P_n^{-1} (1 + u'_{n+1} P_n^{-1} u_{n+1})^{-1}$$

Définissons la matrice de gain  $M_n^*$

$$M_n^* = P_n^{-1} u'_{n+1} (1 + u'_{n+1} P_n^{-1} u_{n+1})^{-1}$$

D'après le lemme d'inversion matricielle la matrice de gain s'écrit également par

$$M_n^* = \tilde{P}_n^{-1} u'_{n+1}$$

De la même manière en utilisant le lemme d'inversion matricielle pour la première relation, nous obtenons une formule récursive de mise à jour de l'inverse de la matrice des variances-covariances

$$P_{n+1}^{-1} = \tilde{P}_n^{-1} - \tilde{P}_n^{-1} f'_{n+1} f_{n+1} \tilde{P}_n^{-1} (f'_{n+1} \tilde{P}_n^{-1} f'_{n+1} - 1)^{-1}$$

La matrice de gain est définie par

$$N_n^* = \tilde{P}_n^{-1} f'_{n+1} (f'_{n+1} \tilde{P}_n^{-1} f'_{n+1} - 1)^{-1}$$

que l'on exprime également par

$$N_n^* = - P_{n+1}^{-1} f'_{n+1}$$

d'après le résultat du lemme d'inversion matriciel. ■

Cette proposition nous permet de définir un estimateur récurrent par la méthode des variables instrumentales généralisées sans inversion supplémentaire de matrice.

#### Théorème 4.

L'estimateur récurrent des V.I. généralisées s'effectue en deux étapes

1<sup>ère</sup> étape.

$$\tilde{\beta}_{n+1} = \hat{\beta}_n + M_n^* (w_{n+1} - u_{n+1} \hat{\beta}_n)$$

$$\text{où } M_n^* = P_{n+1}^{-1} u'_{n+1} (1 + u_{n+1} P_n^{-1} u'_{n+1})^{-1}$$

$$= \tilde{P}_n^{-1} u'_{n+1}$$

est la matrice de gain.

2<sup>ème</sup> étape.

$$\hat{\beta}_{n+1} = \tilde{\beta}_n + N_n^* (p_{n+1} - f'_{n+1} \tilde{\beta}_n)$$

avec la matrice de gain

$$N_n^* = \tilde{P}_n^{-1} f'_{n+1} (f'_{n+1} \tilde{P}_n^{-1} f'_{n+1} - 1)^{-1}$$

$$= - P_{n+1}^{-1} f'_{n+1}$$

Preuve.

D'après les relations (25) et (26), l'estimateur de  $\beta$  s'écrit comme suit

$$\hat{\beta}_{n+1} = P_{n+1}^{-1} \left\{ P_n \hat{\beta}_n + u'_{n+1} w_{n+1} - f'_{n+1} p_{n+1} \right\}$$

compte tenu de la relation (29) il vient

$$\hat{\beta}_{n+1} = P_{n+1}^{-1} \left\{ \tilde{P}_n \hat{\beta}_n + u'_{n+1} (w_{n+1} - u_{n+1} \hat{\beta}_n) \right\} - P_{n+1}^{-1} f'_{n+1} p_{n+1}$$

soit encore d'après la proposition 4,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{n+1} &= \left( \tilde{P}_n^{-1} - N_n^* g'_{n+1} \tilde{P}_n^{-1} \right) \left\{ \tilde{P}_n \hat{\beta}_n + u'_{n+1} (w_{n+1} - u_{n+1} \hat{\beta}_n) \right\} + N_n^* p_{n+1} \\ &= \hat{\beta}_n + M_n^* (w_{n+1} - u_{n+1} \hat{\beta}_n) - N_n^* f'_{n+1} (\hat{\beta}_n + M_n^* (w_{n+1} - u_{n+1} \hat{\beta}_n)) \\ &\quad + N_n^* p_{n+1} \end{aligned}$$

Définissons un vecteur intermédiaire

$$\tilde{\beta}_n = \hat{\beta}_n + M_n^* (w_{n+1} - u_{n+1} \hat{\beta}_n)$$

ainsi nous avons une formule récursive de mise à jour de l'estimateur

$$\hat{\beta}_{n+1} = \tilde{\beta}_n + N_n^* (p_{n+1} - f'_{n+1} \tilde{\beta}_n). \quad \blacksquare$$

Nous avons ainsi obtenu une formulation récursive de mise à jour de l'estimateur sans inversion de matrice supplémentaire à chaque étape. On peut constater que la première étape correspond à l'utilisation de l'estimateur récurrent des m.c.g..



## Conclusions.

Nous venons de développer des formulations récursives de l'estimateur des moindres carrés généralisés et des variables instrumentales généralisées. Elles présentent aussi bien un intérêt théorique que pratique. De plus elles s'appliquent à une classe très large des modèles économétriques : modèles à équations simultanées, modèles à erreurs sur les variables, modèles des anticipations rationnelles, modèles des retards échelonnés et modèles des séries temporelles.

## BIBLIOGRAPHIE

- BALESTRA P. (1988), Equality between ordinary and generalized procedures in econometrics, *Cahiers du département d'économétrie de Genève*, N° 88.01, janvier.
- HAYASHI F. et SIMS C. (1983), Nearly efficient estimation of times series models with predetermined but not exogenous instruments, *Econometrica*, Vol 51, N°3, pp 783 - 798.
- Mc GILCHRIST C.A. et SANDLAND R.L. (1979), Recursive estimation of the general linear model with dependent errors, *Journal of Royal Statistical Society*, B, 41, N°1, pp 65 - 68.
- ODELL P.L. et LEWIS T.O (1971), Best linear recursive estimation, *Journal of American Statistical Association*, Vol 66, N°336, pp 893 - 896.
- RATSIMALAHELO Z. (1991), Estimateurs rékursifs 1, *Document de l'IME*.
- STOÏCA P. et SÖDERSTRÖM T. (1983), Optimal instrumental variable estimation and approximate implementation, *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol AC- 28, N°7, pp 757 - 772.
- STOÏCA P., SÖDERSTRÖM T. et FRIEDLANDER B. (1985), Optimal instrumental variable estimates of the A.R parameters of an ARMA process, *IEEE Transaction on automatic control* Vol AC-30, N° 11, pp 1066 - 1074.

