



**HAL**  
open science

# Le modèle de hotelling: contributions et limites (application au cas où les variables stratégiques sont les localisations et les prix)

Agnès Basaille-Gahitte, Bernadette Mathieu-Nicot

## ► To cite this version:

Agnès Basaille-Gahitte, Bernadette Mathieu-Nicot. Le modèle de hotelling: contributions et limites (application au cas où les variables stratégiques sont les localisations et les prix). [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1991, 19 p., ref. bib.: 1 p. 1/2. hal-01541374

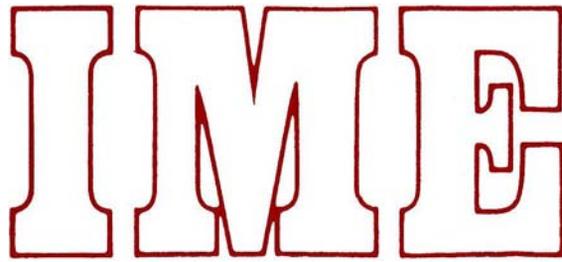
**HAL Id: hal-01541374**

**<https://hal.science/hal-01541374v1>**

Submitted on 19 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

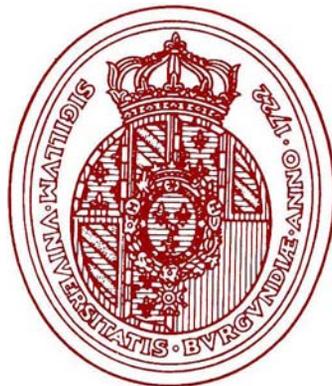
L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ÉCONOMIQUES

LATEC C.N.R.S. URA 342

**DOCUMENT de TRAVAIL**



UNIVERSITE DE BOURGOGNE

FACULTE DE SCIENCE ECONOMIQUE ET DE GESTION

4, boulevard Gabriel - 21000 DIJON - Tél. 80 39 54 30 - Fax 80 39 56 48

ISSN : 0292-2002

9113

LE MODELE DE HOTELLING : CONTRIBUTIONS ET LIMITES  
Application au cas où les variables stratégiques  
sont les localisations et les prix

*Agnès BASAILLE-GAHITTE\**  
*Bernadette MATHIEU-NICOT\*\**

*novembre 1991*

*\* Chercheur à l'I.M.E.*  
*\*\* Maître de Conférences à l'Université de Besançon*



# LE MODELE DE HOTELLING: CONTRIBUTIONS ET LIMITES. APPLICATION AU CAS OU LES VARIABLES STRATEGIQUES SONT LES LOCALISATIONS ET LES PRIX

Agnès BASAILLE-GAHITTE

Bernadette MATHIEU-NICOT

## *Résumé*

Le modèle de HOTELLING a fait l'objet de nombreuses discussions. On sait en particulier que lorsque le domaine des paramètres de localisation s'élargit et pour des coûts de transport linéaires, le prix d'équilibre en stratégie pure n'existe plus. Le coût de transport linéaire et les discontinuités des fonctions sont responsables de l'absence d'équilibre.

L'objet de cette étude est de démontrer l'existence d'un équilibre à partir d'un jeu séquentiel. Tout d'abord les firmes choisissent leur localisation en anticipant des prix d'équilibre. Après avoir vérifié que, dans la pratique des affaires, les coûts de transport peuvent être soit de forme concave, soit de forme convexe, on introduit ici des coûts de transport quadratiques. Cette hypothèse garantit la continuité des fonctions d'utilité. Pour obtenir un équilibre en stratégie pure, il convient également de raisonner dans cette première étape sur un segment de marché de longueur  $L$ . La seconde étape du jeu séquentiel nécessite de recourir à des stratégies mixtes, préalablement justifiées, pour démontrer l'existence de prix d'équilibre.

## *Mots clés*

Information complète  
Jeu non coopératif  
Jeu séquentiel  
Coûts quadratiques  
Stratégies mixtes

## Section 1: Introduction

L'objet de cette étude consiste à partir du modèle de concurrence spatiale de HOTELLING (1929), à rechercher l'existence d'une solution d'équilibre de prix dès lors que les vendeurs différencient leurs produits. On envisagera successivement le cas où les variables stratégiques sont les localisations et les prix. Dans ce modèle, les produits sont homogènes, ils sont néanmoins différenciés, non par leur qualité, mais par leur prix de vente. La différenciation des produits vient de ce qu'ils intéressent davantage les consommateurs qui se trouvent à proximité de ces derniers, par le fait même d'une diminution du coût de transport nécessaire pour réaliser l'achat.

Les résultats obtenus dans le cadre de l'équilibre de BERTRAND (1883) dépendent de l'hypothèse d'homogénéité de biens. En effet, le modèle de différenciation spatiale d'HOTELLING montre qu'à l'équilibre les deux firmes choisissent le même prix qui est supérieur au coût marginal  $c$ . La différence provient du coût de transport  $d$ . Lorsque ce dernier est nul, les biens deviennent donc non différenciés, puisque le consommateur peut les obtenir indifféremment à l'une ou l'autre firme. Dans ce cas, les prix sont égaux au coût marginal supposé constant ( $p_1 = p_2 = c$ ), et les profits sont nuls ( $\pi_1 = \pi_2 = 0$ ). On retrouve l'équilibre de BERTRAND. En revanche, la différenciation des produits provenant de l'existence de coût de transport positif permet aux firmes de vendre à un prix supérieur au coût unitaire sans pour autant perdre la totalité de leur clientèle. À l'équilibre,  $\pi_1 = \pi_2 = dN/2$ , où  $N$  représente l'ensemble des consommateurs répartis uniformément sur "une ville linéaire" représentée par un segment de longueur un ( $L = 1$ ).

On envisage le cas d'un équilibre non coopératif de duopole qui définit une situation où chaque concurrent n'a pas intérêt à modifier unilatéralement ses décisions compte tenu de la réaction anticipée du concurrent.

D'ASPREMONT et ALI (1979) fournissent les conditions nécessaires et suffisantes pour que les paramètres de localisation  $a$  et  $b$  ( $a$  et  $b$  sont les localisations respectives des deux firmes) garantissent l'existence d'un prix d'équilibre ( $p_1^*, p_2^*$ ) dans des jeux à stratégies pures, ces stratégies d'équilibre étant fonction des paramètres  $a$  et  $b$ . Ces auteurs vérifient que la répartition des taux de transport  $t$  garantissent l'atomicité. Ainsi:

- pour  $a + b = 1$ , le point unique d'équilibre est donné pour  $p_1^* = p_2^* = 0$
- pour  $a + b < 1$ , il existe un prix d'équilibre si et seulement si:

$$\left(L + \frac{a-b}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{3}L(a+2b)$$

et

$$\left(L + \frac{b-a}{3}\right)^2 \geq \frac{4}{3}L(b+2a)$$

il est déterminé uniquement par:

$$p_1^* = t \left( L + \frac{a-b}{3} \right)$$

$$p_2^* = t \left( L - \frac{a-b}{3} \right)$$

où  $L = 1$ .

Toutefois, lorsque le domaine des paramètres de localisation s'élargit, et pour des coûts de transport linéaire, le prix d'équilibre avec des stratégies pures n'existe plus.

Deux explications peuvent être apportées:

Tout d'abord, dans le cas de coûts de transport linéaires, les discontinuités des fonctions de résultats (profit ou utilité) sont responsables de l'absence d'équilibre. Afin d'y remédier, GABSZEWICZ et THISSE (1989) suggèrent l'hypothèse d'une fonction de coût de transport strictement convexe. Pour ce faire, il est possible de substituer aux coûts linéaires un coût de transport quadratique. Cette hypothèse garantit la continuité des fonctions d'utilité. Cette condition n'est cependant pas suffisante pour entraîner l'existence d'un équilibre pour tout couple  $(a, b)$  de localisation.

Par ailleurs, la non existence d'un équilibre de prix ne provient pas seulement de la discontinuité des comportements, mais aussi de la non concavité des fonctions de résultats. CHAMPSAUR et ROCHET (1988) montrent que ces résultats dépendent de la longueur du segment de marché  $L$ . Ils prouvent que pour une fonction  $C$  de coût de transport trois fois continuellement différentiable dans un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  incluant  $[0, L]$ , i.e. si:

$$\left| \frac{d^3 C}{dx^3} \right| \leq \frac{2}{L} \frac{d^2 C}{dx^2} \quad \forall x \in [0, L]$$

il existe un prix d'équilibre en stratégie pure. Cette condition est valable dans l'hypothèse de coût de transport quadratique.

La non existence d'un équilibre de NASH dans un modèle d'économie simplifié a déjà été souligné par EDGEWORTH (1925) dans sa résolution de l'énigme de BERTRAND (1883). Il importe de rappeler les conditions d'existence d'un équilibre de NASH (TIROLE 1990).

Soient:

- $A_i$ , l'ensemble des actions réalisables pour le joueur  $i$  ( $i = 1 \dots N$ ).
- $a = (a_1, \dots, a_i, \dots)$  le vecteur des actions.
- $U_i(a)$  la fonction objectif du joueur  $i$ .

**Théorème d'existence:**

“Si pour tout  $i$ ,  $A_i$  est compact et convexe et  $U_i$  est continue en  $a$  et quasi concave sur un ensemble d’actions comprenant  $a_i$ , alors le jeu  $[(A_i, U_i), i = 1 \dots N]$  possède un équilibre de NASH.”

Toutefois, on sait que l’équilibre de NASH en stratégie pure n’existe pas forcément dès lors que l’on considère un ensemble fini d’actions. En revanche, il existe lorsque l’on considère des stratégies mixtes. Ce qui revient à assimiler les actions aux distributions de probabilité sur  $A_i$ . Le nouvel espace obtenu est alors compact et convexe, et  $U_i$  est linéaire (donc quasi concave) et continue sur l’ensemble des actions.

Notre objectif consiste à rechercher l’existence d’un équilibre dans une variante du modèle de HOTELLING. En effet, nous considérons comme variables stratégiques non seulement les prix mais également les localisations. Pour ce faire, il faut préalablement montrer l’existence d’un équilibre de NASH dans un jeu à stratégies mixtes (Section 2).

Le cheminement de notre analyse s’effectue ensuite en deux étapes. Les firmes choisissent tout d’abord leur localisation d’équilibre (paragraphe 3.2), puis leur prix d’équilibre (paragraphe 3.3) compte tenu de leur localisation optimale. Dans cette analyse séquentielle, les firmes choisissent leur localisation en anticipant des prix d’équilibre (résultant de la seconde étape).

Cette division du processus de concurrence en deux étapes se justifie par le fait que les décisions de localisations sont difficiles à modifier dans la réalité. Il est donc raisonnable de penser que les firmes vont anticiper les conséquences dommageables que le choix de certaines localisations peut avoir sur le niveau des prix.

## Section 2: Equilibre de NASH à stratégie mixte dans un jeu non coopératif

### 2.1 Théorème d'existence d'un équilibre de GLICKSBERG

Soient:

- $N$  agents repérés par les indices  $i = 1, \dots, N$   $j = 1, \dots, N$
- $A_i \subset \mathbb{R}^m$ : l'ensemble des actions (ou stratégies) réalisables parmi lesquelles un agent choisit un élément  $a_i$  de  $A_i$  ( $\mathbb{R}^m$  est l'espace euclidien de dimension  $m$ ,  $m \geq 1$ ).
- $a \in \prod_{j=1}^N A_j$  ( $a$  est un  $N$ -uplet)
- $a_{-i} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_N)$  vecteur des actions de tous les agents sauf l'agent  $i$

On note:

- $a = (a_i, a_{-i})$

- $A = \prod_{j=1}^N A_j$

- $A_{-i} = \prod_{j=1, j \neq i}^N A_j$

Soit  $U_i : \prod_{j=1, j \neq i}^N A_j \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction d'utilité de l'agent  $i$ . Cette fonction est bornée, mesurable pour tout  $i, i = 1, \dots, N$ .

Un jeu peut être résumé par  $[(A_i, U_i), i = 1, \dots, N]$ , où:

- $A_i$  est l'ensemble des stratégies pures réalisables, ensemble non vide, convexe et compact.
- $U_i$  est la fonction de résultats (ou d'utilité).

Soit  $\Psi_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i \mid U_i(a_i, a_{-i}) = \max_{a'_i \in A_i} U_i(a'_i, a_{-i})\}$ .

$\Psi_i(a_{-i})$  est la fonction de réaction de l'agent  $i$ .

Soit  $D(A_i)$  l'espace des mesures de probabilité sur  $A_i$  dont l'axiomatique repose sur un corps de BOREL.

On définit un équilibre de NASH dans un jeu à stratégie mixte noté  $[(A_i, U_i), i = 1, \dots, N]$  par une distribution de probabilité  $(\mu_1^*, \dots, \mu_i^*, \dots, \mu_N^*)$  avec  $\mu_i^* \in D(A_i), \forall i \in N, \mu_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^N \mu_i = 1$ , qui vérifie:

$$\int U_i(a_i, a_{-i}) d(\mu_i^*(a_i) \times \mu_{-i}^*(a_{-i})) = \max_{\mu_i \in D(A_i)} \int U_i(a_i, a_{-i}) d(\mu_i(a_i) \times \mu_{-i}^*(a_{-i}))$$

où  $\mu_{-i}^*(a_{-i}) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mu_j^*(a_j)$ .

Pour simplifier, on note  $\mu$  le produit  $\mu_1 \times \dots \times \mu_N$ , qui pour tout sous ensemble  $E (E \subset A)$  est un sous ensemble mesurable.  $\mu(E) = (\mu_1 \times \dots \times \mu_N)(E)$ .

Autrement dit:

$$\int_A U_i(a) d\mu = \int_A U_i(a_1, \dots, a_N) d(\mu_1(a_1) \times \dots \times \mu_N(a_N))$$

et

$$\int_{A_{-i}} U_i(\tilde{a}_i, a_{-i}) d\mu_{-i} = \int_{A_{-i}} U_i(\tilde{a}_i, a_{-i}) d(\mu_1(a_1) \times \dots \times \mu_{i-1}(a_{i-1}) \times \mu_{i+1}(a_{i+1}) \times \dots \times \mu_N(a_N))$$

où  $(\tilde{a}_i, a_{-i})$  sera défini (paragraphe 2.3.1) comme un point de discontinuité pour  $U_i$ .

Donc pour  $\int U_i(a) d\mu$  le référentiel est  $A \equiv \prod_{i=1}^N A_i$ .

Si  $A_i$  est un ensemble fini, l'équilibre à stratégies mixtes existe (NASH 1950), d'où le théorème d'existence d'un équilibre pour un jeu à stratégie mixte de GLICKSBERG (1952).

### **Théorème 1**

Soit  $A_i \subset \mathbb{R}^m, (i = 1, \dots, N)$  un ensemble compact non vide, soit la fonction  $U_i: A \rightarrow \mathbb{R}^l$  continue, alors il existe un équilibre à stratégie mixte pour tout jeu  $[(A_i, U_i), i = 1, \dots, N]$ .

## **2.2 Justification économique de l'utilisation des stratégies mixtes**

Le principe d'un jeu à stratégie mixte consiste à choisir non plus une simple stratégie, mais se ramène à un tirage aléatoire sur l'ensemble des stratégies et à jouer ensuite la stratégie issue de ce tirage.

Ainsi pour toutes stratégies  $a_i, a_j$  et pour tout  $\mu \in [0, 1]$ , la composition  $\mu a_i + (1 - \mu) a_j$  doit être incorporée dans l'ensemble  $A$  des stratégies,  $A \subset \mathbb{R}^m$ . On associe à une telle composition une loterie admettant pour résultat possible les conséquences du choix des stratégies  $a_i, a_j$  avec les probabilités respectives  $\mu$  et  $1 - \mu$ .

On dit que l'ensemble  $A$  est une opération de mélange par rapport au référentiel. Une opération de mélange notée  $M$  est une opération binaire sur  $A$  (partout définie) telle que pour tout  $\mu \in [0, 1]$ , on ait:

$$A \times A \rightarrow A$$

$$(a_i, a_j) \rightarrow \mu a_i + (1 - \mu) a_j$$

Cette opération de mélange vérifie les propriétés d'identité, commutativité et distributivité.

Une partie non vide convexe de  $\mathbb{R}^n$  est dite ensemble de mélange lorsque l'expression générale  $\mu a_i + (1 - \mu) a_j$  est convexe. Comme il en est de même pour les mesures de probabilité toutes définies sur un corps de BOREL, pour l'économiste l'ensemble de mélange  $M$  correspond à un ensemble totalement préordonné. L'opération de mélange est transposée à un espace probabilisé (MATHIEU-NICOT 1985). On remarque que la propriété de distributivité dans un tel contexte correspond au principe de la probabilité composée dans la théorie classique de la décision (axiome 3cb de VON NEUMAN et MORGENSTERN 1953).

Les jeux à information parfaite doivent admettre un équilibre à stratégie mixte. A la notion de stratégie mixte on associe souvent maladroitement la prise d'une décision "à pile ou face". Cependant comme le montre HARSANYI (1973) un équilibre à stratégie mixte dans un jeu à information parfaite peut se justifier comme les "limites d'un équilibre" à stratégie pure pour des jeux à information imparfaite.

Dans un exemple où deux firmes décident d'investir ou de ne pas le faire, HARSANYI (1973) montre que le gain d'une firme sera  $+1$  ou  $-1$  dans le cas d'un jeu à information parfaite, alors qu'il sera  $(1 + t)$  (où  $t$  est uniformément distribué sur  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ), dans le cas d'un jeu à information imparfaite (chaque firme connaît  $t$ , mais ne connaît pas celle de son adversaire). L'auteur note que lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, l'équilibre bayésien à stratégie pure ne converge pas vers un équilibre de NASH à stratégie mixte, dans le cas d'un jeu à information parfaite.

### 2.3 Discontinuité des fonctions d'utilité

DASGUPTA et MASKIN (1986) montrent que le théorème de GLICKSBERG peut être généralisé. La non existence d'un équilibre provient des discontinuités des fonctions d'utilité, ces dernières apparaissant lorsque les stratégies des joueurs sont identiques ou diffèrent d' $1/2$ . Elles apparaissent nécessairement dès lors que l'on a un ensemble de dimension  $m$ , plus petit que l'espace des stratégies.

Soit le jeu  $[(A_i, U_i), i = 1, \dots, N]$  où  $A_i \subset \mathbb{R}^d$  est un intervalle fermé. On suppose que pour chaque  $i$ , les discontinuités de  $U_i$  sont incluses dans un sous ensemble continu multidimensionnel mais de dimension plus petite que  $N$ . Pour chaque couple d'agents  $i, j$  (dans  $\{1, \dots, N\}$ ),  $D(i)$  est un entier positif, l'entier  $d$  est tel que  $1 \leq d \leq D(i)$ .

$f_{ij}^d: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est continue à une fonction près.

$A^*(i) = \{(a_1 \dots a_N) \in A \mid \exists j \neq i, \exists d, 1 \leq d \leq D(i) \text{ tel que } a_j = f_{ij}^d(a_i)\}$ .  $f_{ij}^d$  est la fonction identité construite de telle sorte que les discontinuités apparaissent quand les stratégies des joueurs sont identiques.

On suppose que les discontinuités de la fonction  $U$  sont intégrées dans le sous ensemble  $A^{**}(i)$  de  $A^*(i)$ . En d'autres termes,  $A^{**}(i)$  est l'ensemble des discontinuités de  $U_i(a)$ ,  $\forall i$ ,  $A^{**}(i) \subset A^*(i)$ .

$$\forall a_i \in A_i, \quad A_{-i}^*(a_i) = \{a_{-i} \in A_{-i} \mid (a_i, a_{-i}) \in A^*(i)\}$$

$$A_{-i}^{**}(a_i) = \{a_{-i} \in A_{-i} \mid (a_i, a_{-i}) \in A^{**}(i)\}$$

Les déviations apparaissent lorsqu'il y a interdépendance des stratégies des joueurs. Une façon de remédier à ce problème est d'éliminer  $\int_{ij}^d$ .

### 2.3.1 Conditions d'existence d'un équilibre dans un jeu à stratégie mixte

**H1** Soit  $U_i(a)$  l'utilité d'une stratégie pour la firme  $i$ .  $U_i$  est bornée, continue, sauf sur le sous ensemble représentatif des discontinuités  $A^{**}(i)$  de  $A^*(i)$ .

**H2** On suppose l'existence d'un treillis sur  $A_i$  (suite d'approximations de  $A_i^n$ ,  $n > 0$ ) tel que ce dernier soit suffisamment grand et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_i^n = A_i$ .

Le jeu fini  $[(A_i^n, U_i), i = 1, \dots, N]$  défini sur le  $n^{\text{ème}}$  treillis est tel que la fonction de résultat de l'agent  $i$  est la restriction de  $U_i$  à l'ensemble  $\prod_{i=1}^N A_i^n$ .

D'après le théorème de NASH, ce jeu possède un équilibre à stratégie mixte noté:

$$(\mu_1^n, \dots, \mu_i^n, \dots, \mu_N^n) = \mu^n$$

La suite  $\{\mu^n\}$  converge, et sa limite est  $\mu^*$ .

Le but est donc de s'assurer que  $\mu^*$  est bien un équilibre du jeu initial à stratégie mixte  $[(A_i, U_i), i = 1, \dots, N]$ . Avant d'énoncer le théorème fondamental d'existence d'un équilibre à stratégie mixte de DASGUPTA et MASKIN, le théorème 2 vise à montrer que si  $\forall i$ ,  $\mu_i^*$  est "sans atome" sur la fermeture de  $A_i^{**}$ , notée  $\bar{A}_i^{**}$ , alors  $\mu^*$  est un équilibre du jeu  $[(A_i, U_i), i = 1, \dots, N]$ .

Par ailleurs, si pour  $n$  suffisamment important, l'équilibre à stratégie mixte se voit affecté de poids de probabilité assez faible sur des points de  $\bar{A}_i^{**}$ , alors le fait que la fonction  $U_i$  soit discontinue en ces points n'aura aucune influence sur le jeu initial.

$\forall \tilde{a}_i \in A_i^{**}(i)$  : la projection sur  $A^{**}(i)$ ,  $\exists a_{-i} \in A_{-i}$  tel que  $(\tilde{a}_i, a_{-i})$  est un point de discontinuité pour la fonction  $U_i$ .

- Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n = \mu^*$ , comme  $U_i$  est bornée,  $A_i$  est compact, la suite  $\{\int U_i(a) d\mu^n\}$  a une sous suite convergente.

Les auteurs précités montrent alors que pour tout joueur  $i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , il ne peut y avoir un nombre  $\bar{a}_i$  de stratégies pures telles que:

$$(I) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int U_i(a) d\mu^n = \int_{A_i} U_i(\bar{a}_i, a_{-i}) d\mu_{-i}^*$$

- Comme  $\sum_{i=1}^N U_i(a)$  est semi continue supérieurement, on a les propositions suivantes:

$$P(I) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{i=1}^N U_i(a) d\mu^n \leq \int \sum_{i=1}^N U_i(a) d\mu^*$$

$$P(II) \quad \exists i \in \{1, \dots, N\} \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow \infty} \int U_i(a) d\mu^n \leq \int U_i(a) d\mu^*$$

à partir de l'expression précédente,  $\exists \bar{a}_i \in A_i$  tel que:

$$P(III) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int U_i(a) d\mu^n \leq \int U_i(\bar{a}_i, a_{-i}) d\mu_{-i}^*$$

## Théorème 2

- Soit  $A_i \subset \mathbb{R}^l$ ,  $U_i : A \rightarrow \mathbb{R}^l$  continue sauf sur  $A_i^{**}(i)$ , bornée.
- Soient  $A_i^n$  tels que  $\sup_{a_i \in A_i} \left( \inf_{a_i^n \in A_i^n} |a_i - a_i^n| \right) < 1/n$ .
- $(\mu_1^n, \dots, \mu_N^n)$  est un vecteur d'équilibre de stratégie mixte sur  $[(A_i^n, U_i), i = 1, \dots, N]$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_1^n, \dots, \mu_N^n) = (\mu_1^*, \dots, \mu_N^*)$ .
- $\forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall j \in \{1, \dots, N\}, \forall d; 0 \leq d \leq D(i), \forall \bar{a}_i \in \bar{A}_i^{**}, \mu_j^*(\{f_{ij}^d(\bar{a}_i)\}) = 0$ .

Alors  $(\mu_1^*, \dots, \mu_N^*) = \mu^*$  est un équilibre pour le jeu initial.

### 2.3.2 Théorème fondamental d'existence d'un équilibre dans un jeu à stratégie mixte de DASGUPTA et MASKIN

Les jeux que nous étudierons par la suite sont des jeux à somme continue (semi supérieurement). Les fonctions de résultats doivent en outre vérifier la propriété de semi continuité inférieure.

#### Définition 1

$U_i(a_i, a_{-i})$  est faiblement semi continue inférieurement en  $a_i$  si  $\forall \bar{a}_i \in A_i^{**}(i)$ ,  $\exists \lambda \in [0, 1]$  tel que:

$$\forall a_{-i} \in A_{-i}^{**}(\bar{a}_i), \lambda \liminf_{a_i \rightarrow \bar{a}_i} U_i(a_i, a_{-i}) + (1 - \lambda) \liminf_{a_i \rightarrow \bar{a}_i} U_i(a_i, a_{-i}) \geq U_i(\bar{a}_i, a_{-i})$$

Ce qui signifie que si  $a_i$  est un point qui se trouve à l'extrémité droite de  $A_i$ , alors  $\liminf_{a_i \rightarrow \bar{a}_i} U_i(a_i, a_{-i})$  n'est pas définie. Néanmoins la définition affaiblit cette condition et on a:

$$\liminf_{a_i \rightarrow \bar{a}_i} U_i(a_i, a_{-i}) \geq U_i(\bar{a}_i, a_{-i})$$

i.e.  $U_i(a_i, a_{-i})$  est semi continue inférieurement à gauche quand  $a_i$  tend vers  $\bar{a}_i$  et inversement, lorsque  $a_i$  est un point qui se trouve à l'extrémité gauche de  $A_i$

À partir des résultats précédents, il est possible d'énoncer le théorème fondamental d'existence d'un équilibre dans un jeu à stratégie mixte élaboré par DASGUPTA et MASKIN.

### Théorème 3

- Soit  $A_i \subset \mathbb{R}'$  ( $i = 1 \dots N$ ) un intervalle fermé.
- Soit  $U_i : A \rightarrow \mathbb{R}'$  continue sauf sur  $A_i^{**}(i)$  de  $A_i^*$ .

On suppose que  $\sum_{i=1}^N U_i(a)$  est semi continue supérieurement, et que  $U_i$  est bornée et faiblement semi continue inférieurement en  $a_i$ . Alors le jeu  $[(A_i, U_i), i = 1, \dots, N]$  possède un équilibre avec des stratégies mixtes.

L'ensemble  $A_i^*(i)$  élimine les discontinuités de la fonction de résultats de l'agent  $i$ , celles-ci apparaissent indépendamment des fonctions de résultats des autres agents. Ce qui restreint donc la portée du théorème. On suppose que pour déterminer les quantités, la firme doit supporter un coût bien établi pour produire à un niveau positif. Son profit sera donc discontinu quand la production sera nulle indépendamment de la réaction des autres firmes.

## ***Section 3: Formalisation d'un modèle de concurrence spatiale où la localisation et les prix sont des variables stratégiques***

### **3.1 Le modèle**

Nous garderons les mêmes notations que précédemment.

Soient  $N$  firmes indicées  $i, j$ ,  $i$  et  $j \in \{1, \dots, N\}$ , ayant pour objectif de produire au moindre coût. Le coût de production est déterminé à l'avance et est le même pour chacune des firmes. Le produit est homogène, il est différencié par la localisation des deux firmes dans le cas où  $(i, j) = (1, 2)$ . Le produit est décrit par  $m$  caractéristiques qui sont soit la distance parcourue par le consommateur pour se procurer le bien à l'une ou l'autre firme, soit le prix.

On note  $A$  ( $A \subset \mathbb{R}^m$ ) l'ensemble des stratégies réalisables. Ce sous ensemble est non vide et compact. On suppose qu'il existe un continuum de consommateurs répartis uniformément sur  $[0, L]$ . Chaque consommateur achète au plus une unité de produit à la firme choisie. Le choix du consommateur est donc guidé par sa préférence dans une première étape pour la proximité d'une firme, puis pour le prix.

La position du consommateur est repérée par  $x$ ,  $x \in A$ , et la localisation de la firme  $i$  est notée  $a_i$ ,  $a_i \in A$ ,  $i = 1, 2$ . Chaque firme choisit sa localisation et le prix de vente du bien  $i$ :  $p_i, p_i \in \mathbb{R}^+$ . Le consommateur qui est situé en  $x$  achète le bien à la firme  $i$  à un prix  $p_i$  tout en supportant un coût de transport fonction de la distance parcourue:

$$c(x) = t(x - a_i)^2, \quad t > 0$$

Ce coût de transport est quadratique. La fonction de coût de transport est strictement convexe, ce qui garantit la continuité des fonctions de résultats.

Néanmoins un problème se pose. En effet la plupart des fonctions de coût de transport utilisées dans la littérature sont des fonctions concaves. En particulier, de nombreux auteurs ont observé que des dépenses de transport tendent à croître à un taux décroissant, caractérisant des économies d'échelle, avec des politiques de prix-quantités appropriées.

Il est important de mettre l'accent sur cette propriété de concavité comme l'ont fait HURIOT, SMITH et THISSE (1989) en se fondant sur des coûts de transport de type psychologique, où la désutilité du temps de trajet tend à croître à un taux décroissant. Ces auteurs remarquent que cette tendance est aussi observée dans des études psychologiques relative à la distance perçue.

La recherche de la propriété de concavité se justifie mathématiquement puisqu'elle garantit l'existence d'un espace métrique. Dans notre cas, cette hypothèse ne s'impose plus, car notre espace de référence est un segment unitaire. Par ailleurs, nous avons vérifié sur un certain nombre d'exemples concrets que l'hypothèse de convexité des coûts de transport se justifie.

En effet, dans le cas d'une tarification maritime, un "rapport minimum obligatoire" est calculé de telle sorte qu'il prend en compte le poids, le volume des biens, leur nature, ainsi qu'un certain nombre de surcoûts. Mais il faut ajouter à ce résultat un tarif dégressif, fonction du tonnage, et un tarif croissant en fonction de la distance. Lorsqu'on prend en compte l'ensemble de ces éléments, on observe que le coût de transport peut être linéaire, concave, ou convexe.

Le prix du bien pour le consommateur est la somme du prix d'usine et du coût de transport:  $p_i + t(x - a_i)^2$ .

- Si  $p_i + t(x - a_i)^2 < p_j + t(x - a_j)^2$ , le consommateur se fournira auprès du vendeur  $i$ .
- Si  $p_i + t(x - a_i)^2 = p_j + t(x - a_j)^2$ , le marché est partagé entre les deux vendeurs.

Les aires de marché des firmes sont données par la relation suivante:

$$B_i(a) \equiv \left\{ x \in [0, L] / p_i + t(x - a_i)^2 \leq p_j + t(x - a_j)^2 \right\} \\ + \frac{1}{2} \left\{ x \in [0, L] / p_i + t(x - a_i)^2 = p_j + t(x - a_j)^2 \right\}$$

Dans le cas de deux firmes  $i$  et  $j$ , on a  $B_i + B_j = 1$

Plus précisément, si la firme  $i$  n'a pas de concurrent à son lieu de localisation, l'aire de marché  $B_i(a)$  de la firme  $i$  regroupe l'ensemble des consommateurs. Cependant, si  $n$  autres firmes,  $0 \leq n \leq N - 1$ , sont localisées en  $a$ , alors chacune des  $(n + 1)$  firmes congruentes a  $1/(n + 1)$  part de l'aire de marché  $B_i(a)$ .

Ce modèle vise à donner une extension du jeu séquentiel introduit initialement par HOTELLING. On fera intervenir successivement les variables stratégiques: localisations puis prix.

- Les localisations sont choisies dans la première étape d'un jeu séquentiel à stratégies pures. Les coûts de transport pris en compte dans cette analyse sont quadratiques. On vérifiera que pour le modèle étudié il existe un équilibre à stratégies pures.
- Dans une seconde étape, les prix sont les variables de décision des firmes. Ces dernières utilisent des stratégies mixtes. Afin de montrer l'existence d'un équilibre, on utilisera les résultats obtenus par DASGUPTA et MASKIN (1986) étudiés dans 2.2.

### 3.2 Première étape du jeu séquentiel à stratégie pure dans lequel les variables sont les localisations

On suppose que les localisations sont choisies de telle sorte que les prix des biens sont des prix d'équilibre. La fonction de résultat vérifie les deux hypothèses du théorème de GLICKSBERG, garantissant l'existence d'un équilibre, à savoir la continuité et la quasi concavité.

Comme l'ont suggéré THISSE et GABSZEWICZ (1989) (Section 1), l'utilisation d'une fonction de coût de transport quadratique où  $c(x) = t(x - a)^2$  assure la continuité de la fonction résultat.

Les stratégies des firmes sont représentées par  $(a_i, p_i), (a_j, p_j)$  respectivement pour les firmes  $i, j$ . Leur prix respectif est  $p_i(a_i, a_j)$  et  $p_j(a_i, a_j)$ . Le marché est partagé entre les deux firmes si  $x \in ]0, L[$  on a alors:

$$p_i + t(a_i^2 - 2a_i x + x^2) = p_j + t(a_j^2 - 2a_j x + x^2)$$

Pour  $a_i \neq a_j$ , on obtient:

$$(I) \quad x = \frac{p_j + ta_j^2 - p_i - ta_i^2}{2t(a_j - a_i)}$$

Contrairement au cas linéaire, il y a au plus un consommateur indifférent. Les aires de marché et les fonctions de profit sont donc continues.

Pour  $a_i = a_j$ , l'aire de marché du vendeur dont le prix est le plus bas est égale à un. Si  $p_i = p_j$ , un partage quelconque s'établit.

Un équilibre de NASH du sous jeu correspond au couple de prix  $(p_i^*, p_j^*) \in \mathbb{R}^{+2}$  tel que:

$$\forall p \in \mathbb{R}^+ \quad p_i^* B_i(p_i^*, p_j^*) \geq p B_i(p, p_j^*)$$

$$\forall p \in \mathbb{R}^+ \quad p_j^* B_j(p_i^*, p_j^*) \geq p B_j(p_i^*, p)$$

Si  $a_i = a_j$ , l'équilibre de NASH du sous jeu est  $p_i^* = p_j^* = 0$ .

Supposons  $p_j^* \neq 0$ . Il existe alors trois cas:

- Si  $p_i^* < p_j^*$ , la firme  $i$  peut augmenter son profit en adoptant la stratégie  $p_i^* + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ .
- Si  $p_i^* = p_j^*$ , au moins une des deux firmes peut accroître son profit en diminuant son prix.
- Si  $p_i^* > p_j^*$ , la firme  $j$  peut augmenter son profit en adoptant la stratégie  $p_j^* + \varepsilon$ .

Si  $a_i \neq a_j$ , considérons par exemple  $a_i < a_j$ .

Les fonctions de profit des firmes  $i$  et  $j$  sont alors:

$$U_i(p_i) = p_i(x)$$

$$U_j(p_j) = p_j(L - x)$$

où  $x$  est donné par l'expressions (I).

On vérifie que les fonctions de résultats des deux firmes sont concaves. Les conditions de premier ordre pour déterminer un maximum par rapport à  $p_i$  et  $p_j$  fournissent les solutions  $p_i^*, p_j^*$  telles que:

$$p_i^* = \frac{(a_j - a_i)(2Lt + t(a_j + a_i))}{3}$$

$$p_j^* = \frac{(a_i - a_j)(4Lt - t(a_j + a_i))}{3}$$

Dans le cas où  $a_i > a_j$ , on obtient des solutions symétriques.

Recherchons l'équilibre parfait de NASH du jeu initial.

Une stratégie pour le vendeur  $i$  est un couple  $(a_i, p_i)$ ,  $a_i \in [0, L]$ ,  $p_i \in \mathbb{R}^+$ . Déterminons un couple de stratégies  $(a_i^*, p_i^*)$ ,  $(a_j^*, p_j^*)$ , solutions d'un équilibre parfait de NASH.

Comme on a trouvé un équilibre unique dans chaque sous jeu, trois cas existent pour le prix du bien  $i$

- si  $a_i = a_j$ , alors  $p_i^*(a_i, a_j) = 0$ .
- si  $a_i < a_j$ , alors  $p_i^*(a_i, a_j) = \frac{(a_j - a_i)(2Lt + t(a_j + a_i))}{3}$ .
- si  $a_i > a_j$ , alors  $p_i^*(a_i, a_j) = \frac{(a_i - a_j)(4Lt - t(a_j + a_i))}{3}$ .

Et, pour le prix du bien  $j$ , on obtient:

- si  $a_i = a_j$ , alors  $p_j^*(a_i, a_j) = 0$ .
- si  $a_i < a_j$ , alors  $p_j^*(a_i, a_j) = \frac{(a_j - a_i)(4Lt - t(a_j + a_i))}{3}$ .
- si  $a_i > a_j$ , alors  $p_j^*(a_i, a_j) = \frac{(a_i - a_j)(2Lt + t(a_j + a_i))}{3}$ .

Définissons les fonctions  $U_i$  comme le résultat de chaque firme  $i$  conditionnellement au fait que le prix établi par chaque firme  $j = 1, 2$  dans le sous jeu  $(a_i, a_j)$  sera  $p_j^*(a_i, a_j)$ . Pour déterminer les équilibres de NASH parfaits, il suffit de rechercher les  $(a_i^*, a_j^*)$  tels que:

$$\forall a_j \in [0, L] \quad U_i(a_i^*, a_j^*) \geq U_j(a_i^*, a_j^*)$$

$$\forall a_i \in [0, L] \quad U_j(a_i^*, a_j^*) \geq U_i(a_i^*, a_j^*)$$

Où:

$$U_i(a_i^*, a_j^*) = p_i^* x$$

$$U_j(a_i^*, a_j^*) = p_j^* (L - x)$$

Quand  $U_i(a_i^*, a_j^*) = p_i^* x$ , le résultat de la firme est:

$$\begin{cases} \frac{(a_j - a_i)(2Lt + t(a_j - a_i))}{3} \left[ \frac{p_j^* + ta_j^2 - p_i^* - ta_i^2}{2t(a_j - a_i)} \right] & \text{pour } a_i < a_j \\ \frac{(a_i - a_j)(4Lt - t(a_j + a_i))}{3} \left[ \frac{p_j^* + ta_j^2 - p_i^* - ta_i^2}{2t(a_j - a_i)} \right] & \text{pour } a_i > a_j \\ 0 & \text{pour } a_i = a_j \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} \frac{2L^2}{9} t(a_j - a_i) + (a_j^2 - a_i^2) \left[ \frac{2Lt}{9} + \frac{(a_j + a_i)t}{18} \right] & \text{pour } a_i < a_j \\ \frac{8L^2}{9} t(a_i - a_j) - (a_j^2 - a_i^2) \left[ \frac{4Lt}{9} - \frac{(a_j + a_i)t}{18} \right] & \text{pour } a_i > a_j \\ 0 & \text{pour } a_i = a_j \end{cases}$$

Pour  $U_i(a_i^*, a_j^*) = p_j^*(L - x)$ , on obtient une expression symétrique.

Notons que si  $a_i^* = a_j^*$ , alors  $U_i(a_i^*, a_j^*) = 0$  alors que pour tout  $x$ , il existe  $a_i$  tel que  $U_i(a_i^*, x) > 0$ . Par ailleurs, on vérifie que pour tout couple  $(a_i, a_j)$  tel que  $a_i < a_j$  on a:

$$\frac{\partial U_i(a_i^*, a_j^*)}{\partial a_i^*} < 0$$

$$\frac{\partial U_j(a_i^*, a_j^*)}{\partial a_i^*} > 0$$

Il en est de même pour  $a_i^* = L$  et  $a_j^* = 0$ .

Ainsi, on constate qu'en prenant des coûts de transport quadratiques et en utilisant l'intervalle  $[0, L]$ , l'équilibre existe, le principe de différenciation minimale est remis en cause. A l'équilibre les firmes se situent à chaque extrémité du segment linéaire  $[0, L]$  au prix  $L^2$ .

### 3.3 Deuxième étape du jeu séquentiel à stratégie mixte dans lequel les variables de décision sont les prix

Le consommateur choisit un vecteur de caractéristiques  $\mu \in A$ . On suppose que la distribution des consommateurs est non atomique sur  $A$  et est repérée par la mesure  $\mu$  possédant les propriétés d'un corps de BOREL. On vérifie que:

- $\sum_{i=1}^N U_i(a)$  est semi continue supérieurement.
- $U_i$  est bornée et faiblement continue inférieurement.

Dans ce cas, le théorème 2 de DASGUPTA et MASKIN (1986) s'applique. Le jeu de référence a un équilibre à stratégie mixte.

Soit  $A^*(i)$  l'ensemble qui prend en compte notamment les discontinuités de la fonction de l'agent  $i$ . Ces discontinuités apparaissent indépendamment des fonctions de résultats des autres agents:

$$A^*(i) = \{(a_1, \dots, a_N) \in A \mid \exists j \in \{1, \dots, N\}, j \neq i, \exists d, 1 \leq d \leq D(i) \mid a_j = f_{ij}^d(a_i)\}$$

prenons  $a'_i, a'_j$  les variables stratégiques qui sont les prix,  $a'_i, a'_j \in A$ ,  $f_{ij}^d$  est la fonction identité définie de sorte que les discontinuités apparaissent lorsque les stratégies des joueurs sont identiques.

$$A^*(i) = \{(a'_i, a'_j) \in [0, L]^2 \mid |a'_i - a'_j| = t(a_j - a_i)\}$$

$$A^*(j) = \{(a'_i, a'_j) \in [0, L]^2 \mid |a'_i - a'_j| = t(a_j - a_i)\}$$

Soit  $A^{**}(i)$  l'ensemble des discontinuités de  $U_i$ .

$\forall i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $A^{**}(i) \subset A^*(i)$ , donc pour les firmes 1 et 2 considérées on a:

$$A^{**}(1) \subset A^*(1)$$

$$A^{**}(2) \subset A^*(2)$$

Ce jeu ne possède pas d'équilibre avec des stratégies pures pour tout couple de localisations  $(a_i, a_j)$ . Nous allons montrer néanmoins qu'un équilibre existe pour toute paire de localisations si les firmes choisissent leurs distributions de prix. A partir des relations vérifiées par les fonctions de résultats (II), on peut déduire que:

- $U_i + U_j$  n'est pas continue, mais elle est semi continue supérieurement.
  - Pour les localisations telles que  $a_i > a_j$ , alors tous les consommateurs vont acheter à la firme  $j$ .
  - Lorsque  $a_i = a_j$ , certains consommateurs vont s'approvisionner à la firme  $j$ , d'autres à la firme  $i$ , indifféremment.
- $U_i$  est bornée et  $\forall a'_i \in A_i^{**}(i)$  on a:  $\liminf_{a'_i \rightarrow \bar{a}'_i} U(a'_i, a'_j) \geq U(\bar{a}'_i, a'_j)$ ,  $\forall a'_j \in A_j^{**}(a'_i)$  (d'après la définition 1 de DASGUPTA et MASKIN (1986)). Il en est de même pour la firme  $j$ .

Donc  $U_i(a'_i, a'_j)$  est faiblement semi continue inférieurement en  $a'_i$ . On peut ainsi appliquer le théorème 2 de DASGUPTA et MASKIN (1986) et affirmer que le jeu  $[(A_i, U_i), i = 1, 2]$  possède un équilibre à stratégie mixte.

## *Conclusion*

Nous avons montré, dans cette recherche, que dans un jeu non coopératif à information complète, il est possible de déterminer un équilibre prix-localisations à partir d'une procédure séquentielle moyennant un certain nombre de conditions.

L'utilisation de coûts de transport quadratiques (assurant la convexité de cette fonction) garantit la continuité des fonctions de résultat.

Il importe également de généraliser l'hypothèse du segment de marché unitaire de HOTELLING en utilisant l'intervalle  $[0, L]$ .

Par ailleurs, pour un ensemble fini de stratégies, l'équilibre de NASH en stratégie pure n'existant plus, il est nécessaire de recourir aux stratégies mixtes pour montrer l'existence d'un équilibre.

Il ne faut pas se cacher que les résultats donnés ici reposent sur des hypothèses fort particulières. En effet, la recherche d'un équilibre dans chacune des étapes envisagées a pour fondement l'hypothèse de convexité. Ainsi, on constate que si ce modèle est simple du point de vue conceptuel, sa manipulation analytique est relativement complexe.

A l'équilibre les deux firmes sont séparées du point de vue des localisations. Lorsque les firmes sont installées au même endroit, avec l'hypothèse d'homogénéité du produit, la concurrence des prix conduit les firmes à vendre au coût marginal de production. Dès lors que les profits sont nuls, et contrairement à une idée largement répandue, les firmes ne souhaitent pas s'agglomérer au centre du marché. La concurrence des prix les incite plutôt à différencier leurs localisations de façon à s'assurer des profits positifs. C'est précisément parce qu'elles cherchent à vendre à des prix excédant le coût de production que les firmes souhaitent se séparer.

Nous avons retenu dans le modèle étudié ici l'hypothèse de coûts de production nuls et d'information complète. Mais on pourrait envisager le cas où l'une des firmes est en possession d'une information que n'a pas son concurrent, et pour ce faire on envisage des coûts de production non nuls. La résolution de ce problème consiste à recourir à des stratégies séquentielles inspirées du modèle de STACKELBERG. Parmi les firmes rivales, le meneur sera celui qui détiendra une information individuelle, le suiveur se trouvera en position d'observer quelle stratégie adopte sa rivale. Donc implicitement une communication s'établit entre les firmes. L'intérêt de ce modèle consisterait à interpréter la déviation par rapport à la situation d'équilibre.

## *Bibliographie*

**BASAILLE-GAHITTE A.** (1991); "Un modèle de concurrence spatiale comportant deux variables de décision", R.E.R.U., à paraître.

**BERTRAND J.** (1883); "Théorie mathématique de la richesse sociale", Journal des Savants, pp. 499-508.

**CHAMPSAUR P. et ROCHET J.C.** (1988); "Existence of a price equilibrium in a differentiated industry", INSEE, Working Paper 8801, Paris.

**DASGUPTA P. and MASKIN E.** (1986); "The existence of equilibrium in discontinuous economic games: theory and applications", Review of Economic Studies 53, pp. 1-41.

**D'ASPREMONT C., GABSZEWICZ J.J., THISSE J.F.** (1979); "On Hotelling's Stability in Competition", Econometrica 47, pp. 1145-1150.

**EDGEWORTH F.** (1925); "The pure Theory of Monopoly", in Papers Relating to Political Economy, Volume 1, ed. Edgeworth, London, Macmillan.

**GABSZEWICZ J.J. and THISSE J.F.** (1989); "Location", Working paper, Core, Louvain la Neuve, december.

**GALOR E.** (1982); "Hotelling's Spatial Competition as a Model of Sales", Economic Letters 9, North-Holland, pp. 1-16.

**GLICKSBERG I.L.** (1952); "A further generalisation of the Kakutani fixed point theorem with applications to Nash Equilibrium points", Proceeding of the American Mathematical Society 38, pp. 170-174.

**GREMAQ A.A.**, (1988); "Dynamique, information incomplète, stratégies industrielles", Economica, 277 pages.

**HARSANYI J.** (1973); "Games with randomly distributed payoffs: a new rationale for mixed strategies equilibrium points", International Journal of Games Theory 2, pp. 1-23.

**HOTELLING H.** (1929); "Stability in Competition", Economic Journal 39, pp. 41-57.

**HURIOT J.M., SMITH T.E., THISSE J.F.** (1989); "Minimum-cost distances in spatial analysis", Geographical Analysis volume 21 numéro 4, octobre.

**MASKIN E. and TIROLE J.** (1988); "A Theory of dynamic oligopoly, II, Price competition, kinked demand curves, and Edgeworth cycles", Econometrica 56, pp. 571-599.

**MATHIEU-NICOT B.** (1985); "Espérance mathématique de l'utilité floue", Collection de l'I.M.E. numéro 29, Dijon, 196 pages.

**NASH J.** (1950); "Equilibrium Points in Person games"; Proceeding of the American Mathematical Society 36, pp. 48-49.

**OSBORNE M.J. and PITCHIK C.** (1987); "Equilibrium in Hotelling's model of spatial competition", Econometrica 55, pp. 911-923.

**PONSARD C.** (1983); "A history of spatial economic theory", Springer Verlag, Berlin.

**QUINET E.** (1990); "Analyse économique des transports", P.U.F., 302 pages.

**TIROLE J.** (1990); "Theory of industrial organization", The M.I.T. Press, Cambridge, Massachussets, London, England, 4ème édition, 479 pages.

**VON NEUMANN J. and MORGENSTERN O.** (1953); "Theory of Games and Economic Behaviour", Princeton University Press.

**WEINBERG J.** (1985); "Bertrand Olygopoly in spatial Context", Regional Science and Urban Economics 15, pp. 263-275.

