



HAL
open science

Invariants, dérivées et formes multilinéaires

Ghislain Roy

► **To cite this version:**

Ghislain Roy. Invariants, dérivées et formes multilinéaires. [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1989, 11 p. hal-01541313

HAL Id: hal-01541313

<https://hal.science/hal-01541313>

Submitted on 19 Jun 2017

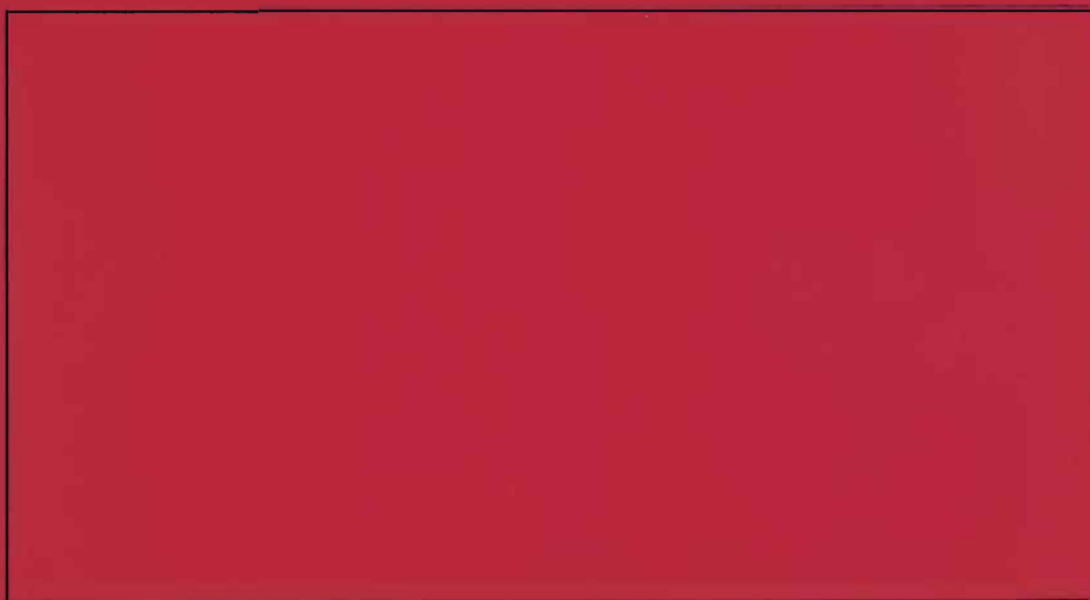
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

I.M.E.

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU C.N.R.S.

DOCUMENT DE TRAVAIL



INSTITUT DE MATHEMATIQUES ECONOMIQUES

UNIVERSITE DE DIJON

FACULTE DE SCIENCE ECONOMIQUE ET DE GESTION

4, BOULEVARD GABRIEL — 21000 DIJON

n° 116

INVARIANTS, DERIVEES ET FORMES MULTILINEAIRES

Ghislain ROY

Université Laval, Québec

JUIN 1989

Ce travail a été achevé en juin 1988 à l'Université de Bourgogne.
Pour des raisons techniques, il n'a pu être diffusé plus tôt.

INVARIANTS, DERIVEES ET FORMES MULTILINEAIRES

Résumé

Etant donné un groupe de transformations linéaires d'un espace vectoriel il est parfois possible de trouver certains des invariants de ce groupe à l'aide des dérivées des éléments du groupe et des formes multilinéaires définies sur l'espace vectoriel.

Mots-clefs

Invariants linéaires. Puissances tensorielles. Dérivées des puissances tensorielles.

Nous examinerons cette question sur deux cas particuliers. Les généralisations seront ensuite très faciles.

Premier cas

Considérons l'ensemble des matrices :

$$(1) \quad V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Cet ensemble peut être associé à l'espace $E = \mathbb{R}^4$ par :

$$(2) \quad \text{vec } V = (a, b, c, d)$$

Sur l'espace vectoriel E on définit GS le groupe des transformations stochastiques par :

$$(3) \quad V \longmapsto V' = {}^T P V P = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad \text{où :}$$

$$(4) \quad P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

est stochastique et non-singulière, donc :

$$(5) \quad p = 1 - q ; s = 1 - r$$

L'égalité (3) peut s'écrire en posant :

$$(6) \quad g = P \otimes P$$

$$(7) \quad \begin{cases} \text{vec } V' = \text{vec } V P \otimes P \\ \text{vec } V' = \text{vec } Vg \end{cases}$$

Elle se développe en :

$$(8) \quad (a' \ b' \ c' \ d') = (a \ b \ c \ d) = \begin{pmatrix} p^2 & pq & pq & q^2 \\ pr & ps & qr & qs \\ pr & qr & ps & qs \\ r^2 & rs & rs & s^2 \end{pmatrix}$$

Plus généralement

Définition

Le groupe stochastique GS_n , ou GS , est le groupe des matrices de la forme $g = P \otimes P$ où P est une matrice stochastique non-singulière de dimensions n .

Paramétrisation de GS

Les $n^2 - n$ éléments de P extérieurs à sa diagonale principale caractérisent cette matrice donc ils caractérisent aussi la matrice g . Notons q_1, q_2, \dots ces $n^2 - n$ nombres que l'on prendra comme paramètres de g .

Deuxième cas

Le groupe orthogonal O_2 est constitué par l'ensemble des matrices

$$(9) \quad g = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Il dépend du seul paramètre θ

Puissances tensorielles d'un groupe de matrices.

Soit G un groupe de matrices $n \times n$, c'est-à-dire des transformations linéaires d'un espace vectoriel E de dimension n .

On considère les puissances tensorielles de E , $E \otimes E$, $E \otimes E \otimes E$, ...

On posera $E_2 = E \otimes E$, $E_3 = E \otimes E \otimes E$, ...

Ce sont les ensembles de tous les produits tensoriels $X \otimes Y$, $X \otimes Y \otimes Z$, ... pour tous les choix de vecteurs $X, Y, Z, \dots \in E$.

Si g est une matrice de G , en posant $X' = Xg$, $Y' = Yg$, ... on a :

$$(10) \quad \begin{aligned} X' \otimes Y' &= (Xg) \otimes (Yg) \\ &= (X \otimes Y) (g \otimes g) \quad (1) \end{aligned}$$

Définissons g_2 la matrice de dimensions n^2 .

$$(11) \quad g_2 = g \otimes g$$

Il est facile de voir que G_2 , l'ensemble des matrices g_2 , constitue un groupe, que l'on appelle le carré tensoriel du groupe G .

On définira semblablement G_3 le cube tensoriel de G , ainsi que G_4 , etc... qui sont tous des groupes de matrices.

Formes multilinéaires et tenseurs.

Dans l'espace vectoriel $E = R^n$ on considère les vecteurs $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$; $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Définition

Les formes linéaires, bilinéaires, trilinéaires, ... sont définies, par exemple les formes trilinéaires, dites d'ordre 3 :

¹ Si A, B, C , et D sont des matrices dont les dimensions sont telles que les produits matriciels AB et CD sont définis, alors $(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C) (B \otimes D)$.

Voir par exemple BALESTRA P., La dérivation matricielle, p. 12.

$$(12) \quad f(X, Y, Z) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} x_i y_j z_k$$

Elles sont dites trilinéaires parce que linéaires en chacun de leurs trois arguments X, Y, et Z, ainsi :

$$f(\alpha X' + \beta X'', Y, Z) = \alpha f(X', Y, Z) + \beta f(X'', Y, Z).$$

Elles sont déterminées par la donnée des coefficients a_{ijk} .

Définition

L'ensemble $A = (a_{ijk})$ des n^3 coefficients d'une forme trilinéaire est un tenseur d'ordre trois et de dimensions n.

On définira de même des tenseurs d'ordre entier quelconque, 1, 2, 3, etc. La matrice carrée est un tenseur d'ordre deux, le vecteur est un tenseur d'ordre un.

Définition

Etant donné un tenseur A d'ordre d et de dimensions n l'opérateur vec lui associe le vecteur vec A à n^d composantes obtenu en portant les termes de A l'un après l'autre selon l'ordre lexicographique des indices.

Par exemple pour le tenseur $A = (a_{ijk})$ d'ordre 3 et de dimensions 2, on a :

$$\text{vec } A = (a_{111}, a_{112}, a_{121}, a_{122}, a_{211}, a_{212}, a_{221}, a_{222}).$$

Grâce à l'opérateur vec et au produit tensoriel on a la

Remarque 1

Une forme multilinéaire d'ordre quelconque, disons 3 par exemple comme en (12), est le produit matriciel du vecteur ligne $X \otimes Y \otimes Z$ par le vecteur colonne ${}^T(\text{vec } A)$.

$$(13) \quad f(X, Y, Z) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} x_i y_j z_k = (X \otimes Y \otimes Z) {}^T(\text{vec } A)$$

Dérivées à l'origine des puissances tensorielles d'un groupe de matrices.

Revenons au groupe stochastique GS_2 et considérons ses puissances tensorielles successives $G(= GS_2)$, G_2 , G_3 , ... quand la matrice P varie tout en restant très voisine de l'identité I_2 , c'est-à-dire que l'on remplace q et r , les paramètres de P , par leurs différentielles dq et dr .

$$(14) \quad P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \quad \text{devient :}$$

$$(15) \quad P = \begin{pmatrix} 1 - dq & dq \\ dr & 1 - dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dq + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} dr$$

$$(16) \quad P = I_2 + \frac{\partial P}{\partial q} dq + \frac{\partial P}{\partial r} dr$$

$$(17) \quad P = I_2 + dP$$

$$(18) \quad \text{de } g = P \otimes P \text{ on tire}$$

$$(19) \quad g = I_4 + \frac{\partial g}{\partial q} dq + \frac{\partial g}{\partial r} dr \quad \text{avec}$$

$$(20) \quad \frac{\partial g}{\partial q} = I_2 \otimes \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q} \otimes I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial g}{\partial r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ce que l'on aurait pu calculer autrement en dérivant par q et par r la matrice 4×4 de l'équation 8, puis en faisant $q = 0$ et $r = 0$.

Si l'on pose :

$$(21) \quad q_1 = q \text{ et } q_2 = r \quad \text{ainsi que :}$$

$$(22) \quad K_1^1 = \frac{\partial g}{\partial q_1}$$

En général, pour j entier quelconque

$$(23) \quad K_1^j = \frac{\partial g_j}{\partial q_1}$$

N.B. : Après avoir dérivé on remplace q et r par 0.

On a trouvé

Remarque 2

Si la matrice stochastique P est voisine de la matrice identité I_2 elle peut s'écrire en première approximation :

$$(24) \quad P = I_2 + dP = I_2 + \frac{\partial P}{\partial q} dq + \frac{\partial P}{\partial r} dr$$

et alors les puissances tensorielles de $g = P \otimes P$ s'écrivent en première approximation également :

$$(25) \quad g_j = I + dg = I + K_1^j dq + K_2^j dr$$

où I est la matrice identité de dimensions 4^j .

Calculons les dérivées du carré et du cube tensoriels.

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1^2 = I_4 \otimes K_1^1 + K_1^1 \otimes I_4 \\ K_1^3 = I_4 \otimes I_4 \otimes K_1^1 + I_4 \otimes K_1^1 \otimes I_4 + K_1^1 \otimes I_4 \otimes I_4 \end{array} \right.$$

Calcul des invariants à plusieurs points.

Cherchons si le groupe GS_2 possède des invariants à plusieurs points, disons 2, la généralisation à un nombre quelconque est facile.

On dit que la fonction $f(U, V)$, où U et V sont deux vecteurs de $E = \mathbb{R}^4$, est un invariant à deux points si quels que soient ces points U et V et quelle que soit la transformation de GS_2

$$(27) \quad f(U', V') = f(U, V)$$

on a posé $U' = Ug$ et $V' = Vg$.

Nous chercherons si le groupe GS_2 possède des invariants à deux points qui sont des formes bilinéaires,

$$(28) \quad f(U, V) = \sum_{i,j} a_{ij} u_i v_j = (U \otimes V)^T (\text{vec } A).$$

Ces deux dernières égalités doivent être satisfaites identiquement, en particulier si les paramètres de la transformation g sont les infiniment petits dq et dr . Il vient alors de (25) :

$$(29) \quad g_2 = I_{16} + dg_2 = I_{16} + K_1^2 dq + K_2^2 dr \quad \text{d'où}$$

$$(30) \quad (U \otimes V) dg_2^T (\text{vec } A) = 0 ; \quad \forall U, V, dq, dr$$

$$(31) \quad (U \otimes V) (K_1^2 dq + K_2^2 dr)^T (\text{vec } A) = 0 ; \quad \forall U, V, dq, dr$$

Ce qui est équivalent à :

$$(32) \quad \begin{cases} K_1^2{}^T (\text{vec } A) = 0 \\ K_2^2{}^T (\text{vec } A) = 0 \end{cases}$$

Et même en généralisant aux invariants à un autre nombre de points

Théorème

Les invariants à d points du groupe GS_2 qui sont des formes d -linéaires

$$(33) \quad f_d(V_1, V_2, \dots, V_d) = (V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_d)^T (\text{vec } A)$$

sont obtenus en trouvant les tenseurs A d'ordre d et de dimension 4 qui satisfont les équations :

$$(34) \quad \begin{cases} K_1^d{}^T (\text{vec } A) = 0 \\ K_2^d{}^T (\text{vec } A) = 0 \end{cases}$$

On remarquera que les inconnues qui déterminent la forme d -linéaire f_d sont les composantes du tenseur A . Elles sont au nombre de 4^d . Elles satisfont les deux équations matricielles (34), ce qui

constitue un système de 2×4^d équations linéaires. Comme ce système est homogène, il est satisfait par la solution nulle, donc il est compatible.

Calculons la solution de (34) quand $d = 1$, puis 2.

Voir (11), (20), (23) et (26).

Pour $d = 1$, le tenseur A est un vecteur ligne :

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

On a K_1^1 et K_2^1 en (20)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0 ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0$$

Ce qui est équivalent à :

$$a_1 - a_4 = 0$$

$$a_2 - a_4 = 0$$

$$a_3 - a_4 = 0$$

Il y a donc une solution non nulle.

Prenons $a_4 = 1$,

$$A_1 = (1, 1, 1, 1)$$

et donc si $V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$f_1(V) = (a \ b \ c \ d) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_1(V) = a + b + c + d$$

On pourra vérifier que la transformation (8) laisse f_1 invariant.

Pour $d = 2$, le tenseur A_2 est la matrice 4×4 :

$$A_2 = (a_{ij})$$

$$\text{vec } A_2 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{44}).$$

En (26) on a vu comment calculer K_1^2 et K_2^2 qui sont de dimensions 16, alors (34) nous conduit à un système de 32 équations à 16 inconnues. On calcule que ce système à 32 équations est équivalent au système à 15 équations

$$a_{11} = a_{44} ; a_{12} = a_{44} ; \dots ; a_{43} = a_{44} .$$

Les inconnues sont toutes égales entre elles.

Si l'on prend $a_{ij} = 1$, quels que soient i et j , on a que les seuls invariants à deux points sont

$$\begin{aligned} f_2(V_1, V_2) &= f_2(a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2) \\ &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + \dots + c_2 d_2 \\ &= (a_1 + b_1 + c_1 + d_1) (a_2 + b_2 + c_2 + d_2) \\ &= f_1(V_1) f_1(V_2) \end{aligned}$$

C'est le produit de l'invariant à un point en V_1 par celui en V_2 . Le produit de deux invariants est bien sûr un invariant, mais il ne nous apprend rien de nouveau.

Invariants du groupe orthogonal.

Dans le groupe orthogonal O_2 considérons les éléments voisins de l'identité

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= I_2 + \theta K^1 \end{aligned}$$

Il vient des équations (26)

$$K^2 = I_2 \otimes K^1 + K^1 \otimes I_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les invariants à un point de la forme

$$f_1(X) = (x \ y) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = X^T(\text{vec } A_1)$$

satisfont

$$K^1{}^T(\text{vec } A_1) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_1 = a_2 = 0$$

Evidemment $0x + 0y$ est un invariant, mais c'est le seul qui soit linéaire.

Les invariants à deux points, bilinéaires

$$f_2(X_1, X_2) = X_1 \otimes X_2{}^T(\text{vec } A_2)$$

satisfont

$$K^2{}^T(\text{vec } A_2) = 0$$

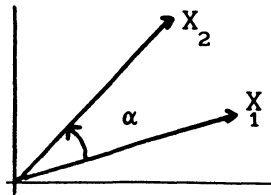
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0$$

$$a_{21} = -a_{12} ; a_{22} = a_{11}$$

Ce système possède deux solutions indépendantes que l'on obtient en prenant par exemple

$$(a_{11}, a_{12}) = (1, 0)$$

$$\text{ou } = (0, 1)$$



Dans le premier cas

$$f_2'(X_1, X_2) = x_1x_2 + y_1y_2 = |X_1||X_2|\cos \alpha$$

et dans le deuxième cas

$$f_2''(X_1, X_2) = x_1y_2 - y_1x_2 = |X_1||X_2|\sin \alpha$$

On a donc trouvé que le groupe orthogonal O_2 ne possède pas d'invariant à un point mais qu'il en a deux à deux points.

LISTE DES DOCUMENTS DEJA PUBLIES

- n° 1 **Michel PREVOT** : Théorème du point fixe. Une étude topologique générale (*juin 1974*).
- n° 2 **Daniel LEBLANC** : L'introduction des consommations intermédiaires dans le modèle de LEFEBER (*juin 1974*).
- n° 3 **Colette BOUMON** : Spatial equilibrium of the sector in quasi-perfect competition (*September 1974*).
- n° 4 **Claude PONSARD** : L'imprécision et son traitement en analyse économique (*septembre 1974*).
- n° 5 **Claude PONSARD** : Economie urbaine et espaces métriques (*septembre 1974*).
- n° 6 **Michel PREVOT** : Convexité (*mars 1975*).
- n° 7 **Claude PONSARD** : Contribution à une théorie des espaces économiques imprécis (*avril 1975*).
- n° 8 **Aimé VOGT** : Analyse factorielle en composantes principales d'un caractère de dimension n (*juin 1975*).
- n° 9 **Jacques THISSE et Jacky PERREUR** : Relation between the point of maximum profit and the point of minimum total transportation cost : a restatement *July 1975*).
- n° 10 **Bernard FUSTIER** : L'attraction des points de vente dans des espaces précis et imprécis (*juillet 1975*).
- n° 11 **Régis DELOCHE** : Théorie des sous-ensembles flous et classification en analyse économique spatiale (*juillet 1975*).
- n° 12 **Gérard LASSIBILLE et Catherine PARRON** : Analyse multicritère dans un contexte imprécis (*juillet 1975*).
- n° 13 **Claude PONSARD** : On the axiomatization of fuzzy subsets theory (*July 1975*).
- n° 14 **Michel PREVOT** : Probability calculation and fuzzy subsets theory (*August 1975*).
- n° 15 **Claude PONSARD** : Hiérarchie des places centrales et graphes flous (*avril 1976*).
- n° 16 **Jean-Paul AURAY et Gérard DURU** : Introduction à la théorie des espaces multiflous (*avril 1976*).
- n° 17 **Roland LANTNER, Bernard PETITJEAN et Marie-Claude PICHERY** : Jeu de simulation du circuit économique (*août 1976*).

- n° 18 **Claude PONSARD** : Esquisse de simulation d'une économie régionale : l'apport de la théorie des systèmes flous (*septembre 1976*).
- n° 19 **Marie-Claude PICHERY** : Les systèmes complets de fonctions de demande (*avril 1977*).
- n° 20 **Gérard LASSIBILLE et Alain MINGAT** : L'estimation de modèles à variation dépendante dichotomique. La sélection universitaire et la réussite en première année d'économie (*avril 1977*).
- n° 21 **Claude PONSARD** : La région en analyse spatiale (*mai 1977*).
- n° 22 **Dan RALESCU** : Abstract models for systems identification (*June 1977*).
- n° 23 **Jean MARCHAL et Frédéric POULON** : Multiplicateur, graphes et chaînes de Markov (*décembre 1977*).
- n° 24 **Pietro BALESTRA** : Determinant and inverse of a sum of matrices with applications in economics and statistics (*avril 1978*).
- n° 25 **Bernard FUSTIER** : Etude empirique sur la notion de région homogène (*avril 1978*).
- n° 26 **Claude PONSARD** : On the imprecision of consumer's spatial preferences (*April 1978*).
- n° 27 **Roland LANTNER** : L'apport de la théorie des graphes aux représentations de l'espace économique (*avril 1978*).
- n° 28 **Emmanuel JOLLES** : La théorie des sous-ensembles flous au service de la décision : deux exemples d'application (*mai 1978*).
- n° 29 **Michel PREVOT** : Algorithme pour la résolution des systèmes flous (*mai 1978*).
- n° 30 **Bernard FUSTIER** : Contribution à l'analyse spatiale de l'attraction imprécise (*juin 1978*).
- n° 31 **Phuoc TRANQUI** : Régionalisation de l'économie française par une méthode de taxinomie numérique floue (*juin 1978*).
- n° 32 **Louis de MESNARD** : La dominance régionale et son imprécision, traitement dans le type général de structure (*juin 1978*).
- n° 33 **Max PINHAS** : Investissement et taux d'intérêt. Un modèle stochastique d'analyse conjoncturelle (*octobre 1978*).
- n° 34 **Bernard FUSTIER et Bernard ROUGET** : La nouvelle théorie du consommateur est-elle testable ? (*janvier 1979*).
- n° 35 **Didier DUBOIS** : Notes sur l'intérêt des sous-ensembles flous en analyse de l'attraction de points de vente (*février 1979*).

- n° 36 Heinz SCHLEICHER : Equity analysis of public investments : pure and mixed game-theoretic solutions (*April 1979*).
- n° 37 Jean Jaskold GABSZEWICZ : Théories de la concurrence imparfaite : illustrations récentes de thèmes anciens (*juin 1979*).
- n° 38 Bernard FUSTIER : Contribution à l'étude d'un caractère statistique flou (*janvier 1980*).
- n° 39 Pietro BALESTRA : Modèles de régression avec variables muettes explicatives (*janvier 1980*).
- n° 40 Jean-Jacques LAFFONT : Théorie des incitations, un exemple introductif (*février 1980*).
- n° 41 Claude PONSARD : L'équilibre spatial du consommateur dans un contexte imprécis (*février 1980*).
- n° 42 Jean-Marie HURIOT : Rente foncière et modèles de production (*avril 1980*).
- n° 43 Claude PONSARD : Fuzzy economic spaces (*April 1980*).
- n° 44 Alain KIRMAN : Imperfect communication in markets. A big world problem (*April 1980*).
- n° 45 Michel PREVOT : Variétés différentielles (*mai 1980*).
- n° 46 Claude PONSARD : Producer's spatial equilibrium with a fuzzy constraint (*May 1980*).
- n° 47 Michel PREVOT : Théorie des catastrophes (*mai 1980*).
- n° 48 Bernadette MARECHAL : Recherche de la forme d'un modèle à retards échelonnés. Application à la fonction d'investissement (*novembre 1980*).
- n° 49 Bernard FUSTIER : Une méthode d'analyse multicritère, SPARTE (*mars 1981*).
- n° 50 Jan SERCK-HANSSEN : On the optimal capital/labour ratios in towns when demands for outputs are stochastics (*May 1981*).
- n° 51 Claude PONSARD : Partial spatial equilibria with fuzzy constraints (*May 1981*).
- n° 52 Xavier FREIXAS : Révélation des préférences dans l'allocation de biens publics (*juillet 1981*).
- n° 53 Bernard ROUGET : Equilibre spatial de consommation : quelques résultats (*novembre 1981*).
- n° 54 Louis PHILIPS : Welfare and price discrimination : optimal departures from uniform pricing (*November 1981*).

- n° 55 **Bernard FUSTIER** : Une introduction à la théorie de la demande floue (*janvier 1982*).
- n° 56 **Louis de MESNARD** : Séries temporelles et flou (*janvier 1982*).
- n° 57 **Claude PONSARD et Phuoc TRANQUI** : La régionalisation de l'économie européenne (*février 1982*).
- n° 58 **Manuel José VILARES** : A macroeconomic model with structural change and disequilibrium. A study of the economic consequences of the portuguese revolution of 1974 (*March 1982*).
- n° 59 **Pierre HANJOUL et Jacques-François THISSE** : La localisation de la firme sur un réseau (*septembre 1982*).
- n° 60 **Bernard VERMOT-DESROCHES** : Modèles d'interaction spatiale et théorie de l'interdépendance globale (*novembre 1982*).
- n° 61 **Henry ZOLLER et Jean PAELINCK** : Logement et qualités. Une analyse statique à court terme (*novembre 1982*).
- n° 62 **Jean-Marie HURIOT** : Rentes différentielles et rente absolue : un réexamen (*avril 1983*).
- n° 63 **Claude PONSARD** : Spatial fuzzy consumer's behavior : multi-dimensional analysis (*June 1983*).
- n° 64 **Maryse GADREAU et Bernadette MARECHAL** : Fonction de production, productivité et progrès technique à l'hôpital, une étude statistique par catégories d'établissements (*novembre 1983*).
- n° 65 **Claude PONSARD** : A theory spatial general equilibrium in a fuzzy economy (*April 1984*).
- n° 66 **Bernard FUSTIER** : Imprécision et modèles gravitaires de comportement (*mai 1984*).
- n° 67 **Bernadette MATHIEU** : Fuzzy expected utility (*June 1984*).
- n° 68 **Jacques LESOURNE** : La science économique et l'auto-organisation (*juillet 1984*).
- n° 69 **Peter M. SCHULZE** : Quantitative analysis of labour market relations for the federal republic of Germany (*October 1984*).
- n° 70 **Luc-Norman TELLIER, Xavier CECCALDI et François TESSIER** : Simulation des phénomènes de polarisation et de répulsion à partir du problème de Weber (*novembre 1984*).
- n° 71 **Alberto HOLLY** : Test d'exogénéité (*novembre 1984*).
- n° 72 **Bernadette MATHIEU-NICOT et Michel PREVOT** : Note sur les classes de similitude (*janvier 1985*).

- n° 73 **Elie SADIGH** : La formation du capital et le financement de l'amortissement chez Walras et Keynes (*février 1985*).
- n° 74 **Bernard FUSTIER et Bernard ROUGET** : Approche de la notion de centralité urbaine : le cas de l'agglomération dijonnaise (*février 1985*).
- n° 75 **Pierre SALMON** : The logic of pressure groups and "federalism" (*mars 1985*).
- n° 76 **André KELLER et Bernadette MARECHAL** : Propriétés spectrales des filtres usuels en économie : désaisonnalisation par Census X11, et différences d'ordre d (*avril 1985*).
- n° 77 **Jean-Marie HURIOT et Jacques-François THISSE** : La distance en analyse spatiale : une approche axiomatique (*mai 1985*).
- n° 78 **Alain MINGAT et Pierre SALMON** : La tendance politique des grandes villes : conséquence ou cause de la répartition de la population dans les agglomérations ? (*juin 1985*).
- n° 79 **Yorgo PAPAGEORGIOU** : Spatial public goods - I. Theory (*October 1985*).
- n° 80 **Yorgo PAPAGEORGIOU** : Spatial public goods - II. Applications (*October 1985*).
- n° 81 **Gérard CHARREAUX et J.P. PITOL-BELIN** : La théorie contractuelle des organisations : une application au conseil d'administration (*novembre 1985*).
- n° 82 **C.S. BERTUGLIA, G. LEONARDI et R. TADEI** : Dynamic analysis of transport - location interrelationships : theory and models (*November 1985*).
- n° 83 **Philippe VINCKE** : La modélisation des préférences (*décembre 1985*).
- n° 84 **Elie SADIGH** : La dépense du profit et le dysfonctionnement du système économique (*janvier 1986*).
- n° 85 **Elie SADIGH** : Réalisation de la rente et généralisation du surplus dans le système de Walras (*février 1986*).
- n° 86 **Jean-Claude GARLANDIER et Bernard ROUGET** : Influence économique et concurrence au sein d'une agglomération (*février 1986*).
- n° 87 **Bernard FUSTIER** : Classement en présence de critères multiples : SPARTE II (*avril 1986*).
- n° 88 **Jean-Marie HURIOT** : Land rent, production and land use (*July 1986*).

- n° 89 **DE MESNARD Louis** : L'accessibilité comme signal quantité dans les schémas de rationnement et de distribution décentralisés (*septembre 1986*).
- n° 90 **Pierre SALMON** : L'instrumentalisme en économie (*octobre 1986*).
- n° 91 **Pierre SALMON** : The theory of informal transactions in bureaucracies : some qualifications (*October 1986*).
- n° 92 **Urs SCHWEIZER** : Litigation and settlement II : Stability and other criteria (*October 1986*).
- n° 93 **Edmond MALINVAUD** : Capital productif, incertitudes et profitabilité (*novembre 1986*).
- n° 94 **Claude PONSARD** : Modèles mathématiques flous en économie (*novembre 1986*).
- n° 95 **Bernard FUSTIER** : Segsoft (*janvier 1987*).
- n° 96 **Antoine-Bertrand BILLOT** : Myopic planner, aggregation rule with fuzzy preorders, May's theorem with minimal step of implication (*March 1987*).
- n° 97 **Jean-Claude GARLANDIER et Bernard ROUGET** : Configuration spatiales et structure économique d'agglomération. Test d'un indicateur d'influence (*avril 1987*).
- n° 98 **Pierre SALMON** : Decentralization as an incentive scheme (*April 1987*).
- n° 99 **Agnès GAHITTE** : Axiomatics and construction on the central place system (*May 1987*).
- n° 100 **Pierre SALMON** : Modèles, théories et arguments en économie (*novembre 1987*).
- n° 101 **Pietro BALESTRA et Marie-Claude PICHERY** : Naturally constrained reduced form and structural parameters estimation (*february 1988*).
- n° 102 **Claude PONSARD** : Note on the ranking of fuzzy numbers : conditions for a total order relation (*February 1988*).
- n° 103 **Michel PREVOT** : Programmation linéaire multiobjectif, un résumé (*février 1988*).
- n° 104 **Agnès GAHITTE** : Le problème des voies de communication dans le système des places centrales (*avril 1988*).
- n° 105 **Bernard FUSTIER** : Centralité, une approche méthodologique (*mai 1988*).
- n° 106 **Claude PONSARD** : Espace et conflit : le choix des investissements dans des régions à risques (*mai 1988*).

- n° 107 **Marc ROUBENS** : Group decision theory with convex combination of fuzzy evaluations (*May 1988*).
- n° 108 **Jean-Marie HURIOT, T.E. SMITH and J.F. THISSE** : Minimum-cost distances in spatial analysis (*June 1988*).
- n° 109 **Ghislain ROY** : Transformations stochastiques de la matrice des productions (*juin 1988*).
- n° 110 **Antoine BILLOT** : Convexité floue et coeur périphérique d'une économie d'échange (*novembre 1988*).
- n° 111 **Denis BABUSIAUX** : Financement des investissements et calculs de rentabilité (*novembre 1988*).
- n° 112 **Peter NIJKAMP, Jacques POOT and Jan Rouwendal** : R & D policy in space and time. A nonlinear evolutionary growth model (*November 1988*).
- n° 113 **Lise ROCHAIX** : Incertitude, asymétries informationnelles et recherche sur le marché des services médicaux (*mars 1989*).
- n° 114 **Claude PONSARD** : Some dissenting views on the transitivity of individual preference (*April 1989*).
- n° 115 **Bernard FUSTIER** : Aide à la décision en présence de critères non mesurables. Deux approches (*mai 1989*).
- n° 116 **Ghislain ROY** : Invariants, dérivées et formes multilinéaires (*juin 1989*).
- n° 117 **Jean-Marie HURIOT** : La rente de Thünen retrouvée. Quelques réflexions en histoire de la pensée spatiale (*août 1989*).