



HAL
open science

Tests de non stationnarité et tendances non linéaires

Cem Ertur

► **To cite this version:**

Cem Ertur. Tests de non stationnarité et tendances non linéaires. [Rapport de recherche] Laboratoire d'analyse et de techniques économiques(LATEC). 1992, 35 p., Graph, ref. bib.: 2 p.3/4. hal-01538727

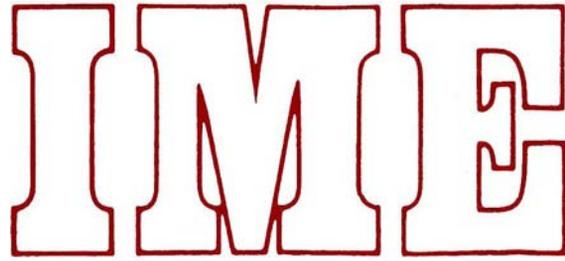
HAL Id: hal-01538727

<https://hal.science/hal-01538727>

Submitted on 14 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

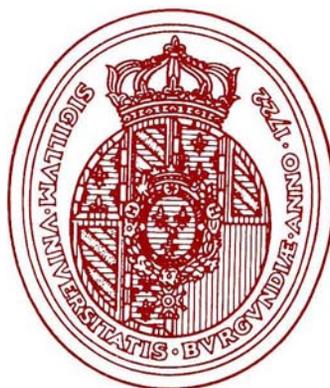
L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ÉCONOMIQUES

LATEC C.N.R.S. URA 342

DOCUMENT de TRAVAIL



UNIVERSITE DE BOURGOGNE

FACULTE DE SCIENCE ÉCONOMIQUE ET DE GESTION

4, boulevard Gabriel - 21000 DIJON - Tél. 80 39 54 30 - Fax 80 39 56 48

ISSN : 0292-2002

9206

**TESTS DE NON STATIONNARITE
ET TENDANCES NON LINEAIRES**

Cem ERTUR*

Novembre 1992

*Communication présentée au XXIVème Colloque
de l'Institut de Mathématiques Economiques*

**Institut de Mathématiques Economiques*

Tests de Non Stationnarité et tendances non linéaires

Résumé :

Nous nous proposons dans ce travail d'attirer l'attention sur le postulat de linéarité de la composante déterministe imposé par les procédures de test de la racine unitaire les plus utilisées dans la littérature empirique. Nous avons tenté de mettre au point une stratégie empirique permettant de réduire le risque de parvenir à des conclusions erronées suite à une mauvaise spécification de la composante déterministe et nous l'avons appliquée à l'étude de la non stationnarité caractérisant le PIB réel marchand CVS en France. Nous avons ainsi mis en évidence des spécifications flexibles permettant de rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire fortement étayée dans la littérature empirique. Ces spécifications peuvent être considérées comme des approximations du vrai processus engendrant la série du PIB réel mais peuvent également se révéler utiles dans l'étude d'autres séries chronologiques.

Série chronologique - Racine unitaire - Tendances polynomiales - Tendances segmentées - Stratégie de Test

Abstract :

This paper stresses the importance of the hypothesis of linearity of the deterministic component imposed by unit root testing procedures most frequently used in empirical literature. We suggest an empirical testing strategy which reduces the risk of reaching false conclusions due to the misspecification of that component and we apply it to the analysis of the nonstationarity exhibited by real GNP in France. We show that it is possible to find some flexible specifications which enable us to reject the unit root null hypothesis otherwise strongly supported in empirical literature. These specifications might be considered as approximations of the true process generating real GNP and might be useful for other time series as well.

Time Series - Unit Root - Polynomial Trend - Segmented Trend - Testing Strategy

Introduction

Depuis l'étude fondamentale de NELSON et PLOSSER (1982), on admet largement que la présence d'une racine unitaire, dans le processus stochastique engendrant une série chronologique, a des implications majeures en matière de prévision et de modélisation macroéconomique. Mais ce débat va au delà de considérations purement techniques puisque sur le plan théorique, la présence d'une racine unitaire dans les séries macroéconomiques remet en cause l'indépendance des schémas respectif d'explication de la croissance et des fluctuations économiques et accompagne ainsi l'émergence de la théorie des cycles réels (RBC) (KYDLAND et PRESCOTT, 1982 ; LONG et PLOSSER 1983)¹, nouvelle tentative de la Nouvelle Macroéconomie Classique (NMC) pour intégrer les fluctuations économiques à l'intérieur du cadre de l'équilibre général walrasien en réponse à la critique par MODIGLIANI (1977) des premiers modèles de cycles d'équilibre (EBC) (LUCAS 1972, 1973).

Le bouleversement théorique créé par l'approche des cycles réels méritent que l'on s'y attarde un peu : les fluctuations s'analysaient en tant qu'écarts à un produit potentiel ou naturel lequel résulte de l'interaction des seuls facteurs réels : préférences des agents, possibilités technologiques, dotations de facteurs et éventuellement certaines contraintes institutionnelles, l'approche des cycles réels expliquerait l'essentiel des fluctuations par les variations du produit naturel lui-même. Le cycle était considéré comme l'expression de déséquilibres périodiques ayant leur source dans l'imperfection de l'information et la mauvaise perception des perturbations monétaires dans la tradition de la NMC, il serait la réponse optimale des agents à des perturbations réelles exogènes prenant le plus souvent la forme de chocs de productivité. La monnaie jouait un rôle explicatif central dans les fluctuations, elle ne serait pas nécessaire à l'existence du cycle.

Nous présenterons d'abord les processus TS² et DS³ ainsi que leurs différences et leurs implications en matière de prévision et de modélisation macroéconomique. Nous exposerons ensuite la problématique des tests de non stationnarité, avant de présenter une synthèse des procédures de test de la racine unitaire les plus utilisées dans la littérature empirique en ayant soin de distinguer celles qui supposent que la composante déterministe de la série chronologique considérée suit une tendance linéaire et celles qui supposent qu'elle suit une tendance non linéaire. Cette distinction semble primordiale étant donné que la mauvaise spécification de la composante déterministe peut nous conduire à ne pas rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire et ceci à tort comme le suggèrent OULIARIS, PARK et PHILLIPS (1989) et PERRON (1989, 1991). Nous proposerons une stratégie empirique permettant de réduire le risque de parvenir à des conclusions erronées à la suite d'une mauvaise spécification de la composante déterministe et nous l'appliquerons à l'étude de la non stationnarité caractérisant le PIB réel marchand en France.

¹ HENIN (1989a) et LORDON (1991) présentent une synthèse des travaux sur les cycles réels.

² Trend Stationary : stationnaires en écarts à une tendance déterministe.

³ Difference Stationary : stationnaires en différences.

1. Processus DS et TS⁴.

D'après la classification établie NELSON et PLOSSER, on distingue deux types de processus dans la classe des processus non stationnaires du second ordre : les processus TS pouvant s'exprimer comme une fonction déterministe du temps plus un processus stationnaire d'espérance mathématique nulle et de variance constante et les processus DS caractérisés par la présence d'au moins une racine unitaire. Il apparaît ainsi que l'incertitude sur les prévisions à long terme est restreinte a priori dans les modèles TS alors que dans les modèles DS il n'en est rien puisque la variance de l'erreur de prévision croît linéairement avec l'horizon. En matière de modélisation macroéconomique la différence entre les deux types de processus a des implications encore plus graves : en effet dans le modèle TS de fluctuations stationnaires autour d'une tendance déterministe, les chocs aléatoires frappant l'économie ne peuvent avoir qu'une influence transitoire sur l'évolution de la série chronologique qui tendra ensuite à rejoindre son sentier de croissance de long terme stable, c'est-à-dire la tendance déterministe. Alors que dans les modèles DS de tendance stochastique impliquant l'accumulation de chocs aléatoires, chacun d'eux a un effet permanent sur la trajectoire future de la série sans que l'on puisse envisager a priori un retour vers la tendance déterministe qui coexiste avec la tendance stochastique dans ce type de processus.

Par conséquent, s'il s'avère que les séries chronologiques macroéconomiques, en particulier le PIB réel, sont représentées de manière plus adéquate par un processus de type DS que par un processus de type TS, il en résulterait une remise en cause de la décomposition usuelle en macroéconomie appliquée : tendance (croissance) / fluctuations (cycles) et de sa justification théorique : l'indépendance des schémas respectifs d'explication. Croissance et cycles seraient alors des phénomènes étroitement liés, qui ne pourraient être étudiés indépendamment l'un de l'autre. En effet, si une série observée est de type DS, sa composante de croissance doit aussi suivre un processus de type DS et non une tendance déterministe comme on le suppose généralement. Au lieu d'attribuer toute la variabilité conjoncturelle d'une série à la variabilité de la composante cyclique, le modèle DS permet aux deux composantes d'y apporter leur contribution. Par conséquent l'analyse empirique des fluctuations fondée sur les résidus d'une régression sur le temps confond les deux sources de variabilité, surestimant en général la durée et l'amplitude de la composante cyclique et sous-estimant l'importance de la composante de croissance. Il semblerait même d'après NELSON et PLOSSER (1982) que la plus grande part de la variabilité conjoncturelle ait en fait son origine dans les réalisations d'un processus de croissance de type DS. Il en découlerait alors une remise en question de la théorie macroéconomique traditionnelle selon laquelle les fluctuations du produit sont dues essentiellement à des perturbations monétaires supposées avoir des effets transitoires, alors qu'en fait les facteurs réels joueraient un rôle beaucoup plus important dans l'explication de ces fluctuations (NELSON et PLOSSER 1982, p.159). Par ailleurs, comme le souligne HENIN (1989b, p.670), si l'on admet que les chocs de demande n'ont qu'une influence temporaire : "il faut interpréter comme chocs d'offre les

⁴ cf. Tableau A en Annexe.

impulsions permanentes qui dominent la variabilité conjoncturelle.” Cette interprétation irait dans le sens de la théorie des cycles réels (RBC).

La différence entre processus TS et DS et ses implications dans les domaines de la théorie économique, de la prévision et de la modélisation macroéconomique soulignent donc la nécessité de pouvoir déterminer, dans les travaux empiriques, si une série chronologique donnée admet une représentation de type TS, autrement dit si la non stationnarité qui la caractérise est de nature purement déterministe ou une représentation de type DS, autrement dit si la non stationnarité qui la caractérise est de nature stochastique. Nous nous restreindrons donc au cas univarié, mais nous tenons toutefois à souligner l’importance que revêt le test de la racine unitaire dans la théorie de la cointégration dans le cas multivarié.

Par ailleurs, la différence entre processus DS et TS implique aussi que les méthodes de stationnarisation les plus utilisées lorsque l’on s’intéresse plus particulièrement à la non stationnarité en espérance mathématique - extraction d’une tendance déterministe fonction linéaire ou non du temps et différenciation - ne constituent pas des solutions interchangeables mais des traitements statistiques spécifiques qui dépendent étroitement du caractère particulier de la série chronologique considérée, plus précisément de la nature de la non stationnarité - déterministe ou stochastique - qui la caractérise. CHAN, HAYYA et ORD (1977) et NELSON et KANG (1981, 1984) mettent ainsi en évidence les effets pervers qu’induisent l’une ou l’autre méthode de stationnarisation lorsqu’elles sont utilisées sans discernement : si on extrait une tendance d’une série engendrée par un processus de marche au hasard, on introduira artificiellement un comportement pseudo-périodique dans les résidus estimés, de même si on différencie une série stationnaire en écarts à une tendance déterministe, on introduira artificiellement une racine unitaire dans la représentation moyenne mobile de la série ; ceci leur permet ensuite de suggérer un test informel ébauchant une réponse au problème posé.

Le développement des techniques économétriques permettant de traiter des séries non stationnaires a récemment apporté des solutions plus rigoureuses. Ainsi DICKEY (1976) et FULLER (1976) sont les premiers à fournir un ensemble d’outils statistiques formels pour détecter la présence d’une racine unitaire dans un processus purement autorégressif (DICKEY et FULLER 1979,1981). L’étude d’un certain nombre de séries macroéconomiques aux Etats-Unis par NELSON et PLOSSER (1982) en utilisant cette procédure de test ne leur a permis de rejeter l’hypothèse nulle de la racine unitaire que pour la série du taux de chômage, toutes les autres séries, dont le PIB réel et la production industrielle, admettant apparemment une racine unitaire. Par conséquent elles seraient caractérisées par une non stationnarité de nature stochastique. On pourrait qualifier ce résultat, souvent appelé “le fait stylisé de NELSON et PLOSSER”, d’explosif car il remet totalement en cause la macroéconomie standard.

2. La problématique des tests de non stationnarité.

Une manière de procéder serait de caractériser la différence qui existe entre les processus TS et DS de manière à ce qu'elle puissent faire l'objet d'un test formel : c'est ce que nous permet la notion de racine unitaire. L'idée est d'englober ces deux types de processus dans un modèle plus général dont ils constitueraient chacun un cas particulier suivant la présence (DS) ou l'absence (TS) d'une racine unitaire dans celui-ci.

Considérons en effet le modèle général suivant :

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t \quad \text{où } A(L)\varepsilon_t = B(L)u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2) \quad (1)$$

ou encore $(1 - a_1L - a_2L^2 - \dots - a_pL^p)\varepsilon_t = (1 - b_1L - b_2L^2 - \dots - b_qL^q)u_t$

Nous supposons donc que le terme d'erreur ε_t admet une représentation autorégressive moyenne mobile ARMA d'ordre p et q , u_t étant un terme de perturbation identiquement indépendamment distribué d'espérance mathématique nulle et de variance σ_u^2 .

Soit ρ une racine, par exemple la plus grande, de l'équation caractéristique associée au polynôme autorégressif $A(L)$: nous pouvons alors factoriser le polynôme $A(L)$ de la manière suivante :

$$A(L) = (1 - \rho L) A_1(L) \quad (2)$$

Nous avons donc :

$$(1 - \rho L)\varepsilon_t = A_1(L)^{-1}B(L)u_t = v_t \quad (3)$$

où v_t suit un processus ARMA stationnaire et inversible d'ordre $p - 1$ et q .

La série y_t s'écrit alors :

$$y_t = \alpha + \beta t + (1 - \rho L)^{-1}v_t \quad (4)$$

ou encore après multiplication par $(1 - \rho L)$:

$$y_t = (1 - \rho)\alpha + \rho\beta + (1 - \rho)\beta t + \rho y_{t-1} + v_t$$

$$A_1(L)v_t = B(L)u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2) \quad (5)$$

En soustrayant y_{t-1} à chaque membre de cette équation, il vient :

$$\Delta y_t = (1 - \rho)\alpha + \rho\beta + (1 - \rho)\beta t + (\rho - 1)y_{t-1} + v_t$$

$$A_1(L)v_t = B(L)u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2) \quad (6)$$

Pour $\rho = 1$, c'est-à-dire sous l'hypothèse suivant le polynôme autorégressif $A(L)$ admet une racine unitaire⁵, on obtient :

$$\Delta y_t = \beta + v_t \quad A_1(L)v_t = B(L)u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2) \quad (7)$$

⁵ Nous nous restreindrons au cas d'une racine unitaire positive.

La série chronologique y_t est stationnaire en différences, elle admet une représentation DS. En terme de représentation ARIMA, y_t sera dit intégré d'ordre 1 et suit un processus ARIMA(p-1,1,q). On vérifie que dans le cas d'une racine unitaire, la perturbation ε_t de l'équation en niveaux (1) est une accumulation non stationnaire de chocs aléatoires : en effet d'après l'équation (3) on a :

$$\varepsilon_t = (1 - L)^{-1} v_t = \sum_{j=1}^t v_j \quad (8)$$

Nous avons vu que ce terme s'interprète comme une tendance stochastique. Il est donc équivalent de parler d'une série admettant une racine unitaire, intégrée d'ordre 1 [I(1)], stationnaire en différences (DS), non stationnaire homogène d'ordre 1 ou encore suivant une tendance stochastique.

Pour $|\rho| < 1$, nous constatons que le modèle général n'est autre que le modèle TS. En effet dans ce cas les polynômes de retards A(L) et B(L) satisfont les conditions de stationnarité et d'inversibilité et les écarts ε_t par rapport à la tendance linéaire admettent une représentation ARMA (p, q), stationnaire et inversible.

Par conséquent les processus TS et DS sont inclus dans l'équation (4) ou (5) : ils constituent des cas particuliers suivant l'hypothèse retenue sur la racine ρ du polynôme de retards A(L). Dans le cas le plus simple où les erreurs v_t sont i.i.d., on a sous l'hypothèse nulle de la racine unitaire un processus de marche au hasard avec dérive (DS) et sous l'hypothèse alternative $\rho < 1$ un processus TS avec des erreurs AR(1) stationnaires.

Pour des erreurs i.i.d., c'est-à-dire dans le cas $A_1(L) \equiv B(L) \equiv 1$, nous pourrions estimer l'équation (4) ou encore l'équation (5) par les MCO et dans des échantillons de grande taille, nous pourrions procéder au test de l'hypothèse nulle de la racine unitaire $\rho = 1$ par la méthode classique fondée sur la statistique t de Student associée à l'estimateur des MCO $\hat{\rho}$ dans l'équation (4) ou simplement tester la nullité du coefficient de y_{t-1} dans l'équation (5) en utilisant la loi Normale.

Malheureusement nous ne pouvons pas procéder de la sorte : les résultats asymptotiques concernant l'estimateur des MCO $\hat{\rho}$ dérivés dans le contexte de la stationnarité ne sont plus valables sous l'hypothèse nulle $\rho = 1$. Par ailleurs la distribution asymptotique de $\hat{\rho}$ n'est pas Normale sous cette hypothèse nulle et la statistique t de Student associée ne suit plus une loi de Student ou une loi Normale. NELSON et PLOSSER (1982, p.145) montrent par des expériences de simulation que les procédures classiques de tests sont fortement biaisées en faveur de la stationnarité et conduisent au rejet de l'hypothèse nulle $\rho = 1$ quand elle est vraie dans plus de 65% des cas au seuil nominal de 5%.

De nombreuses procédures de test de l'hypothèse nulle de la racine unitaire ont cependant été proposées. Présentons brièvement celle qui sont les plus utilisées dans la littérature empirique.



3. Procédures de test de la racine unitaire⁶.

Nous allons distinguer parmi les différentes procédures de test celles qui supposent que la composante déterministe suit une tendance linéaire et celles qui supposent qu'elle suit une tendance non linéaire.

3.1 La composante déterministe suit une tendance linéaire.

Reconsidérons l'écriture suivante du modèle général (1) :

$$y_t = (1 - \rho)\alpha + \rho\beta + (1 - \rho)\beta t + \rho y_{t-1} + v_t$$

$$A_1(L)v_t = B(L)u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2) \quad (5)$$

Dans ce premier groupe on trouve la procédure de tests de DICKEY et FULLER (DF, 1979) qui s'applique lorsque les erreurs sont non autocorrélées, i.e $A_1(L) \equiv B(L) \equiv 1$ ou encore $v_t \equiv u_t$. Mais DICKEY et FULLER l'ont étendue au cas où le terme d'erreur v_t suit un processus autorégressif d'ordre $p-1$ stationnaire sous les hypothèses nulle et alternative, i.e $B(L) \equiv 1$ ou encore $A_1(L)v_t = u_t$: il s'agit alors de la procédure de tests de DICKEY et FULLER "augmentés" ou ADF (1981).

Dans le cas général où le terme d'erreur v_t suit un processus ARMA d'ordre $p-1$ et q stationnaire et inversible sous les hypothèses nulle et alternative, nous pouvons distinguer deux approches : l'approche paramétrique de SAID et DICKEY et l'approche semi paramétrique de PHILLIPS et PERRON.

3.1.1 Erreurs non autocorrélées : Tests de DICKEY et FULLER (DF) (1979).

Les tests DF sont fondés sur l'estimation par les MCO de trois modèles autorégressifs d'ordre 1 connu, représentant respectivement trois hypothèses alternatives de stationnarité asymptotique. Nous allons considérer successivement chacun de ces modèles et mettre en évidence leur expression sous l'hypothèse nulle de la racine unitaire $\rho = 1$ et sous l'hypothèse alternative $|\rho| < 1$.

Modèle (1) $(1 - \rho L)y_t = u_t \quad y_0 = 0 \quad t = 1, \dots, T \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2) \quad (9)$

• Sous l'hypothèse nulle de la racine unitaire $\rho = 1$, il vient :

H_{0A} $y_t = y_{t-1} + u_t \quad \text{ou} \quad y_t = y_0 + \sum_{i=1}^t u_i \quad (10)$

Il s'agit d'un processus de marche au hasard sans dérive (DS) caractérisé par une non stationnarité de nature purement stochastique.

• Sous l'hypothèse alternative $|\rho| < 1$, il vient :

H_{a1} $y_t = \rho y_{t-1} + u_t \quad (11)$

Il s'agit d'un processus AR(1) (asymptotiquement) stationnaire sans constante.

⁶ Pour une présentation détaillée des différentes procédures de test se référer à la thèse de ERTUR (1992).

$$\text{Modèle (2)} \quad (1 - \rho L)(y_t - \mu) = u_t \quad y_0 = 0, \mu \neq 0 \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2) \quad (12)$$

$$y_t = c + \rho y_{t-1} + u_t \quad \text{où } c = (1 - \rho)\mu \quad t = 1, \dots, T \quad (13)$$

et μ est la moyenne non nulle de la série chronologique y_t .

- Sous l'hypothèse nulle de la racine unitaire $\rho = 1$, il vient $c = 0$ et on obtient le modèle nul H_{0A} : processus de marche au hasard sans dérive (DS) caractérisé par une non stationnarité de nature purement stochastique.

- Sous l'hypothèse alternative $|\rho| < 1$, il vient :

$$\mathbf{H_{a2}} \quad y_t = c + \rho y_{t-1} + u_t \quad \text{où } c = (1 - \rho)\mu \quad (14)$$

Il s'agit d'un processus AR(1) (asymptotiquement) stationnaire avec constante ou processus AR(1) (asymptotiquement) stationnaire en écarts à une moyenne constante non nulle μ .

$$\text{Modèle (3)} \quad y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t \quad (1 - \rho L)\varepsilon_t = u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2) \quad (15)$$

$$y_t = (1 - \rho)\alpha + \rho\beta + (1 - \rho)\beta t + \rho y_{t-1} + u_t \quad \alpha \neq 0, \beta \neq 0 \quad y_0 = 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (16)$$

$$y_t = c + bt + \rho y_{t-1} + u_t \quad \text{où } \begin{cases} c = (1 - \rho)\alpha + \rho\beta \\ b = (1 - \rho)\beta \end{cases} \quad (17)$$

- Sous l'hypothèse nulle de la racine unitaire $\rho = 1$, il vient $c = \beta$ et $b = 0$:

$$\mathbf{H_{0B}} \quad y_t = \beta + y_{t-1} + u_t \quad \text{ou} \quad y_t = y_0 + \beta t + \sum_{i=1}^t u_i \quad (18)$$

Il s'agit d'un processus de marche au hasard avec dérive (DS) caractérisé par une non stationnarité de nature mixte : déterministe et stochastique ; les écarts ε_t par rapport à la tendance linéaire $\alpha + \beta t$ sont stationnaires en différences.

- Sous l'hypothèse alternative $|\rho| < 1$, il vient :

$$\mathbf{H_{a3}} \quad y_t = c + bt + \rho y_{t-1} + u_t \quad \text{où } \begin{cases} c = (1 - \rho)\alpha + \rho\beta & c \neq 0 \\ b = (1 - \rho)\beta & b \neq 0 \end{cases} \quad (20)$$

Il s'agit d'un processus TS caractérisé par une non stationnarité de nature purement déterministe, les écarts ε_t par rapport à la tendance linéaire suivent un processus AR(1) stationnaire.

Définissons les estimateurs des MCO et les statistiques t associées aux coefficients estimés sous les hypothèses nulles correspondantes dans chacun des modèles (1), (2) et (3) lorsque $|\rho| < 1$, pour un échantillon de taille finie $T-1$:

$$\text{Modèle (1)} \quad y_t = \rho^* y_{t-1} + u_t^* \quad u_t^* \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2) \quad (21)$$

$$\text{Modèle (2)} \quad y_t = \hat{c} + \hat{\rho} y_{t-1} + \hat{u}_t \quad y_1 \text{ fixé } t = 2, \dots, T \quad (22)$$

$$\text{Modèle (3)} \quad y_t = \tilde{c} + \tilde{b}t + \tilde{\rho} y_{t-1} + \tilde{u}_t \quad (23)$$

Soient ρ^* , $\hat{\rho}$ et $\tilde{\rho}$ les estimateurs des MCO de ρ ; DICKEY et FULLER proposent des tests individuels fondés sur les estimateurs standardisés : $T(\rho^* - 1)$, $T(\hat{\rho} - 1)$ et $T(\tilde{\rho} - 1)$ et les

statistiques t usuelles du test de l'hypothèse nulle $\rho = 1$: t_{ρ^*} , $t_{\hat{\rho}}$ et $t_{\tilde{\rho}}$ dans les régressions (1), (2) et (3) respectivement.

Mais il proposent également pour tester les hypothèses jointes, d'utiliser les statistiques F usuelles définies de la manière suivante :

- Pour tester $H_0^1 : (c, \rho) = (0, 1)$ dans le modèle (2) : $\Phi_1 = \frac{(SS_{CA} - SS_2)/2}{SS_2/(T-3)}$ (24)

- Pour tester $H_0^2 : (c, b, \rho) = (0, 0, 1)$ dans le modèle (3) : $\Phi_2 = \frac{(SS_{CA} - SS_3)/3}{SS_3/(T-4)}$ (25)

- Pour tester $H_0^3 : (c, b, \rho) = (c, 0, 1)$ dans le modèle (3) : $\Phi_3 = \frac{(SS_{CB} - SS_3)/2}{SS_3/(T-4)}$ (26)

où SS_2 et SS_3 sont respectivement la somme des carrés des erreurs estimées dans les modèles (2) et (3) qui constituent les modèles non contraints. SS_{CA} et SS_{CB} sont respectivement la somme des erreurs calculées dans les modèles contraints : processus de marche au hasard sans dérive (H_{0A}) et avec dérive (H_{0B}).

Sous l'hypothèse nulle $\rho = 1$, l'estimateur des MCO de ρ dans les modèles (1), (2) et (3) est convergent ; il converge même plus vite vers sa vraie valeur lorsque $\rho = 1$ que lorsque $|\rho| < 1$ (FULLER 1976, p.369), par conséquent le facteur de standardisation requis pour obtenir la distribution asymptotique de cet estimateur est alors T au lieu de $T^{1/2}$. Toutefois nous avons déjà signalé que les estimateurs des MCO de ρ ne suivent plus asymptotiquement des lois Normales, les statistiques t et Φ ne suivent plus des lois de Student et de Fisher-Snedecor. Les procédures d'inférence classiques ne nous permettent donc pas de tester l'hypothèse nulle $\rho = 1$.

Cependant DICKEY et FULLER ont dérivé les valeurs critiques de ces distributions asymptotiques non standard, mais aussi des distributions empiriques dans des échantillons de taille finie de toutes ces statistiques par des méthodes de simulation. Une caractéristique particulière de ces distributions est de dépendre du modèle considéré, c'est-à-dire de la présence ou non d'un terme constant et d'une tendance linéaire déterministe.

Les valeurs critiques des estimateurs standardisés et des statistiques t sous l'hypothèse nulle d'un processus de marche au hasard sans dérive (H_{0A}) sont présentées par FULLER dès 1976. On peut noter que les distributions de ces statistiques présentent une asymétrie à gauche et que leurs valeurs critiques sont plus sévères que celles dérivées de la loi Normale. Toutefois, $\tilde{\rho}$ et la statistique $t_{\tilde{\rho}}$ dans le modèle (3) sont invariants par rapport à la constante c, par conséquent les valeurs critiques tabulées restent identiques sous l'hypothèse nulle d'un processus de marche au hasard avec dérive (H_{0B}). Les valeurs critiques des statistiques Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 sont présentées par DICKEY et FULLER en 1981.

Nous pouvons également fonder le test DF sur l'estimation par les MCO de trois modèles suivants obtenus en soustrayant y_{t-1} à chaque membre des modèles précédents :

$$\text{Modèle (1')} \quad \Delta y_t = r^* y_{t-1} + u_t^* \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2) \quad (27)$$

$$\text{Modèle (2')} \quad \Delta y_t = \hat{c} + \hat{r} y_{t-1} + \hat{u}_t \quad y_1 \text{ fixé} \quad t = 2, \dots, T \quad (28)$$

$$\text{Modèle (3')} \quad \Delta y_t = \tilde{c} + \tilde{b}t + \tilde{r} y_{t-1} + \tilde{u}_t \quad \text{où } r = \rho - 1 \quad (29)$$

Cette dernière formulation a le mérite de faciliter la mise en œuvre de la procédure de test DF puisque les statistiques t sont alors directement fournies par le programme des MCO ($t_{r^*} = t_{\rho^*}$, $t_{\hat{r}} = t_{\hat{\rho}}$, $t_{\tilde{r}} = t_{\tilde{\rho}}$).

3.1.2 Erreurs autocorrélées.

3.1.2.1 Les erreurs suivent un processus AR(p-1) : Tests de DICKEY et FULLER "augmentés" (ADF) (1981).

Il est clair que la procédure de test DF n'est applicable que sous l'hypothèse suivant laquelle les erreurs u_t sont i.i.d., autrement dit si la série chronologique y_t suit un processus autorégressif d'ordre 1 connu. Il va sans dire que cette hypothèse est trop restrictive et ad hoc ; en pratique, il est peu vraisemblable qu'elle soit satisfaite. Toutefois DICKEY et FULLER (1981) étendent cette procédure de test à des séries chronologiques admettant une représentation purement autorégressive d'ordre p , i.e. au cas où le terme d'erreurs des trois modèles étudiés précédemment suit un processus AR(p-1) stationnaire sous les hypothèses nulle et alternative : il s'agit alors des tests ADF ou tests de DICKEY et FULLER "augmentés". Cette procédure de test est fondée sur l'estimation par les MCO, sous l'hypothèse alternative, de trois modèles autorégressifs d'ordre p obtenus en soustrayant y_{t-1} aux deux membres des modèles (1), (2) et (3) et en ajoutant $p-1$ retards en différences premières :

$$\text{Modèle (4)} \quad \Delta y_t = \pi y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \phi_j \Delta y_{t-j+1} + u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2) \quad (30)$$

$$\text{Modèle (5)} \quad \Delta y_t = c + \pi y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \phi_j \Delta y_{t-j+1} + u_t \quad (31)$$

$$\text{Modèle (6)} \quad \Delta y_t = c + bt + \pi y_{t-1} + \sum_{j=2}^p \phi_j \Delta y_{t-j+1} + u_t \quad (32)$$

où $\pi = A_1(1)(\rho - 1)$ et le test de l'hypothèse nulle de la racine unitaire n'est autre que le test de significativité du coefficient π que l'on effectue à l'aide des statistiques t usuelles t_{π^*} , $t_{\hat{\pi}}$ et $t_{\tilde{\pi}}$ dont les distributions asymptotiques sont identiques, sous l'hypothèse nulle $\rho = 1$, à celles des statistiques t_{ρ^*} , $t_{\hat{\rho}}$ et $t_{\tilde{\rho}}$. Les statistiques Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 définies sur les modèles (5) et (6) suivent les mêmes distributions asymptotiques que celles définies sur les modèles (2) et (3) et peuvent donc également être utilisées pour tester les hypothèses nulles jointes correspondantes sous réserves de quelques modifications mineures concernant les degrés de liberté (DICKEY et

FULLER, 1981). On peut noter par ailleurs que les coefficients estimés ϕ_j^* , $\hat{\phi}_j$ et $\tilde{\phi}_j$ des retards en différences premières inclus dans les régressions suivent asymptotiquement une loi Normale sous les hypothèses nulle et alternative et peuvent donc faire l'objet de test standard de significativité permettant d'évaluer l'ordre p du processus autorégressif.

3.1.2.2 *Les erreurs suivent un processus ARMA (p-1,q).*

3.1.2.2.a *Approche paramétrique : Tests de SAID et DICKEY (1984).*

SAID et DICKEY (1984) étendent à leur tour cette procédure de test à des séries chronologiques admettant une représentation autorégressive moyenne mobile d'ordre p et q inconnus, i.e. au cas où le terme d'erreur des modèles considérés suit un processus ARMA($p-1,q$) stationnaire et inversible sous les hypothèses nulle et alternative. L'extension qu'ils présentent est fondée sur une approximation autorégressive finie dont l'ordre k croît avec la taille de l'échantillon [$k = o(T^{1/3})$, i.e $\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1/3} k = 0$] et l'utilisation des statistiques t usuelles. Nous ne disposons malheureusement d'aucune information sur le comportement des tests joints ni sur la valeur qu'il faut attribuer à k en pratique pour une taille d'échantillon donné.

Il semblerait cependant que les résultats des tests soient sensibles à la valeur attribuée au paramètre de troncature k . On peut expliquer cette sensibilité de la manière suivante :

- *inclure trop peu de retards peut affecter de manière défavorable le niveau du test.*
- *par contre inclure trop de retards peut réduire la puissance du test en raison de l'augmentation du nombre de paramètres à estimer et de la réduction de la taille effective de l'échantillon due aux conditions initiales supplémentaires requises.*

PERRON (1991) et CAMPBELL et PERRON (1991) propose cependant une stratégie séquentielle fondé sur la significativité des coefficients des retards en différences premières permettant d'attribuer à k une valeur dans les études empiriques : elle consiste à fixer a priori une borne supérieure pour k notée k_{\max} et à effectuer ensuite la régression "augmentée" d'ordre k_{\max} . Si le coefficient du dernier retard en différences premières est jugé significatif d'après les procédures d'inférence traditionnelles fondées sur la loi Normale, alors $k = k_{\max}$. Sinon on réduit k_{\max} d'une unité et on effectue la régression "augmentée" d'ordre $k_{\max}-1$ jusqu'à ce que le coefficient associé au dernier retard en différences premières soit significatif. Si aucun n'est significatif, on sélectionne $k = 0$. Cette stratégie n'est pas la seule envisageable puisque nous pourrions aussi utiliser des tests de significativité jointe sur les retards en différences premières supplémentaires ou encore les critères d'information de SCHWARZ (1978) ou de HANNAN (1980) mais elle a l'avantage de la simplicité.

Toujours est-il que c'est là une limitation importante de l'approche paramétrique de SAID et DICKEY. Il serait intéressant d'étudier une approche qui prenne en compte la structure d'autocorrélation des résidus d'une manière non paramétrique.

3.1.2.2.b Approche semi paramétrique : Tests de PHILLIPS (1987) et PHILLIPS et PERRON (1988).

PHILLIPS (1987) et PHILLIPS et PERRON (1988) adoptent d'emblée une méthodologie radicalement différente. Leur approche est fondée sur une correction non paramétrique pour tenir compte de la structure d'autocorrélation des résidus. Les hypothèses faites sur les erreurs u_t sont ainsi beaucoup moins restrictives : elles peuvent être faiblement dépendantes temporellement et distribuées de manière hétérogène. Leurs résultats asymptotiques sont fondés sur la théorie de la convergence faible fonctionnelle (BILLINGSLEY, 1968) et permettent de généraliser dans un cadre unifié les résultats antérieurs concernant la marche au hasard et des processus ARIMA plus généraux contenant une racine unitaire.

Une caractéristique particulièrement intéressante des nouvelles statistiques de tests est que leur distribution asymptotique est identique à celles dérivées par DICKEY et FULLER sous l'hypothèse d'erreurs i.i.d.. Ceci implique que la procédure de test de PHILLIPS et PERRON peut être utilisée en se référant aux valeurs critiques asymptotiques tabulées par DICKEY et FULLER même si elle permet de spécifier de manière beaucoup plus générale les séries chronologiques étudiées.

L'avantage principal de l'approche de PHILLIPS et PERRON est que, même si on peut envisager une grande variété de modèles susceptibles d'engendrer les données, le calcul des statistiques transformées présentées dans le Tableau B (cf. Annexe) requièrent seulement :

- l'estimation par les MCO d'un modèle autorégressif du premier ordre (correspondant à l'un des modèles de la procédure de test DF) et le calcul des statistiques DF associées.
- l'estimation d'un facteur de correction fondé sur la structure des résidus de cette régression.

Le Tableau B appelle un certain nombre de commentaires :

- notons d'abord que σ_u^{2*} , $\widehat{\sigma}_u^2$ et $\widetilde{\sigma}_u^2$ sont des estimateurs convergents de : $\sigma_u^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^T E(u_t^2)$

dans les modèles (1), (2) et (3) respectivement.

- σ_{T1}^{2*} , $\widehat{\sigma}_{T1}^2$ et $\widetilde{\sigma}_{T1}^2$ sont des estimateurs convergents de : $\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} E(S_T^2)$ où $S_T = \sum_{t=1}^T u_t$

dans les modèles (1), (2) et (3) respectivement. De nombreux estimateurs sont envisageables, mais PHILLIPS et PERRON optent pour celui proposé par NEWEY et WEST (1987), défini de la manière suivante :

$$\sigma_{T1}^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T u_t^2 + 2T^{-1} \sum_{\tau=1}^1 \omega(\tau, 1) \sum_{t=\tau+1}^T u_t u_{t-\tau}$$

où $\omega(\tau, 1) = 1 - [\tau / (1+1)]$ et les u_t sont les résidus du modèle alternatif estimé (u_t^* , \widehat{u}_t ou \widetilde{u}_t). Les pondérations affectées aux autocovariances estimées assurent que la variance estimée soit positive. σ_{T1}^2 a une interprétation naturelle pour u_t stationnaires : il s'agit de 2π fois l'estimateur de

la densité spectrale de σ^2 pour la fréquence zéro où on a utilisé une fenêtre spectrale triangulaire. Nous aurions pu aussi bien utiliser une fenêtre de PARZEN. PHILLIPS et PERRON suggèrent, comme SAID et DICKEY, que le paramètre de troncature l soit une fonction croissante de la taille de l'échantillon [en fait $l = o(T^{1/4})$] mais ne donnent aucune indication précise sur la valeur qu'il faut lui attribuer en pratique. Une procédure fréquemment utilisée est alors de contrôler la sensibilité des résultats des tests lorsqu'on fait varier ce paramètre.

Les statistiques $Z(\dots)$ de PHILLIPS et PERRON présentées dans le Tableau B sont donc des transformations des statistiques initiales de la procédure de test de DICKEY et FULLER, et nous permettent d'envisager des erreurs autocorrélées et distribuées de manière hétérogène. Les écarts types estimés σ_u^* , $\widehat{\sigma}_u$, $\widetilde{\sigma}_u$ intervenant dans les statistiques t sont maintenant remplacés par les écarts types estimés généralisés σ_{T1}^* , $\widehat{\sigma}_{T1}$, $\widetilde{\sigma}_{T1}$. Chaque statistique transformée contient, en outre, un terme de correction additif dont la taille dépend de la différence entre les variances estimées correspondantes $\sigma_{T1}^{2*} - \sigma_u^{2*}$, $\widehat{\sigma}_{T1}^2 - \widehat{\sigma}_u^2$, ou $\widetilde{\sigma}_{T1}^2 - \widetilde{\sigma}_u^2$. *Ces transformations sont conçues de manière à éliminer asymptotiquement les effets de l'autocorrélation et de la distribution hétérogène des erreurs.*

Les distributions asymptotiques de ces statistiques transformées sont identiques à celles des statistiques initiales non transformées lorsque $\sigma^2 = \sigma_u^2$. Par conséquent les valeurs critiques asymptotiques dérivées par DICKEY et FULLER sous l'hypothèse d'erreurs i.i.d. peuvent être utilisées dans la procédure de test de PHILLIPS et PERRON qui cependant impose des conditions beaucoup moins contraignantes sur les erreurs.

Il faut cependant noter que la puissance des tests de l'hypothèse nulle de la racine unitaire est très faible lorsque ρ est strictement inférieur, mais proche de 1. Une racine proche de 1 implique que la persistance des chocs aléatoires frappant l'économie est élevée : le retour de la série à son espérance mathématique requiert une période beaucoup plus longue que celle traditionnellement admise pour les cycles d'affaires (3 ou 4 ans) (STULZ et WASSERFALLEN 1985, p.24), par conséquent l'approximation de la racine unitaire semble, de prime abord, acceptable dans le contexte de la théorie macroéconomique.

Toutes ces procédures se heurtent par ailleurs à une limitation importante : elles postulent que la composante déterministe de la série considérée suit une tendance linéaire. *Or comme le suggèrent OULIARIS, PARK et PHILLIPS (1989) et PERRON (1989, 1991) la mauvaise spécification, linéaire en l'occurrence, de la composante déterministe pourrait nous conduire à ne pas rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire et ceci à tort.*

3.2 La composante déterministe suit une tendance non linéaire.

OULIARIS, PARK et PHILLIPS (1989) proposent ainsi une extension de la procédure de test de PHILLIPS et PERRON permettant de détecter la racine unitaire tout en maintenant une tendance polynomiale sous les hypothèses nulle et alternative tandis que PERRON (1989) propose une procédure de test permettant d'intégrer formellement l'effet d'un choc majeur

supposé exogène et palliant la faible puissance des tests de la racine unitaire dans des échantillons de petite taille sous une spécification linéaire par morceaux de la composante déterministe.

3.2.1 Tendance polynomiale : Tests de OULIARIS, PARK et PHILLIPS (1989).

OULIARIS, PARK et PHILLIPS (1989) généralisent la procédure de test de PHILLIPS et PERRON en remplaçant la tendance linéaire par une tendance polynomiale et par conséquent en intégrant l'éventualité d'une non linéarité en espérance mathématique sous les hypothèses nulle et alternative. L'intérêt de cette nouvelle procédure de test est qu'elle permet une grande flexibilité dans la spécification de la composante déterministe.

Le modèle général (1) s'écrit alors :

$$y_t = \sum_{i=0}^p \beta_i t^i + \varepsilon_t \quad (1 - \rho L)\varepsilon_t = v_t \quad A_1(L)v_t = B(L)u_t \quad (34)$$

$$y_t = \sum_{i=0}^p b_i t^i + \rho y_{t-1} + v_t \quad (35)$$

- Sous l'hypothèse nulle de la racine unitaire $\rho = 1$, il vient $b_p = 0$ et $b_i \neq 0$ pour $i = 0, \dots, p-1$:

$$y_t = \sum_{i=0}^{p-1} b_i t^i + v_t \quad (36)$$

Il s'agit d'un processus I(1) caractérisé, comme le processus DS, par une non stationnarité de nature mixte ; il n'est cependant pas stationnaire en différences mais permet d'intégrer la non linéarité en espérance mathématique.

- Tandis que sous l'hypothèse alternative $|\rho| < 1$, on a $b_i \neq 0$ pour $i = 0, \dots, p$:

$$y_t = \sum_{i=0}^p b_i t^i + \rho y_{t-1} + v_t \quad (37)$$

Il s'agit d'un processus TS polynomial d'ordre p, que nous noterons TS(p), caractérisé par une non stationnarité de nature purement déterministe.

OULIARIS, PARK et PHILLIPS proposent des tests individuels fondés l'estimateur standardisé et la statistique t usuelle du test de l'hypothèse nulle $\rho = 1$, mais aussi un test de l'hypothèse nulle jointe : $b_p = 0$ et $\rho = 1$. Les tests sont effectués à l'aide de statistiques transformées suivant la méthodologie de PHILLIPS et PERRON, leurs valeurs critiques sont obtenues par des méthodes de simulation pour $p = 2, 3, 4$, et 5 (1989, Annexe 2, p.23-24).

Le résultat intéressant que cette approche permet de dégager est le suivant : si le vrai processus engendrant les données suit une tendance polynomiale d'ordre p, les tests de type t fondés sur une régression n'incluant qu'une tendance polynomiale d'ordre p-1 seront biaisés en faveur de l'hypothèse nulle de la racine unitaire. Un modèle de régression sans le terme tendanciel d'ordre p ne permettrait pas de discriminer un processus TS d'un processus DS parce que le

régresseur y_{t-1} contiendrait un terme tendanciel inexpliqué d'ordre p qui dominerait nettement toutes les autres composantes. La puissance asymptotique des tests de type t pour tester l'hypothèse nulle $\rho = 1$ dans ce modèle sans le terme t^p serait nulle. PERRON produit une démonstration formelle de cette proposition lorsque $p = 1$ (1988, Théorème 1, p.316).

3.2.2 *Tendance linéaire par morceaux : Tests de PERRON (1989).*

L'approche de PERRON est fondée sur un postulat particulier qui la différencie de toutes les études antérieures sur la racine unitaire : en effet, il suppose que des chocs "majeurs" comme la Grande Crise de 1929 et le premier choc pétrolier ne sont pas des réalisations du processus stochastique sous-jacent engendrant les données. Il considère que ces chocs sont donc exogènes. Ce postulat d'exogénéité ne doit cependant pas être considéré comme un élément permettant de spécifier un modèle descriptif pour les séries étudiées, mais seulement comme un outil permettant de soustraire l'effet de ces chocs de la fonction de bruit. L'objectif poursuivi par PERRON est de montrer que la plupart des séries chronologiques macroéconomiques peuvent être considérées comme stationnaires en écarts à une tendance déterministe linéaire si l'on permet une variation de la constante et/ou de la pente de la fonction de tendance suite à un choc "majeur".

Son approche s'apparente à "l'analyse des interventions" suggérée par BOX et TIAO (1975). D'après cette méthodologie, des phénomènes "aberrants" ou "points extrêmes" peuvent être retirés de la fonction de bruit et modélisés comme des variations ou "interventions" dans la composante déterministe de la série chronologique. Ces "interventions" sont supposées survenir à des dates connues ; de manière analogue PERRON suppose que les dates de rupture de la fonction de tendance sont fixes et connues a priori ; plus précisément les dates de rupture retenues ne sont pas corrélées avec les données. Ce point a été fortement critiqué par CHRISTIANO (1988).

L'approche de PERRON est essentiellement motivée par une constatation empirique effectuée sur certaines séries aux Etats-Unis et par l'étude de l'effet d'une rupture dans la fonction de tendance sur les procédures "standard"⁷ de test de la racine unitaire :

- PERRON note que les valeurs estimées du coefficient ρ sont notablement supérieures sur les périodes globales à celles obtenues dans les sous-périodes après découpage des échantillons de part et d'autre de la Grande Crise de 1929 ou du premier choc pétrolier. Ces chocs majeurs semblent responsables de la racine unitaire détectée sur les périodes globales. Par ailleurs, les tests effectués sur les sous-périodes ne semblent pas assez puissants pour rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire alors que les valeurs estimées de ρ sont bien inférieures à l'unité.

- Par ailleurs, il apparaît qu'on ne peut rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire en se fondant sur les statistiques issues du modèle (3) de DICKEY et FULLER si l'amplitude de la variation de la constante ou de la pente est significative, même si la série est engendrée par un

⁷ Nous entendons par tests "standard" les tests de DICKEY et FULLER (1979, 1981), SAID et DICKEY (1984) et PHILLIPS et PERRON (1988).

modèle de tendance linéaire avec rupture et des erreurs i.i.d. On note que ceci est dû au fait que $\tilde{\rho}$ soit biaisé vers l'unité. Nous pourrions donc conclure dans un tel cas que les chocs aléatoires frappant l'économie ont un effet permanent sur la trajectoire future de la série considérée, alors que manifestement il n'en est rien et que seule la variation de la fonction de tendance a un effet permanent.

Comme dans le cas de la procédure de test de OULIARIS, PARK et PHILLIPS (1989), le problème soulevé est donc celui de la mauvaise spécification de la composante déterministe postulée linéaire dans les procédures de test "standard" ; l'alternative proposée par PERRON étant une spécification linéaire par morceaux alors que OULIARIS, PARK et PHILLIPS proposaient une spécification polynomiale.

Examinons maintenant les modèles considérés par PERRON. L'hypothèse nulle est toujours celle de la racine unitaire, mais les modèles intègrent désormais l'éventualité d'un changement de structure à la date T_B ($1 < T_B < T$) sous les hypothèses nulle et alternative.

$$\text{Modèle (A)} \quad y_t = \gamma_1 + \beta t + (\gamma_2 - \gamma_1)DU_t + \varepsilon_t \quad (1 - \rho L)\varepsilon_t = v_t \quad (38)$$

$$A_1(L)v_t = B(L)u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2)$$

où $DU_t = 1$ si $t > T_B$, 0 sinon ; T_B est la date du choc. Il s'agit du modèle de crise de PERRON (crash model) qui permet une variation du niveau de la série à la date T_B . $A_1(L)$ et $B(L)$ sont respectivement des polynôme de retard d'ordre $p-1$ et q satisfaisant les conditions de stationnarité et d'inversibilité. Le terme d'erreurs v_t suit par conséquent un processus ARMA($p-1, q$) stationnaire et inversible. Mais nous pourrions également faire des hypothèses plus générales sur ce terme d'erreurs analogues à celles de PHILLIPS et PERRON.

• Sous l'hypothèse nulle de la racine unitaire $\rho = 1$, il vient :

$$\mathbf{H}_0^A \quad y_t = \beta + \delta D(T_B)_t + y_{t-1} + v_t \quad (39)$$

où $D(T_B)_t = 1$ si $t = T_B + 1$, 0 sinon. Il s'agit d'un modèle I(1) avec choc sur la dérive ; le paramètre de dérive passe de β à $\beta + \delta$ pour une seule période, à la suite du choc survenu à la date T_B . Il ne s'agit pas d'un processus DS : les différences premières du processus ne sont pas stationnaires sauf si $\delta = 0$.

• Sous l'hypothèse alternative $|\rho| < 1$, il vient :

$$\mathbf{H}_a^A \quad y_t = \gamma_1 + \beta t + (\gamma_2 - \gamma_1) DU_t + \varepsilon_t \quad (1 - \rho L)\varepsilon_t = v_t \quad (40)$$

Il s'agit d'un modèle TS stationnaire en écarts à une tendance déterministe linéaire par morceaux discontinue au point de rupture mais gardant la même pente. Le niveau de la série y_t est affecté de manière permanente suite au choc survenu à la date T_B : la constante passe de γ_1 à γ_2 .

$$\text{Modèle (B)} \quad y_t = \gamma + \beta_1 t + (\beta_2 - \beta_1) DT_t^* + \varepsilon_t \quad (1 - \rho L)\varepsilon_t = v_t \quad (41)$$

$$A_1(L)v_t = B(L)u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2)$$

où $DT_t^* = t - T_B$ si $t > T_B$, 0 sinon. Il s'agit du modèle de variation de croissance de PERRON (changing growth model). Ce modèle correspond au modèle de tendance segmentée étudié par RAPPOPORT et REICHLIN (1989).

- Sous l'hypothèse nulle de la racine unitaire $\rho = 1$, il vient :

$$\mathbf{H_0^B} \quad y_t = \beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) DU_t + y_{t-1} + v_t \quad (42)$$

Il s'agit d'un modèle I(1) avec choc sur la dérive ; le paramètre de dérive passe de β_1 à β_2 suite au choc survenu à la date T_B . Il ne s'agit d'un processus DS que si $(\beta_2 - \beta_1)$ est nul.

- Sous l'hypothèse alternative $|\rho| < 1$, il vient :

$$\mathbf{H_a^B} \quad y_t = \gamma + \beta_1 t + (\beta_2 - \beta_1) DT_t^* + \varepsilon_t \quad (1 - \rho L)\varepsilon_t = v_t \quad (43)$$

Il s'agit d'un modèle TS stationnaire en écarts à une tendance déterministe linéaire par morceaux continue au point de rupture (fonction spline linéaire). La croissance de la série y_t est affectée de manière permanente par le choc à partir de la date T_B sans que son niveau n'ait subi de variation : la pente de la fonction de tendance passe de β_1 à β_2 sans aucune modification de la constante.

$$\mathbf{Modèle (C)} \quad y_t = \gamma_1 + \beta_1 t + (\gamma_2 - \gamma_1) DU_t + (\beta_2 - \beta_1) DT_t + \varepsilon_t \quad (1 - \rho L)\varepsilon_t = v_t \quad (44)$$

$$A_1(L)v_t = B(L)u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2)$$

où $DT_t = t$ si $t > T_B$, 0 sinon. Ce modèle permet une variation du niveau de la série y_t et de son taux croissance suite au choc survenu à la date T_B . Il intègre donc les effets apparaissant dans les deux modèles précédents.

- Sous l'hypothèse nulle de la racine unitaire $\rho = 1$, il vient :

$$\mathbf{H_0^C} \quad y_t = \beta_1 + (\beta_2 - \beta_1) DU_t + \omega D(T_B)_t + y_{t-1} + v_t \quad (45)$$

Il s'agit d'un processus I(1) avec choc sur la dérive ; le paramètre de dérive passe de β_1 à $\beta_2 + \omega$ pour une seule période, à la suite du choc survenu à la date T_B , puis à β_2 de manière permanente. Il ne s'agit pas d'un processus DS : les différences premières du processus ne sont pas stationnaires sauf si $(\beta_2 - \beta_1) = 0$ et $\omega = 0$.

- Sous l'hypothèse alternative $|\rho| < 1$, il vient :

$$\mathbf{H_a^C} \quad y_t = \gamma_1 + \beta_1 t + (\gamma_2 - \gamma_1) DU_t + (\beta_2 - \beta_1) DT_t + \varepsilon_t \quad (1 - \rho L)\varepsilon_t = v_t \quad (46)$$

Il s'agit d'un processus TS stationnaire en écarts à une tendance déterministe linéaire par morceaux discontinue au point de rupture ; la constante passe de γ_1 à γ_2 et la pente de la fonction de tendance passe de β_1 à β_2 à la suite du choc survenu à la date T_B .

PERRON propose deux types de procédures de test fondés sur les estimateurs standardisés et les statistiques de type t, leurs valeurs critiques sont obtenues par des méthodes de simulation pour des valeurs de $\lambda = T_B/T$ données (PERRON, 1989 p.1376-1377) :

- dans les procédures de test en deux étapes, les tests de l'hypothèse nulle s'effectuent sur les résidus des modèles (A), (B) ou (C) estimés dans un premier temps. Lorsque les erreurs sont autocorrélées, il s'agit d'extensions des tests ADF ou de SAID et DICKEY ou encore des tests de PHILLIPS et PERRON.

- les procédures en une étapes sont fondées sur l'estimation d'un modèle général qui contient les modèles nul et alternatif en tant que cas particuliers suivant la présence ou non de la racine unitaire.

Cette dernière procédure de test est particulièrement intéressante lorsque les erreurs sont autocorrélées parce qu'elle permet de formaliser l'idée suivant laquelle les chocs ont des effets dynamiques ce que les procédures de test en deux étapes ne permettent pas d'intégrer.

Elle est fondée sur l'estimation par les MCO de trois modèles autorégressifs "augmentés" suivants, par extension directe de la méthodologie de SAID et DICKEY. Nous avons privilégié le modèle (C) dans notre étude empirique :

$$\text{Modèle (A)} \quad y_t = c^A + \delta_1^A DU_t + b^A t + \delta_3^A D(T_B)_t + \phi_1^A y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \phi_j^A \Delta y_{t-j} + u_t \quad (47)$$

$$\text{Modèle (B)} \quad y_t = c^B + \delta_1^B DU_t + b^B t + \delta_2^B DT_t^* + \phi_1^B y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \phi_j^B \Delta y_{t-j} + u_t \quad (48)$$

$$\text{Modèle (C)} \quad y_t = c^C + \delta_1^C DU_t + b^C t + \delta_2^C DT_t + \delta_3^C D(T_B)_t + \phi_1^C y_{t-1} + \sum_{j=1}^k \phi_j^C \Delta y_{t-j} + u_t \quad (49)$$

Signalons pour conclure cette présentation des différentes procédures de test de la racine unitaire que tous les tests effectués n'ont qu'une justification asymptotique, nous disposons certes des valeurs critiques des distributions empiriques dans des échantillons de taille finie des statistiques de DICKEY et FULLER mais nous avons vu que seules les valeurs critiques des distributions asymptotiques de ces statistiques pouvaient être utilisées dans la procédure de test de PHILLIPS et PERRON (1988). Nous ne disposons de même, que des valeurs critiques asymptotiques des statistiques utilisées dans les procédures de test de OULIARIS, PARK et PHILLIPS (1989) et de PERRON (1989b).

Par conséquent l'utilisation de ces procédures de test dans des échantillons de taille finie, avec relativement peu d'observations, demande une grande prudence quant à l'interprétation des résultats obtenus en l'absence de plus amples informations sur leur comportement effectif dans de tels échantillons.

Nous ne prétendons nullement être exhaustif dans le domaine des tests de la racine unitaire où la littérature est foisonnante. Nous avons choisi de présenter les procédures de test les plus utilisées dans la littérature en gardant une cohérence méthodologique.

4. Stratégies de test.

Pour que toutes ces procédures de test soit réellement opérationnelles sur le plan empirique, il faut élaborer une stratégie de test indiquant le choix du modèle de régression et des statistiques appropriées, étant donné les règles de décision et leurs implications et la puissance des différents tests constituant ces procédures.

Nous avons étudié trois stratégies proposées respectivement par DICKEY, BELL et MILLER (1986), PERRON (1988) et HENIN et JOBERT (1990). Nous avons évalué leur limite et tenté de proposer une approche générale unifiée⁸. Soulignons d'abord le caractère conditionnel et séquentiel de toutes ces stratégies de tests.

La stratégie de DICKEY, BELL et MILLER (1986) est élaborée pour la prévision et n'intègre pas les tests joints. Il repose sur l'estimation du modèle (2) et l'utilisation des statistiques issues de ce modèle. Il est largement admis que cette stratégie ne permet pas de distinguer un processus TS d'un processus DS. PERRON (1988, Théorème 1, p.316) et WEST (1987) en fournissent la démonstration.

La stratégie de PERRON (1988) repose sur l'estimation du modèle (3) et l'utilisation des statistiques issues de ce modèle. Elle intègre les tests joints. On note l'importance du test joint fondé sur la statistique Φ_2 qui permet de discriminer les processus de marche au hasard avec et sans dérive sous l'hypothèse nulle.

La limite de cette stratégie est cependant la suivante : si le vrai processus engendrant les données est stationnaire en écarts à une tendance déterministe polynomiale ou linéaire par morceaux, les tests de type t fondés sur le modèle (3) seront biaisés en faveur de l'hypothèse nulle de la racine unitaire.

HENIN et JOBERT (1990) ont de leur côté envisagé l'introduction d'une certaine flexibilité de la tendance déterministe sous l'hypothèse nulle de la racine unitaire. Les tests joints ne sont pas intégrés de manière explicite mais peuvent contribuer à la vérification de la cohérence des résultats obtenus.

La limite de cette stratégie est à notre sens qu'elle n'échappe pas au biais en faveur de l'hypothèse nulle. Considérons en effet le cas où le vrai processus engendrant les données est stationnaire en écarts à une tendance quadratique : l'application de cette stratégie nous conduirait alors à tort à la conclusion suivant laquelle la série est $I(1)$ et suit une tendance quadratique.

La seule procédure de test sans biais est dans ce cas celle de OULIARIS, PARK et PHILLIPS (1989) et elle nécessiterait la fixation a priori de l'ordre maximal de la composante polynomiale.

⁸ Cette étude a fait l'objet d'un document de travail de l'IME (ERTUR 1991, n°9104). Une version modifiée intégrant les suggestions de lecteurs anonymes en est présentée dans notre thèse (ERTUR 1992, chapitre 4). Nous n'en exposerons donc ici que les grandes lignes et les réflexions qu'elles nous a inspirées.

Notre objectif étant de développer une stratégie opérationnelle dans une étude empirique nous avons tenté d'intégrer les stratégies de PERRON et de HENIN et JOBERT en apportant quelques modifications à cette dernière.

Cette tentative nous a conduit à deux réflexions quant à l'application de ces procédures de test dans les travaux empiriques :

- Etant donné l'extrême sensibilité de ces procédures à la structure d'autocorrélation des erreurs, la vulnérabilité de la puissance des tests qui en découle et son effondrement lorsque l'on s'approche de l'unité, leur fondement asymptotique et la non disponibilité des valeurs critiques des distributions empiriques dans des échantillons de taille réduite (excepté pour les tests DF) alors qu'en pratique on est toujours limité par la taille des échantillons dont on dispose.

Il nous paraît nécessaire de chercher systématiquement à évaluer la robustesse des résultats obtenus en appliquant plusieurs d'entre elles et en essayant dans la mesure du possible de ne pas imposer des hypothèses trop restrictives sur les erreurs.

- Il faut souligner l'importance cruciale que revêt la spécification de la composante déterministe dans les procédures de test de la racine unitaire. Les résultats des tests dépendent en effet de cette spécification. Nous avons été confrontés à ce problème dans notre tentative de suggérer une approche générale unifiée.

La stratégie de PERRON (1988) en écartant, sur la base de considérations portant sur la spécification de la composante déterministe, celle suggérée par DICKEY, BELL et MILLER (1986), n'échappe pas elle-même à la même critique puisqu'elle postule que cette composante déterministe suit une tendance linéaire.

La stratégie de HENIN et JOBERT (1990), quant à elle, en proposant une vérification ex post de ce postulat, n'apporte pas une solution satisfaisante même sous les modifications que nous avons suggérées, et ne peut au mieux que jouer le rôle d'un signal d'alarme.

D'un point de vue général, il nous semble que dans l'état actuel, il est encore une fois nécessaire de vérifier la robustesse des résultats obtenus en appliquant l'une ou l'autre de ces stratégies, par la mise en œuvre d'une approche empirique qui requiert, avant toute chose, l'examen du graphe de la série considérée pour détecter toute forme de non linéarité et d'éventuels changements structurels majeurs. Cette première étape devrait être suivie par l'application des procédures de test de OULIARIS, PARK et PHILLIPS (1989) et PERRON (1989b) qui intègrent de manière formelle la spécification polynomiale ou linéaire par morceaux de la composante déterministe.

5. Application économétrique au PIB réel marchand en France.

Nous avons tenté d'appliquer cette ligne de conduite dans notre application empirique qui porte sur les séries du PIB réel marchand CVS en France en base 1970 sur la période 1963:3-1985:4 et en base 1980 sur la période 1970:3-1989:4 transformées en logarithmes. Notre objectif étant de déterminer la nature de la non stationnarité caractérisant le PIB réel, nous avons appliqué les procédures de test de DICKEY et FULLER (DF) (1979), PHILLIPS et PERRON (PP) (1988), OULIARIS, PARK et PHILLIPS (OPP) (1989) et PERRON (1989).

5.1 Log du PIB réel marchand CVS aux prix de 1970.

Nous avons constaté que lorsque la série du log du PIB réel marchand CVS en base 1970 est analysée sur la période globale sur laquelle elle est disponible, c'est-à-dire 1963:3-1985:4, l'hypothèse nulle de la racine unitaire ne peut être rejetée en utilisant les procédures de test DF, PP et OPP. Le log du PIB réel en base 1970 serait ainsi intégré d'ordre 1 et suivrait une tendance quadratique sur la période 1963:3-1985:4 (Graphique 1)⁹. Ce processus permet d'intégrer la non linéarité en espérance mathématique qui semble le caractériser, puisque son espérance mathématique suit une tendance quadratique et que sa variance suit une tendance linéaire pour une valeur initiale fixée.

Le log du PIB réel serait donc caractérisé par une non stationnarité de nature mixte : déterministe et stochastique, les écarts par rapport à la tendance déterministe quadratique étant stationnaires en différences premières. Dans cette configuration nous savons que les chocs aléatoires frappant le PIB réel ont un effet permanent sur la trajectoire de la série, sans que l'on puisse envisager a priori un retour vers la tendance déterministe qui coexiste avec la tendance stochastique dans ce genre de processus. Nous avons vu par ailleurs que ce résultat peut aussi s'interpréter de la manière suivante : la série du taux de croissance du PIB réel est caractérisée par une non stationnarité de nature purement déterministe et suit un processus TS stationnaire en écarts à une tendance déterministe linéaire dont la pente est significativement négative, ceci indiquant une décélération constante de la croissance sur la période considérée.

Il faut cependant que ce résultat soit confirmé par la procédure de test OPP qui est alors la seule procédure de test sans biais : les résultats de cette procédure apportent cette confirmation et indiquent de plus que spécifier une tendance polynomiale d'ordre supérieur (jusqu'à 5) ne permet toujours pas de rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire. La présence d'une racine unitaire n'est donc pas imputable à une mauvaise spécification de la composante déterministe de la série.

L'inspection du graphique du log du PIB réel en base 1970 nous a ensuite suggéré une manière alternative d'introduire la flexibilité de la composante déterministe. En effet les chocs pétroliers semblent jouer un rôle non négligeable dans la non linéarité du log du PIB réel. Aussi

⁹ Les graphiques sont présentés en Annexe. Les résultats numériques complets sont présentés dans notre thèse (ERTUR, 1992).

avons nous découpé la période globale 1963:3-1985:4 en sous-périodes de part et d'autre de ces chocs pétroliers en faisant l'hypothèse que ces chocs sont exogènes. Dans le cadre des procédures de test DF et PP ceci revient à supposer que la composante déterministe de la série est linéaire par morceaux. Nous avons successivement introduit le premier choc pétrolier (1974:3) puis le second choc pétrolier (1980:1) et tenté d'évaluer l'effet de cette configuration sur les tests de l'hypothèse nulle de la racine unitaire. Nous avons également appliqué la procédure de test de PERRON qui permet d'intégrer formellement un choc majeur supposé exogène tout en évitant la faible puissance des procédures de test de la racine unitaire dans des échantillons de petite taille.

Il s'est avéré que sur la première sous-période 1963:3-1974:3, précédant le premier choc pétrolier, nous pouvions rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire en utilisant les procédures de test DF et PP, tandis que sur la seconde sous-période 1974:4-1985:4 nous ne pouvions pas la rejeter. Toutefois la procédure de test OPP nous a indiqué que le non rejet de l'hypothèse nulle de la racine unitaire sur la seconde sous-période pouvait être imputé à la spécification linéaire de la composante déterministe puisque quand nous avons spécifié une tendance cubique pour cette composante nous avons pu la rejeter largement. Le PIB réel en base 1970 suivrait donc un processus TS stationnaire en écarts à une tendance déterministe linéaire sur la sous-période 1963:3-1974:3 et un processus TS stationnaire en écarts à une tendance polynomiale d'ordre 3 sur la sous-période 1974:4-1985:4 et serait donc caractérisé par une non stationnarité de nature purement déterministe sur ces deux sous-périodes. *A la suite de cette conclusion, il n'est pas étonnant que la procédure de test de PERRON ne nous ait pas permis de rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire sous l'hypothèse d'une rupture de la fonction de tendance en 1974:3 puisqu'elle n'introduit pas suffisamment de flexibilité dans la spécification de la composante déterministe en supposant seulement qu'elle est linéaire par morceaux.*

A ce stade nous pouvons donc suggérer qu'il est possible de trouver une spécification suffisamment flexible de la composante déterministe du PIB réel qui nous permette de rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire sur la période 1963:3-1985:4 sous l'hypothèse d'exogénéité du premier choc pétrolier. Sous cette configuration, les chocs aléatoires frappant le PIB réel ont tous un effet transitoire sur la série qui tend ensuite à rejoindre son sentier d'équilibre de long terme, sauf le premier choc pétrolier qui lui a un effet permanent. Il va sans dire que cette conclusion dépend de l'hypothèse suivant laquelle le premier choc pétrolier n'est pas une réalisation du processus sous-jacent engendrant la série du PIB réel et peut être considéré comme exogène. Nous pourrions alors attribuer la racine unitaire détectée sur la période globale à ce choc structurel majeur. Dans le cadre d'analyse univarié purement descriptif dans lequel nous sommes cette hypothèse nous semble acceptable pour fournir une approximation empirique utile du vrai processus engendrant la série du PIB réel (Graphique 1).

Lorsque nous avons découpé la seconde sous-période 1974:4-1985:4 en deux sous-périodes de part et d'autre du second choc pétrolier, en supposant que la composante déterministe du PIB réel en base 1970 suit une tendance linéaire par morceaux et que le second choc pétrolier est exogène, nous avons constaté une baisse sensible du coefficient estimé $\tilde{\rho}$ et nous avons pu

rejeter l'hypothèse nulle d'une racine unitaire sur la sous-période 1974:4-1980:1 et 1980:2-1985:4 à des seuils relativement satisfaisants étant donné la faible puissance des tests sur des échantillons de taille aussi réduite (Graphique 2). La procédure de test de PERRON nous a permis de confirmer ce résultat avec encore plus de vigueur sur la sous-période 1963:3-1980:1 avec rupture de la fonction de tendance en 1974:3 et la sous-période 1974:4-1985:4 avec rupture de la fonction de tendance en 1980:1 (Graphique 3).

Nous disposons donc maintenant de deux spécifications non linéaires différentes de la composante déterministe du log du PIB réel permettant de rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire sur la sous-période 1974:4-1985:4 : une spécification polynomiale d'ordre 3 et une spécification linéaire par morceaux sous l'hypothèse supplémentaire suivant laquelle le second choc pétrolier peut être considéré comme exogène. Peut-on privilégier l'un de ces modèles par rapport à l'autre ? Nous disposons d'un critère de choix, qui même s'il n'est pas formalisé, permet de suggérer une réponse à cette question : ce critère, comme le suggère PERRON, est la rareté des chocs majeurs pouvant être considérés comme exogènes. En effet nous pourrions privilégier le modèle de la tendance polynomiale parce qu'il est conditionné par l'hypothèse que seul le premier choc pétrolier est exogène alors que le modèle de la tendance linéaire par morceaux nécessite l'hypothèse supplémentaire suivant laquelle le second choc pétrolier est aussi exogène.

Par ailleurs nous pourrions aussi dire qu'il est suffisant de postuler que seul le premier choc pétrolier est exogène étant donné que la spécification cubique de la composante déterministe nous permet alors de rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire sur la période considérée. Nous pourrions interpréter ce résultat de la manière suivante : le premier choc pétrolier semble avoir eu un effet plus important que celui du second choc pétrolier puisque nous arrivons, sans supposer de rupture de la fonction de tendance, à rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire sur la période 1974:4-1985:4 alors que l'hypothèse de rupture de la fonction de tendance semble requise pour trouver une spécification permettant de rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire sur la période 1963:3-1985:4.

5.2 Log du PIB réel marchand CVS aux prix de 1980.

Les résultats obtenus sur le log du PIB réel marchand CVS en base 1980 peuvent être décomposés en deux groupes : dans le premier groupe que nous appellerons le groupe comparatif figurent les résultats obtenus sur les sous-périodes déterminées pour la série en base 1970 et pour lesquelles nous disposons également de la série en base 1980. Nous pourrions donc comparer directement ces résultats avec ceux obtenus sur la série en base 1970 ce qui nous permettra d'évaluer leur robustesse par rapport au changement de base. Dans le second groupe que nous appellerons le groupe spécifique figurent les résultats obtenus sur les périodes ou sous-périodes s'étendant jusqu'en 1989:4 et intégrant donc l'information supplémentaire dont nous disposons.

5.2.1 Groupe comparatif.

Les résultats obtenus sur la série du log du PIB réel en base 1980 confirment en général les résultats précédents. Ainsi sur la sous-période 1974:4-1985:4, on a constaté que les procédures de test DF et PP n'ont pas permis de rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire. Cependant la procédure de test OPP nous a indiqué que ce non rejet pouvait être dû à la mauvaise spécification de la composante déterministe puisque l'hypothèse nulle de la racine unitaire a pu être largement rejetée au profit de l'hypothèse de stationnarité en écarts à une tendance déterministe polynomiale d'ordre 3. Le PIB réel en base 1980 suivrait donc un processus TS(3) sur cette sous-période tout comme le PIB réel en base 1970 ce qui indique la robustesse des résultats obtenus (Graphique 4).

Lorsque nous avons découpé cette sous-période de part et d'autre du second choc pétrolier en supposant que celui-ci est exogène, l'hypothèse nulle de la racine unitaire a pu être rejetée sur la sous-période 1974:4-1980:1, mais n'a pas pu l'être sur la sous-période 1980:2-1985:4 contrairement à ce que l'on a constaté pour la série en base 1970 où elle avait pu être rejetée, certes au seuil de 10%. Nous nous sommes alors demandé si ce résultat pouvait s'expliquer par le changement de base et l'adoption d'une méthodologie légèrement différente appliquée à l'évaluation du PIB réel en Comptabilité Nationale qui l'accompagne (Graphique 5). Cependant la procédure de test de PERRON nous a permis de la rejeter largement sur la période 1974:4-1985:4 avec rupture de la fonction de tendance en 1980:1. Ceci suggère que le non rejet précédent est sans doute dû à la faible puissance des tests DF et PP dans des échantillons de petite taille et nous permet d'atteindre finalement des résultats cohérents sur la période considérée en base 1970 et 1980 (Graphique 6).

5.2.2 Groupe spécifique.

Lorsque la série du log du PIB réel marchand CVS en base 1980 est analysée sur la période globale sur laquelle elle est disponible, c'est-à-dire 1970:3-1989:4, nous avons constaté comme pour le PIB réel en base 1970, que l'hypothèse nulle de la racine unitaire ne peut être rejetée en utilisant les procédures de test DF, PP et OPP (Graphique 7).

Le log du PIB réel en base 1980 suivrait d'après les procédures de test DF et PP un processus DS avec dérive sur la période 1970:3-1989:4 : il serait caractérisé par une non stationnarité de nature mixte : déterministe et stochastique, les écarts par rapport à la tendance déterministe linéaire étant stationnaires en différences premières. *Nous avons cependant souligné que ce résultat ne signifiait pas forcément que la spécification linéaire de la composante déterministe était adéquate. En effet la stratégie de HENIN et JOBERT même reconsidérée ne permet aucunement de l'affirmer et il se peut qu'une spécification polynomiale d'ordre supérieure soit plus appropriée aussi bien sous l'hypothèse nulle que sous l'hypothèse alternative d'autant plus que, comme le montrent OULIARIS, PARK et PHILLIPS (1989) et PERRON (1991), la mauvaise spécification de la composante déterministe peut nous conduire à accepter à tort l'hypothèse nulle de la racine unitaire.* Cependant les résultats des tests de la procédure OPP nous

ont indiqué que tel n'était pas le cas pour le PIB réel en base 1980 puisque nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire en spécifiant une tendance polynomiale d'ordre 3 qui semble, en l'occurrence, être la spécification adéquate pour la composante déterministe. *Le log du PIB réel en base 1980 serait ainsi $I(1)$ et suivrait une tendance cubique, autrement dit les écarts par rapport à la tendance déterministe cubique seraient stationnaires en différences premières. Ce résultat permet d'affiner le résultat obtenu précédemment en introduisant une non linéarité en espérance mathématique dont les procédures de test DF et PP ne pouvaient tenir compte, sans toutefois remettre en cause la nature de la non stationnarité caractérisant le PIB réel en base 1980 qui est toujours mixte : déterministe et stochastique.* Par ailleurs il n'est pas non plus en contradiction avec celui obtenu sur le PIB réel en base 1970 et permet également de l'affiner étant donné l'information supplémentaire qu'elle intègre concernant la reprise de l'économie à la suite du contre-choc pétrolier et de la chute du dollar. *Par conséquent on pourrait dire que "l'hypothèse nulle acceptée" est ici celle de la décélération suivie d'une accélération de la croissance qui semble avoir débuté dans les années 80.*

Sur la sous-période suivant le premier choc pétrolier c'est-à-dire 1974:4-1989:4, les procédures de test DF et PP n'ont pas permis le rejet de l'hypothèse nulle de la racine unitaire. Mais la procédure de test OPP nous a indiqué encore une fois que ce non rejet pouvait être dû à la spécification linéaire de la composante déterministe imposée par les procédures de test DF et PP. En effet lorsque nous avons spécifié une tendance polynomiale d'ordre 3 pour cette composante, l'hypothèse nulle de la racine unitaire a pu être largement rejetée. *Par conséquent le log du PIB réel en base 1980 suivrait sur la période 1974:4-1989:4 un processus TS stationnaire en écarts à une tendance déterministe polynomiale d'ordre 3 et serait donc caractérisé par une non stationnarité de nature purement déterministe.* Notons l'extrême robustesse de ce résultat puisque nous l'avons également atteint pour la série en base 1970 ainsi que pour la série en base 1980 sur la période 1974:4-1985:4 (Graphique 8).

Cependant les découpages effectués sur la période 1974:4-1989:4 pour la série en base 1980 sont malheureusement loin de fournir des résultats aussi nets que ceux obtenus sur la série en base 1970. En effet sur la sous-période 1980:2-1989:4, les procédures de test DF et PP n'ont pas permis de rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire. Le log du PIB réel serait sur cette sous-période intégré d'ordre 1 et suivrait une tendance quadratique. La procédure de test OPP a permis de confirmer ce résultat qui ne serait donc pas dû à la mauvaise spécification de la composante déterministe de la série. Nous avons vu que nous pouvions interpréter ce résultat de la manière suivante : la série des taux de croissance du PIB réel en base 1980 suit sur la période considérée une tendance linéaire dont la pente est significativement positive, *en d'autres termes "l'hypothèse nulle acceptée" est celle d'une accélération constante de la croissance sur la période considérée contrairement à ce que l'on avait observé sur la période 1963:3-1985:4 en base 1970.*

A la suite de ces deux types de résultats il n'est pas surprenant que la procédure de test de PERRON n'ait pas permis de rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire sur la période 1974:4-1989:4 avec rupture de la fonction de tendance en 1980:1. D'une part le fait qu'elle ne

permet pas d'intégrer une flexibilité suffisante de la composante déterministe en supposant qu'elle est linéaire par morceaux, d'autre part le non rejet de l'hypothèse nulle de la racine unitaire sur la sous-période 1980:2-1989:4 qui n'est apparemment pas dû à une mauvaise spécification de cette composante le laissaient pressentir (Graphique 9).

L'inspection du graphique du log du PIB réel en base 1980 nous a ensuite suggéré que le contre-choc pétrolier jouait peut être un rôle dans la non linéarité de la composante déterministe. Nous avons donc découpé la période 1980:2-1989:4 en faisant dans ce but l'hypothèse heuristique suivant laquelle le contre-choc pétrolier peut être considéré comme exogène. Mais nous n'avons pas pu rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire sur les sous-périodes débutant en 1980:2 et s'étendant jusqu'en 1987:1 ainsi que sur les sous-périodes finales correspondantes. Il faut signaler que la taille de l'échantillon pour ces dernières est extrêmement réduite, ceci empêchant de tirer une conclusion fiable des tests effectués (Graphique 10).

Nous avons alors appliqué la procédure de test de PERRON qui nous a fourni des résultats assez difficiles à interpréter : l'hypothèse nulle de la racine unitaire a pu être rejetée sur la sous-période 1980:2-1987:1 avec une rupture de la fonction de tendance en 1980:1 au profit de l'hypothèse alternative de stationnarité en écarts à une tendance linéaire par morceaux, mais elle n'a pas pu être rejetée sur la sous-période 1980:2-1989:4 avec rupture de la fonction de tendance en 1987:1. Ce résultat paradoxal peut vraisemblablement être attribué à la petite taille de l'échantillon dans cette sous-période (Graphique 11). Toujours est-il que globalement les résultats obtenus sur la série en base 1980 sur la période 1980:2-1989:4 ne présentent pas une image aussi nette que ceux obtenus sur la série en base 1970 sur la période 1963:3-1985:4.

Nous disposons néanmoins pour la série en base 1980 d'une spécification polynomiale d'ordre 3 de la composante déterministe permettant le rejet de l'hypothèse nulle de la racine unitaire sur la période 1974:4-1989:4 suivant le premier choc pétrolier sous l'hypothèse que celui-ci n'est pas une réalisation du processus sous-jacent engendrant la série et qu'il peut par conséquent être considéré comme exogène. Nous ne disposons malheureusement pas d'assez d'observations sur la sous-période précédent le premier choc pétrolier en base 1980 pour pouvoir tester l'hypothèse nulle de la racine unitaire de manière fiable, mais nous avons vu que la spécification linéaire de la composante déterministe permettait de la rejeter sur la sous-période 1963:3-1974:3 en base 1970. Sous cette configuration, les chocs aléatoires frappant le PIB réel ont tous un effet transitoire sur la série qui tend ensuite à rejoindre son sentier d'équilibre de long terme, sauf le premier choc pétrolier qui lui a un effet permanent. Rappelons que pour la série en base 1970 nous disposions de deux spécifications non linéaires permettant le rejet de l'hypothèse nulle de la racine unitaire sur la période 1974:4-1985:4 et que nous avons finalement opté pour la spécification polynomiale d'ordre 3 sur la base de la minimisation du nombre de chocs pouvant être considérés comme exogènes. Encore une fois cette conclusion dépend évidemment de l'hypothèse d'exogénéité du premier choc pétrolier.

Conclusion

Qu'en est-il de la nature de la non stationnarité caractérisant le PIB réel ? La réponse à cette question est délicate et nous sommes confrontés à un dilemme : si nous rejetons l'hypothèse suivant laquelle le premier choc pétrolier est exogène, alors nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire et la non stationnarité caractérisant le PIB réel est de nature mixte. Les chocs aléatoires frappant le PIB réel ont tous un effet permanent sur la série. Si nous pensons que l'hypothèse suivant laquelle le premier choc pétrolier est exogène est admissible, alors il est possible de trouver une spécification suffisamment flexible de la composante déterministe permettant de rejeter l'hypothèse nulle de la racine unitaire et la non stationnarité caractérisant le PIB réel est de nature purement déterministe. Les chocs aléatoires frappant le PIB réel ont un effet transitoire sauf le premier choc pétrolier qui lui a un effet permanent.

Dans le cadre d'analyse univarié descriptif extrêmement restreint dans lequel nous nous situons, travaillant sur des modèles qui peuvent être considérés comme des formes réduites, nous ne pouvons et ne voulons suggérer rien d'autre que la possibilité de trouver une spécification non linéaire suffisamment fine de la composante déterministe qui puisse permettre le rejet de l'hypothèse nulle de la racine unitaire sous l'hypothèse suivant laquelle le premier choc pétrolier est exogène au profit de l'hypothèse alternative de stationnarité en écarts à la composante déterministe. *Nous pensons que ce résultat constitue une alternative intéressante à l'hypothèse de la racine unitaire fortement étayée dans la littérature empirique, susceptible de fournir une approximation empirique utile du vrai processus engendrant les données.* Nous avons par ailleurs vérifié empiriquement que dans certains cas le non rejet de l'hypothèse nulle de la racine unitaire peut être dû à la mauvaise spécification de la composante déterministe de la série considérée suivant en cela les travaux théoriques de OULIARIS, PARK et PHILLIPS (1989), PERRON (1989b, 1991). *Nous n'avons bien sûr analysé qu'une seule série chronologique macroéconomique : celle du PIB réel (bien que dans deux bases différentes) mais nos résultats sont de nature à mettre en cause ceux obtenus dans la littérature empirique sous le postulat de linéarité de la composante déterministe.*

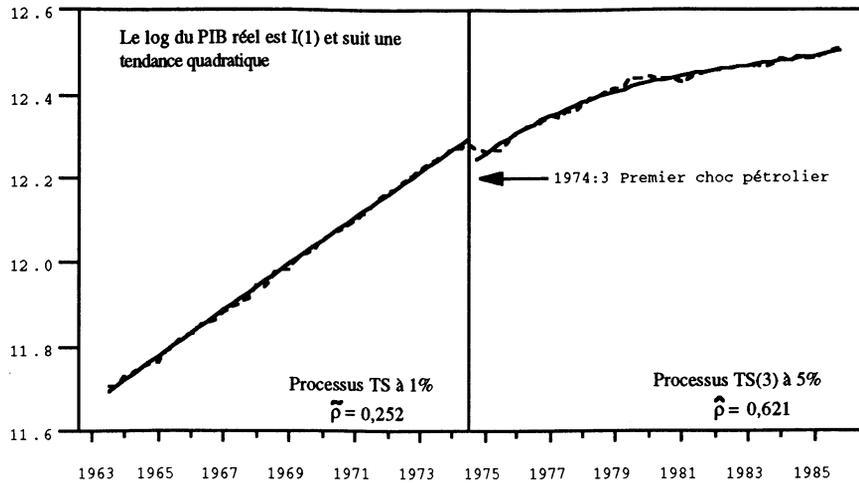
Deux études sont par ailleurs en cours : la première porte sur la comparaison des puissances respectives des tests de DICKEY et FULLER (1979) et des tests de OULIARIS, PARK et PHILLIPS (1989) dans des échantillons de taille finie par des expériences de Monte-Carlo, lorsque le vrai processus engendrant les données est stationnaire en écarts à une tendance polynomiale. Ceci nous permettra d'apprécier le danger que représente la mauvaise spécification de la composante déterministe dans de tels échantillons et de rechercher si des situations conflictuelles rencontrées dans des études empiriques comme le non rejet de l'hypothèse nulle par le test individuel de type t et le rejet par le test joint Φ_3 de DICKEY et FULLER¹⁰ peuvent être liées à la spécification linéaire de la composante déterministe imposée par cette procédure¹¹.

¹⁰ Comme par exemple les situations rencontrées dans le thèse de ERTUR (1992) pour le PIB réel marchand en base 1970 sur la période 1963:3-1985:4 (Tableau 5.3, p.186-187) et pour le PIB réel marchand en base 1980 sur la période 1980:2-1989:4 (Tableau 5.18, p.204-205).

¹¹ Comme nous l'avons suggéré dans notre thèse à la suite de HALDRUP (1990, p.26-27).

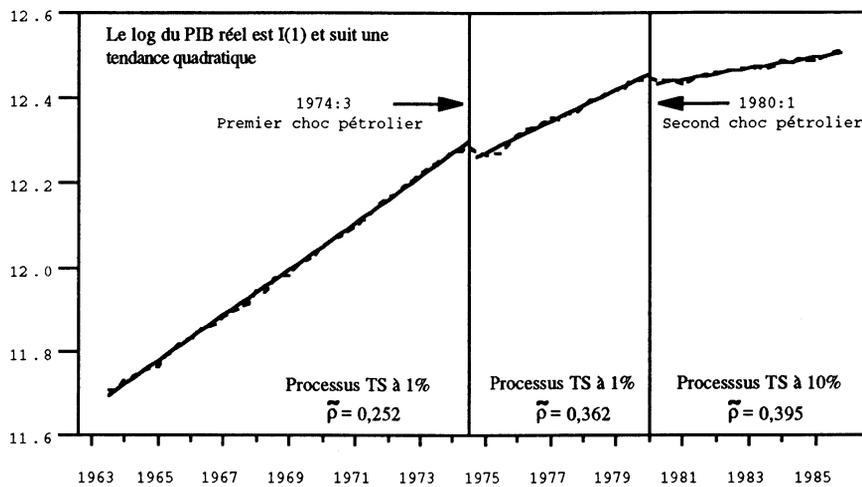
La seconde étude porte sur la procédure de test de SCHMIDT et PHILLIPS (1989) qui critiquent l'utilisation du modèle avec constante et tendance de DICKEY et FULLER [modèle (3)] pour tester l'hypothèse nulle de la racine unitaire contre l'hypothèse alternative de stationnarité en écarts à une tendance déterministe linéaire. En effet les tests fondés sur ce modèle ne permettraient pas de discriminer un processus DS d'un processus TS, parce que les distributions des statistiques utilisées dépendent de b , le paramètre de tendance, et que ce modèle ne permet la présence de la tendance linéaire sous l'hypothèse alternative qu'en incluant une variable superflue sous l'hypothèse nulle de la racine unitaire puisque sous cette hypothèse $b = 0$, ce qui d'après eux résulte en une perte de puissance dans des échantillons de taille finie. Ils proposent ainsi une paramétrisation différente du modèle (3) analogue à celle adoptée par BHARGAVA (1986) et définissent un test fondé sur le principe du multiplicateur de Lagrange qui ne dépend pas du paramètre de nuisance qu'est b dans la procédure de test de DICKEY et FULLER. Il apparaît d'après leurs expériences de simulation que les tests fondés sur les nouvelles statistiques qu'ils proposent sont effectivement plus puissants que ceux fondés sur les statistiques de DICKEY et FULLER dans le cadre du modèle (3). Ils étendent de plus leur procédure de test au cas où la composante déterministe suit une tendance polynomiale. Il serait donc intéressant d'appliquer la procédure de test de SCHMIDT et PHILLIPS au PIB réel marchand et de comparer les résultats à ceux que nous avons obtenus à l'aide des procédures de DICKEY et FULLER, PHILLIPS et PERRON et OULIARIS, PARK et PHILLIPS.

ANNEXE : GRAPHIQUES



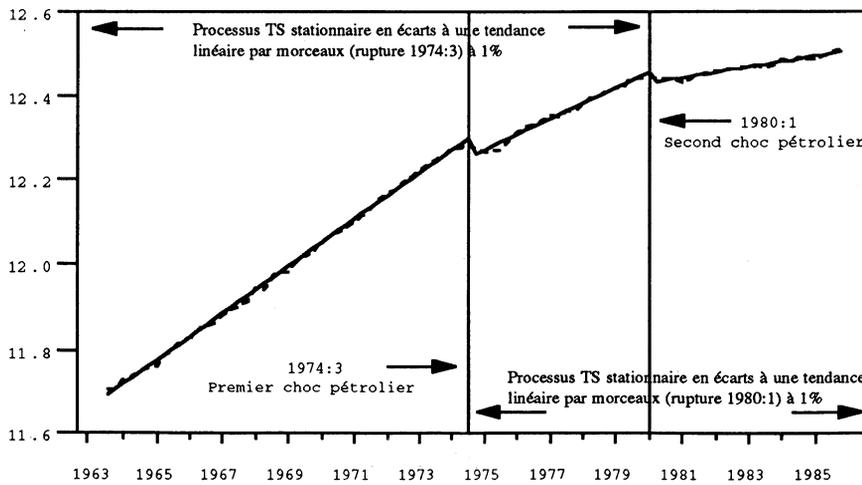
Graphique 1

Log du PIB réel marchand CVS au prix de 1970 sur la période 1963:3-1985:4



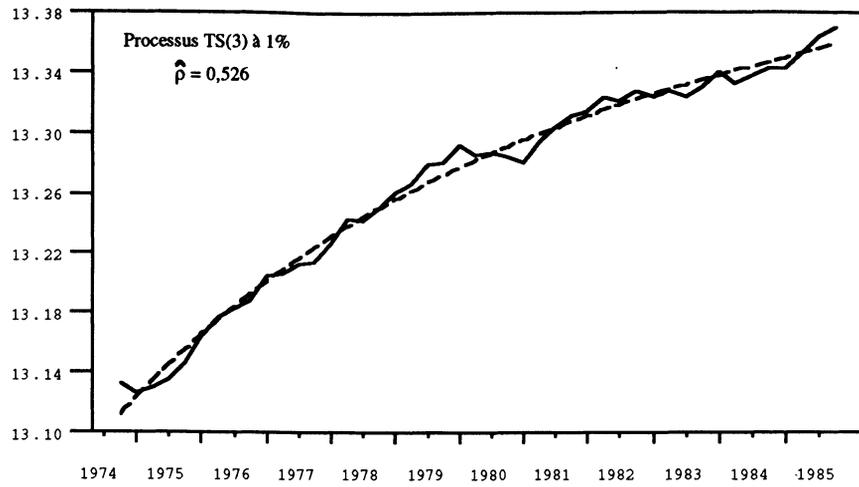
Graphique 2

Log du PIB réel marchand CVS aux prix de 1970 sur la période 1963:3-1985:4

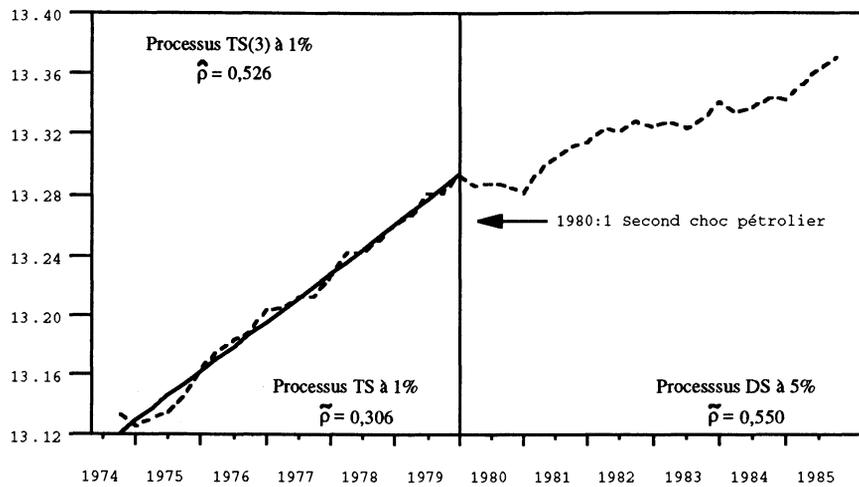


Graphique 3

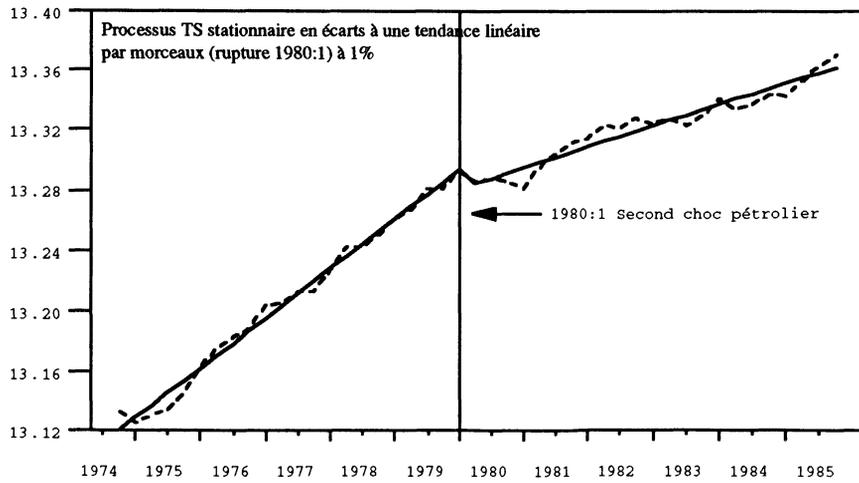
Log du PIB réel marchand CVS aux prix de 1970 sur la période 1963:3-1985:4 et estimations du modèle (C) : $\tilde{y}_t = \tilde{\alpha}_1^C + \tilde{\alpha}_2^C DU_t + \tilde{\alpha}_3^C t + \tilde{\alpha}_4^C DT_t$ sur les périodes 1963:3-1980:1 et 1974:4-1985:4.



Graphique 4
Log du PIB réel marchand CVS aux prix de 1980 sur la période 1974:4-1985:4

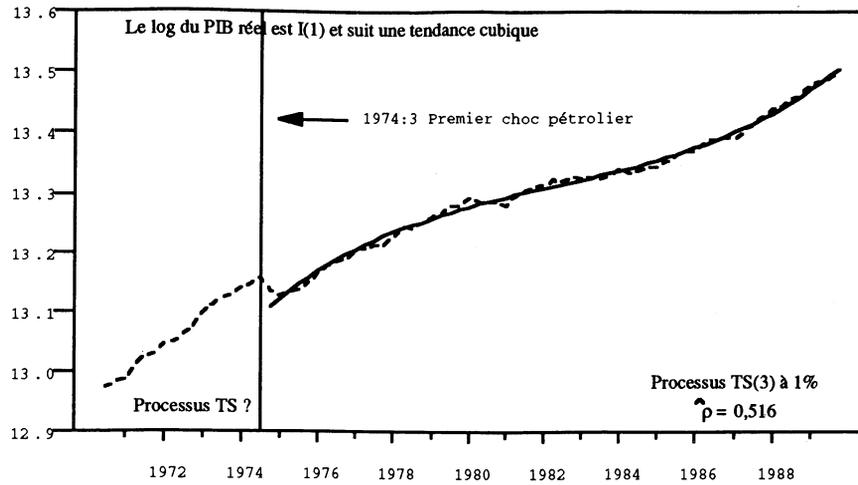


Graphique 5
Log du PIB réel marchand CVS aux prix de 1980 sur la période 1974:4-1985:4

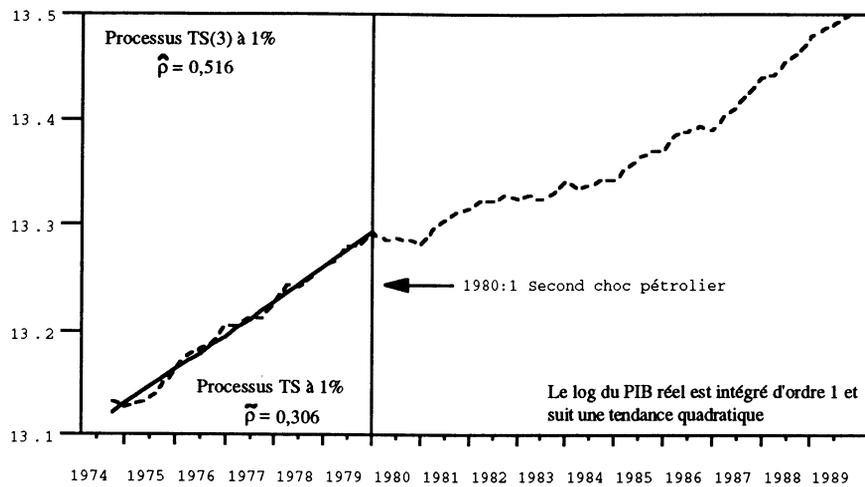


Graphique 6
Log du PIB réel marchand CVS aux prix de 1980 sur la période 1974:4-1985:4 et estimation du modèle (C) :

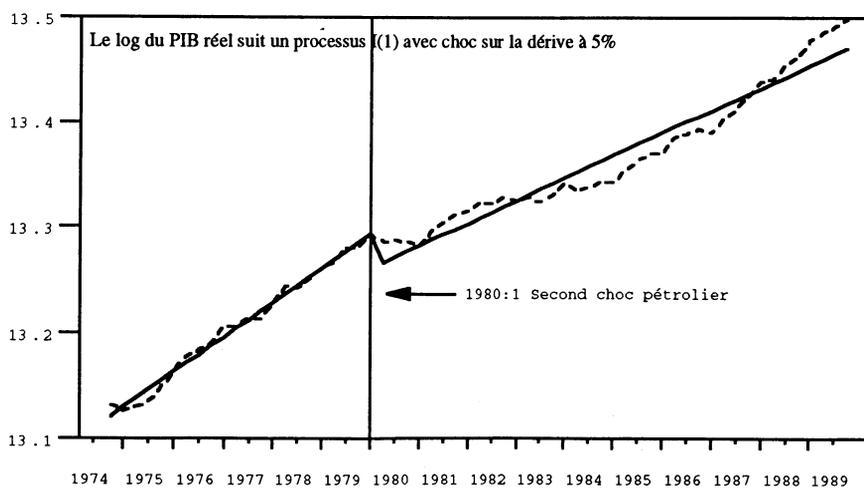
$$\tilde{y}_t = \tilde{\alpha}_1^C + \tilde{\alpha}_2^C DU_t + \tilde{\alpha}_3^C t + \tilde{\alpha}_4^C DT_t$$



Graphique 7
Log du PIB réel marchand CVS aux prix de 1980 sur la période 1970:3-1989:4

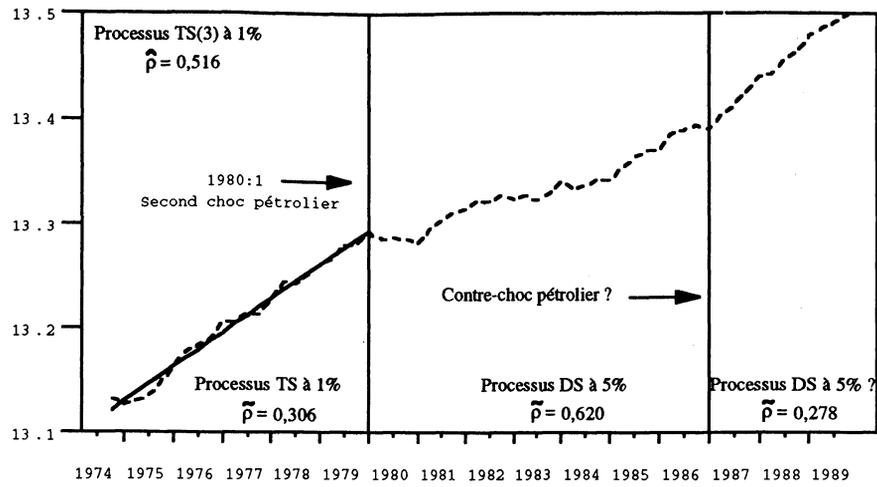


Graphique 8
Log du PIB réel marchand CVS aux prix de 1980 sur la période 1974:4-1989:4



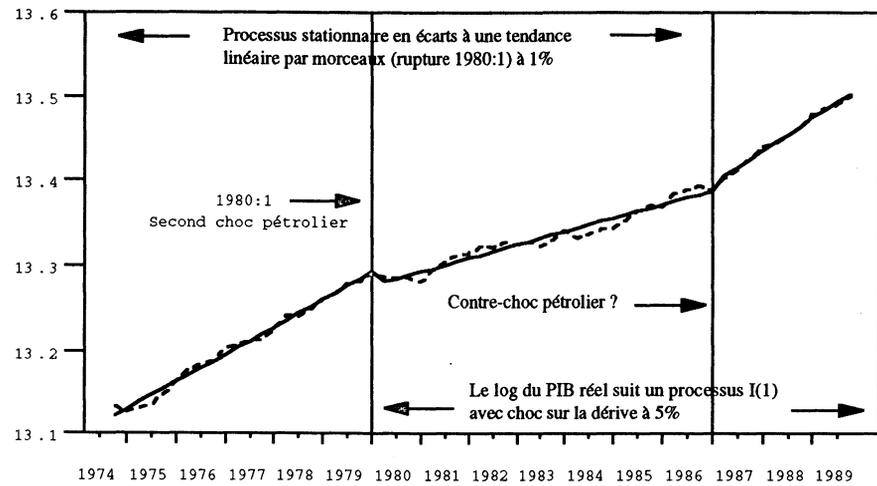
Graphique 9
Log du PIB réel marchand CVS aux prix de 1980 sur la période 1974:4-1989:4 et estimation du modèle (C) :

$$\tilde{y}_t = \tilde{\alpha}_1^C + \tilde{\alpha}_2^C DU_t + \tilde{\alpha}_3^C t + \tilde{\alpha}_4^C DT_t$$



Graphique 10

Log du PIB réel marchand CVS aux prix de 1980 sur la période 1974:4-1989:4



Graphiques 11

Log du PIB réel marchand CVS aux prix de 1980 sur la période 1974:4-1989:4 et estimations du modèle (C) :

$$\tilde{y}_t = \tilde{\alpha}_1^C + \tilde{\alpha}_2^C DU_t + \tilde{\alpha}_3^C t + \tilde{\alpha}_4^C DT_t \text{ sur les périodes } 1974:4-1987:1 \text{ et } 1980:2-1989:4$$

Références bibliographiques.

- Bhargava, A. (1986) "On the Theory of Testing for Unit Roots in Observed Time Series." *Review of Economic Studies*, 53, p.369-384.
- Billingsley, P. (1968) *Convergence of Probability Measures*. John Wiley, New-York, 253 p.
- Box, G.E.P. et G.M. Jenkins (1976) *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. Holden Day, San Francisco (édition révisée).
- Box, G.E.P. et G.C. Tiao (1975) "Intervention Analysis with Applications to Economic and Environmental Problems." *Journal of the American Statistical Association*, 70, p.70-79.
- Campbell, J.Y. et P. Perron (1991) "Pitfalls and Opportunities : What Macroeconomists Should Know about Unit Roots." *Econometric Research Program, Research Memorandum n°360*, Princeton University.
- Chan, K.H., Hayya J.C. et J.K. Ord (1977) "A Note on Trend Removal Methods : the Case of Polynomial Regression versus Variate Differencing." *Econometrica*, 45, p.737-744.
- Christiano, L.J. (1988) "Searching for Breaks in GNP." *National Bureau of Economic Research Working Paper n°2695*.
- Dickey, D.A. (1976) *Estimation and Hypothesis Testing for Non Stationary Time Series*. Doctorat, Iowa State University.
- Dickey, D.A. et W.A Fuller (1979) "Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root" *Journal of the American Statistical Association*, 74, p.427-431.
- Dickey, D.A. et W.A Fuller (1981) "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root." *Econometrica*, 49, p.1057-1072.
- Dickey, D.A., W.R. Bell et R.B. Miller (1986) "Unit Roots in Time Series Models : Tests and Implications." *The American Statistician*, 40, p.12-26.
- Ertur, K.C. (1991) "Une stratégie de test de la racine unitaire", Document de travail IME n° 9104, Université de Bourgogne.
- Ertur, K.C. (1992) *Tests de Non Stationnarité : Application aux PIB réel*. Thèse de Doctorat, Université de Bourgogne, 351p.
- Fuller, W.A. (1976) *Introduction to Statistical Time Series*, John Wiley, New-York, 470 p.
- Haldrup, N. (1990) "Tests for Unit Root with Maintained Trend when True Data Generating Process is a Random Walk with Drift." Document de travail n°1990-22, Institute of Economics, University of Aarhus, 53 p.
- Hannan, E.J. (1980) "The Estimation of the Order of an ARMA process." *Annals of Statistics*, 8, p.1071-1081.



- Henin, P.Y. (1989a) "Une macroéconomie sans monnaie pour les années 1990 ? Revue critique des travaux théoriques et empiriques sur les cycles réels." *Revue d'Economie Politique*, n°4, p.531-596.
- Henin, P.Y. (1989b) "Bilan et essai sur la non-stationnarité des séries macroéconomiques : tendances, cycles et persistance." *Revue d'Economie Politique*, n°5, p.661-691.
- Henin, P.Y. et T. Jobert (1990) "Persistance du chômage et hystérèse : une étude comparative." in *Association d'Econométrie Appliquée : Modélisation du marché du travail. Actes du Colloque I*, Strasbourg : 5, 6 et 7 décembre 1990, p.235-250.
- Kydland, F. et E.C. Prescott (1982) "Time to Build and Aggregate Fluctuations." *Econometrica*, 50, p.1345-1370.
- Long, J.B. et C. Plosser (1983) "Real Business Cycles." *Journal of Political Economy*, 91, p.39-69.
- Lordon, F. (1992) "Théorie de la croissance : quelques développements récents. Première partie : la croissance cyclique", Observations et Diagnostics Economiques, Revue de l'OFCE, n°36, p.159-211.
- Lucas, R.E (1981) *Studies in Business Cycle Theory*, Cambridge, MIT Press.
- Lucas, R.E (1972) "Expectations and Neutrality of Money", *Journal of Economic Theory*, 4, p.103-124.
- Lucas, R.E. (1973) "Some International Evidence on Output Inflation Tradeoffs." *American Economic Review*, 63, p.326-334.
- Modigliani, F. (1977) "The monetarist Controversy or, Should We Forsake Stabilization Policies" *American Economic Review*, Vol. 67, n° 2, p.1-19.
- Nelson, C.R. et C.I. Plosser (1982) "Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series : Some Evidence and Implications." *Journal of Monetary Economics*, 10, p.139-162.
- Nelson, C.R. et H. Kang (1981) "Spurious Periodicity in Inappropriately Detrended Time Series." *Econometrica*, 49, p.741-751.
- Nelson, C.R. et H. Kang (1984) "Pitfalls in the Use of Time as an Explanatory Variable in Regression." *Journal of Business and Economic Statistics*, 2, p.73-82.
- Newey, N.K. et K.D. West (1987) "A Simple Positive Definite Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix." *Econometrica*, 55, p.703-708.
- Ouliaris, S., J.Y. Park, et P.C.B. Phillips (1989) "Testing for a Unit Root in the Presence of a Maintained Trend." in *Advances in Econometrics and Modeling*, B. Raj eds., Kluwer Academic Publishers, Needham MA.
- Perron, P. (1986) *Hypothesis Testing in Time Series Regression with a Unit Root*. Doctorat, Yale University.

- Perron, P. (1988) "Trends and Random Walk in Macroeconomic Time Series : Further Evidence from a New Approach." *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, p.297-332.
- Perron, P. (1989) "The Great Crash, The Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis." *Econometrica*, 57, p.1361-1401.
- Perron, P. (1990) "Tests of Joint Hypothesis for Time Series Regression with a Unit Root." in *Advances in Econometrics*, vol. 8, p.135-159, T.B. Fomby et G.F. Rhodes eds., JAI Press Inc., Greenwich, Connecticut.
- Perron, P. (1991) "Racines unitaires en Macroéconomie : le cas d'une variable." Document de Travail, Princeton University et Centre de Recherche et Développement en Economique, Université de Montréal, à paraître dans *Actualité Economique*.
- Phillips, P.C.B (1987) "Time Series Regression with a Unit Root." *Econometrica*, 55, p.277-301.
- Phillips, P.C.B et P. Perron (1988) "Testing for a Unit Root in Time Series Regression." *Biometrika*, 75, p.347-353.
- Rappoport, P. et L. Reichlin (1989) "Segmented Trends and Non Stationary Time Series." *Economic Journal*, 99, Conference 1989, p.168-177 et European University Institute, Department of Economics, working paper n°87/319, Florence.
- Said, S.E. et D.A. Dickey (1984) "Testing for Unit Roots in Autoregressive Moving Average Models of Unknown Order." *Biometrika*, 71, p.599-607.
- Schmidt, P. et P.C.B. Phillips (1989) "Testing for Unit Root in the Presence of Deterministic Trends." Cowles Foundation Discussion Paper n°933, Yale University.
- Schwarz, G. (1978) "Estimating the Dimension of a Model." *Annals of Statistics*, 6, p.461-464.
- Stulz, R.M. et W. Wasserfallen (1985) "Macroeconomic Time Series, Business Cycles and Macroeconomic Policy." in *Carnegie Rochester Conference Series on Public Policy*, 22, p.9-54.
- West, K.D. (1987) "A Note on the Power of Least Square Tests for a Unit Root." *Economic Letters*, 24, p.249-252.

PROCESSUS TS LINÉAIRES	PROCESSUS DS DU PREMIER ORDRE	
<p>◆ Non stationnaire en espérance math.</p> $y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t \quad A(L)\varepsilon_t = B(L)u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2)$ <p>◆ Exemple : tendance linéaire et bruit blanc.</p> $y_t = \alpha + \beta t + u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2)$ $E(y_t) = \alpha + \beta t, \quad V(y_t) = \sigma_u^2 \quad \forall t$ $\text{cov}(y_t, y_s) = 0 \quad \forall t, \forall s, t \neq s$ <p>L'esp. math. suit une tendance linéaire. La variance est constante.</p> <p>◆ Non stationnarité de nature purement déterministe.</p> <p>◆ Stationnaire en écarts à la tendance linéaire.</p> <p>◆ Prévision : $\hat{y}_{T+k} = \alpha + \beta(T+k) = y_T + k\beta$ Variance de l'erreur de prévision : σ_u^2 ⇒ Incertitude à long terme restreinte.</p> <p>◆ L'effet de chocs aléatoires frappant l'économie est transitoire. La série tendra ensuite à rejoindre son sentier de croissance de long terme.</p>	<p>◆ Non stationnaire en espérance math. ◆ Non stationnaire en variance.</p> $\Delta y_t = \beta + v_t \quad C(L)v_t = D(L)u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2)$ $y_t = y_0 + \beta t + \sum_{i=1}^t v_i \quad y_0 \text{ fixé}$ <p>◆ Exemple : marche au hasard avec dérive.</p> $\Delta y_t = \beta + u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2)$ $y_t = \beta + y_{t-1} + u_t$ $y_t = y_0 + \beta t + \sum_{i=1}^t u_i$ <p style="text-align: center;">↑ tendance stochastique</p> $E(y_t) = y_0 + \beta t, \quad V(y_t) = t \sigma_u^2 \quad \forall t$ $\text{cov}(y_t, y_s) = \sigma_u^2 \min(t, s) \quad \forall t, \forall s, t \neq s$ <p>L'esp. math. suit une tendance linéaire. La variance suit une tendance linéaire.</p> <p>◆ Non stationnarité de nature mixte : déterministe et stochastique.</p> <p>◆ Stationnaire en différences premières.</p> <p>◆ Prévision : $\hat{y}_{T+k} = y_T + k\beta$ Variance de l'erreur de prévision : $k\sigma_u^2$ ⇒ Incertitude à long terme non restreinte.</p> <p>◆ L'effet de chocs aléatoires frappant l'économie est permanent. La série ne retournera pas sur la tendance linéaire déterministe (Mémoire infinie, persistance).</p>	<p>◆ Non stationnaire en variance.</p> $\Delta y_t = v_t \quad C(L)v_t = D(L)u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2)$ $y_t = y_0 + \sum_{i=1}^t v_i \quad y_0 \text{ fixé}$ <p>◆ Exemple : marche au hasard sans dérive.</p> $\Delta y_t = u_t \quad u_t \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma_u^2)$ $y_t = y_{t-1} + u_t$ $y_t = y_0 + \sum_{i=1}^t u_i$ <p style="text-align: center;">↑ tendance stochastique</p> $E(y_t) = y_0, \quad V(y_t) = t \sigma_u^2 \quad \forall t$ $\text{cov}(y_t, y_s) = \sigma_u^2 \min(t, s) \quad \forall t, \forall s, t \neq s$ <p>L'esp. math. est constante. La variance suit une tendance linéaire.</p> <p>◆ Non stationnarité de nature purement stochastique</p> <p>◆ Stationnaire en différences premières.</p> <p>◆ Prévision : $\hat{y}_{T+k} = y_T$ Variance de l'erreur de prévision : $k\sigma_u^2$ ⇒ Incertitude à long terme non restreinte.</p> <p>◆ L'effet de chocs aléatoires frappant l'économie est permanent. La série ne reprendra pas sa valeur initiale (Mémoire infinie, persistance).</p>

ANNEXE : TABLEAU A

Hypothèses nulles testées	Statistiques transformées
Modèle (1)	
(1) $\rho = 1$	$Z(\rho^*) = T(\rho^* - 1) - (1/2)(\sigma_{\Pi}^{2*} - \sigma_u^{2*}) \left(T^{-2} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2 \right)^{-1}$
(2) $\rho = 1$	$Z(t_{\rho^*}) = (\sigma_u^* / \sigma_{\Pi}^*) t_{\rho^*} - (1/2)(\sigma_{\Pi}^{2*} - \sigma_u^{2*}) \left[\sigma_{\Pi}^* \left(T^{-2} \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2 \right)^{1/2} \right]^{-1}$
Modèle (2)	
(3) $\rho = 1$	$Z(\hat{\rho}) = T(\hat{\rho} - 1) - (1/2)(\widehat{\sigma}_{\Pi}^2 - \widehat{\sigma}_u^2) \left[T^{-2} \sum_{t=1}^T (y_{t-1} - \bar{y}_{(-1)})^2 \right]^{-1}$
(4) $\rho = 1$	$Z(t_{\hat{\rho}}) = (\widehat{\sigma}_u / \widehat{\sigma}_{\Pi}) t_{\hat{\rho}} - (1/2 \widehat{\sigma}_{\Pi}) (\widehat{\sigma}_{\Pi}^2 - \widehat{\sigma}_u^2) \left[T^{-2} \sum_{t=1}^T (y_{t-1} - \bar{y}_{(-1)})^2 \right]^{-1/2}$
(5) $c = 0, \rho = 1$	$Z(\Phi_1) = (\widehat{\sigma}_u^2 / \widehat{\sigma}_{\Pi}^2) \Phi_1 - (1/2 \widehat{\sigma}_{\Pi}^2) (\widehat{\sigma}_{\Pi}^2 - \widehat{\sigma}_u^2) \left\{ T(\hat{\rho} - 1) - (1/4) (\widehat{\sigma}_{\Pi}^2 - \widehat{\sigma}_u^2) \left[T^{-2} \sum_{t=1}^T (y_{t-1} - \bar{y}_{(-1)})^2 \right]^{-1} \right\}$
Modèle (3)	
(6) $\rho = 0$	$Z(\tilde{\rho}) = T(\tilde{\rho} - 1) - (T^6 / 24 D_X) (\widetilde{\sigma}_{\Pi}^2 - \widetilde{\sigma}_u^2)$
(7) $\rho = 0$	$Z(t_{\tilde{\rho}}) = (\widetilde{\sigma}_u / \widetilde{\sigma}_{\Pi}) t_{\tilde{\rho}} - (T^3 / 4\sqrt{3} D_X^{1/2}) (\widetilde{\sigma}_{\Pi}^2 - \widetilde{\sigma}_u^2)$
(8) $c = 0, b = 0, \rho = 0$	$Z(\Phi_2) = (\widetilde{\sigma}_u^2 / \widetilde{\sigma}_{\Pi}^2) \Phi_2 - (1/3 \widetilde{\sigma}_{\Pi}^2) (\widetilde{\sigma}_{\Pi}^2 - \widetilde{\sigma}_u^2) \left[T(\tilde{\rho} - 1) - (T^6 / 48 D_X) (\widetilde{\sigma}_{\Pi}^2 - \widetilde{\sigma}_u^2) \right]$
(9) $b = 0, \rho = 0$	$Z(\Phi_3) = (\widetilde{\sigma}_u^2 / \widetilde{\sigma}_{\Pi}^2) \Phi_3 - (1/2 \widetilde{\sigma}_{\Pi}^2) (\widetilde{\sigma}_{\Pi}^2 - \widetilde{\sigma}_u^2) \left[T(\tilde{\rho} - 1) - (T^6 / 48 D_X) (\widetilde{\sigma}_{\Pi}^2 - \widetilde{\sigma}_u^2) \right]$

où : $D_X = \det(X'X) = (T^2 / (T^2 - 1) / 12) \sum_{t=1}^T y_{t-1}^2 - T \left(\sum_{t=1}^T t y_{t-1} \right)^2 + T(T+1) \sum_{t=1}^T t y_{t-1} \sum_{t=1}^T y_{t-1} - (T(T+1)(2T+1) / 6) \left(\sum_{t=1}^T y_{t-1} \right)^2$

ANNEXE : TABLEAU B : Statistiques transformées de PHILLIPS et PERRON

Source : PERRON 1988, p.308-309

