



HAL
open science

Peut-on comprendre les fondamentaux de la relativité générale et de la mécanique quantique à partir des concepts de la résistance des matériaux ?

David Izabel

► To cite this version:

David Izabel. Peut-on comprendre les fondamentaux de la relativité générale et de la mécanique quantique à partir des concepts de la résistance des matériaux ?. 2017. <hal-01535955>

HAL Id: hal-01535955

<https://hal.science/hal-01535955v1>

Preprint submitted on 9 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Peut-on comprendre les fondamentaux de la relativité générale et de la mécanique quantique à partir des concepts de la résistance des matériaux ?

David Izabel

Ingénieur et professeur

d.izabel@aliceadsl.fr

Juin 2017

Résumé

La mécanique quantique, dans le monde de l'infiniment petit, est le règne de la quantification des énergies, et de la probabilité de présence de particule avec les fameuses fonctions d'onde ψ associées à l'équation de Schrödinger. La relativité générale, est quand a elle réservée à l'infiniment grand ou la matière, densité d'énergie $T_{\mu\nu}$ influence la courbure $G_{\mu\nu}$ de l'espace-temps à 4 dimensions et réciproquement. Enfin la résistance des matériaux est la mécanique des objets à échelle humaine (poutre, poteaux, plaques, coques) utilisée pour le dimensionnement des structures, a priori sans commune mesure avec ces deux grands piliers de la physique précédemment cités. Nous allons montrer en première partie de cet article que les résultats de la mécanique quantique (quantification d'énergie, forme de la fonction d'onde) sont analogues aux fréquences propres et modes propres de vibration de poutre. En deuxième partie nous montrerons sur des cas simples, que les concepts de courbure reliée à la densité d'énergie présente en relativité générale, sont également à la base des équations fondamentales de l'élasticité et de la résistance des matériaux. Nous montrerons également que le tenseur énergie impulsion écrit pour des vitesses non relativistes est une extension en 4 dimensions du tenseur des contraintes de la théorie de l'élasticité.

1^{ère} partie – mécanique quantique et vibration de poutre

1.1 Période propre et mode propre de vibration d'une poutre sur 2 appuis

Soit une poutre sur deux appuis simples, de portée L (m), réalisée à partir d'un matériau de module d'élasticité E (MPa), d'une section présentant une inertie I (m⁴) et une surface S (m²) présentant une masse par unité de longueur ($m=\rho S$) en kg/m. (cf. figure 1). [4]

La poutre en auto-vibration présente une déformée au cours du temps $y(x,t)$:

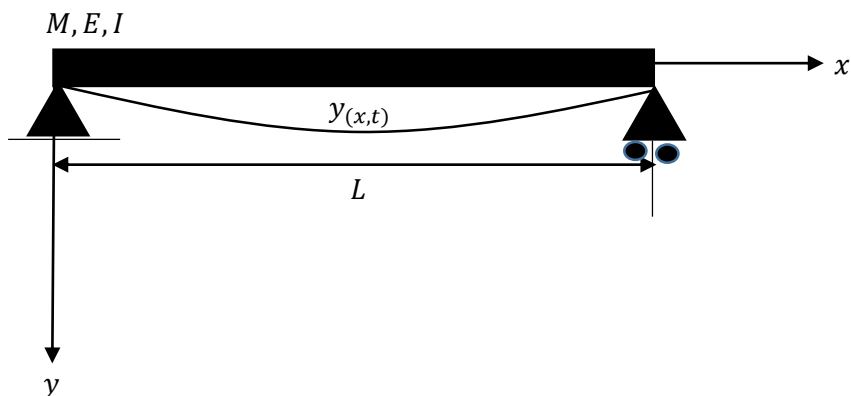


Figure 1 – Poutre sur 2 appuis sous son poids propre –

Nous pouvons écrire :

$$F = ma = m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = m \ddot{y}(x,t) \quad (1)$$

Par ailleurs, nous avons en reliant la courbure R (m) au moment de flexion $M_{(x,t)}$

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{M_{(x,t)}}{EI} \quad (2)$$

Sachant que :

$$\frac{\partial M_{(x,t)}}{\partial x} = V_{(x,t)} \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_{(x,t)}}{\partial x} = -q_{(x,t)} \quad (4)$$

Nous obtenons en dérivant deux fois par rapport à x l'équation (2) :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{M_{(x,t)}}{EI} \right) = \frac{-q_{(x,t)}}{EI} \quad (5)$$

Soit :

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = -q_{(x,t)} \quad (6)$$

En égalisant les équations (1) et (6) dans le cas de l'auto vibration, on obtient l'équation différentielle bien connue gérant l'auto-vibration d'une poutre sur 2 appuis :

$$m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} \quad (7)$$

Soit

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \left(\frac{m}{EI}\right) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

Si on pose $y(x,t) = q(t)\phi(x)$ (9)

En reportant dans l'équation (8) ci-dessus on obtient :

$$EIq(t)\phi^{IV}(x) + \rho S\ddot{q}(t)\phi(x) = 0 \quad (10)$$

On peut donc séparer les variables :

$$\frac{\phi^{IV}}{\phi} = -\frac{\rho S}{EI} \times \frac{\ddot{q}}{q} \quad (11)$$

Comme cette équation doit être vérifiée pour tout x ou t , les rapports ci-dessus doivent être constants.

On pose donc :

$$\frac{\phi^{IV}}{\phi} = -\frac{\rho S}{EI} \times \frac{\ddot{q}}{q} = \frac{\alpha^4}{L^4} \quad (12)$$

On définit la pulsation ω ainsi :

$$\omega^2 = \frac{\alpha^4}{L^4} \times \frac{EI}{\rho S} \quad (13)$$

On donc décomposer l'équation différentielle (12) en deux équations (séparation des variables) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^{IV}(x) - \frac{\alpha^4}{L^4} \phi(x) = 0 \quad (14) \\ \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (15) \end{array} \right.$$

L'étude de la première équation donne comme solution générale :

$$\phi(x) = A \sin\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + B \cos\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + C \sinh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + D \cosh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) \quad (16)$$

Et les dérivées donnent :

$$\phi'(x) = A \frac{\alpha}{L} \cos\left(\alpha \frac{x}{L}\right) - B \frac{\alpha}{L} \sin\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + C \frac{\alpha}{L} \cosh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + D \frac{\alpha}{L} \sinh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) \quad (17)$$

$$\phi''(x) = -A \frac{\alpha^2}{L^2} \sin\left(\alpha \frac{x}{L}\right) - B \frac{\alpha^2}{L^2} \cos\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + C \frac{\alpha^2}{L^2} \sinh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + D \frac{\alpha^2}{L^2} \cosh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) \quad (18)$$

$$\phi'''(x) = -A \frac{\alpha^3}{L^3} \cos\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + B \frac{\alpha^3}{L^3} \sin\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + C \frac{\alpha^3}{L^3} \cosh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + D \frac{\alpha^3}{L^3} \sinh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) \quad (19)$$

$$\phi^{IV}(x) = A \frac{\alpha^4}{L^4} \sin\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + B \frac{\alpha^4}{L^4} \cos\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + C \frac{\alpha^4}{L^4} \sinh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + D \frac{\alpha^4}{L^4} \cosh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) \quad (20)$$

Les 4 conditions aux limites permettent d'écrire :

$$\phi_{(x=0)} = 0 \quad \text{Ce qui traduit un déplacement nul sur l'appui d'extrémité d'abscisse } x = 0$$

$$\phi_{(x=L)} = 0 \quad \text{Ce qui traduit un déplacement nul sur l'appui d'extrémité d'abscisse } x = L$$

$$\overset{II}{\phi}_{(x=0)} = 0 \quad \text{Ce qui traduit un moment de flexion nul sur l'appui d'extrémité d'abscisse } x = 0$$

$$\overset{II}{\phi}_{(x=L)} = 0 \quad \text{Ce qui traduit un moment de flexion nul sur l'appui d'extrémité d'abscisse } x = L$$

$$\phi_{(x=0)} = A \sin\left(\alpha \frac{0}{L}\right) + B \cos\left(\alpha \frac{0}{L}\right) + C \sinh\left(\alpha \frac{0}{L}\right) + D \cosh\left(\alpha \frac{0}{L}\right) \quad (21)$$

$$\phi_{(x=0)} = 0A + B + 0C + D = 0 \quad (22)$$

$$\phi_{(x=L)} = A \sin\left(\alpha \frac{L}{L}\right) + B \cos\left(\alpha \frac{L}{L}\right) + C \sinh\left(\alpha \frac{L}{L}\right) + D \cosh\left(\alpha \frac{L}{L}\right) \quad (23)$$

$$\phi_{(x=L)} = A \sin(\alpha) + B \cos(\alpha) + C \sinh(\alpha) + D \cosh(\alpha) = 0 \quad (24)$$

$$\phi''_{(x=0)} = -A \frac{\alpha^2}{L^2} \sin\left(\alpha \frac{0}{L}\right) - B \frac{\alpha^2}{L^2} \cos\left(\alpha \frac{0}{L}\right) + C \frac{\alpha^2}{L^2} \sinh\left(\alpha \frac{0}{L}\right) + D \frac{\alpha^2}{L^2} \cosh\left(\alpha \frac{0}{L}\right) \quad (25)$$

$$\phi''_{(x=0)} = 0A - B \frac{\alpha^2}{L^2} + 0C + D \frac{\alpha^2}{L^2} = 0 \quad (26)$$

$$\phi''_{(x=L)} = -A \frac{\alpha^2}{L^2} \sin\left(\alpha \frac{L}{L}\right) - B \frac{\alpha^2}{L^2} \cos\left(\alpha \frac{L}{L}\right) + C \frac{\alpha^2}{L^2} \sinh\left(\alpha \frac{L}{L}\right) + D \frac{\alpha^2}{L^2} \cosh\left(\alpha \frac{L}{L}\right) \quad (27)$$

$$\phi''_{(x=L)} = -A \frac{\alpha^2}{L^2} \sin(\alpha) - B \frac{\alpha^2}{L^2} \cos(\alpha) + C \frac{\alpha^2}{L^2} \sinh(\alpha) + D \frac{\alpha^2}{L^2} \cosh(\alpha) = 0 \quad (28)$$

Nous pouvons mettre ses expressions sous la forme d'une matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & B & 0 & D \\ A \sin \alpha & B \cos \alpha & C \sinh \alpha & D \cosh \alpha \\ 0 & -B \frac{\alpha^2}{L^2} & 0 & D \frac{\alpha^2}{L^2} \\ -A \frac{\alpha^2 \sin \alpha}{L^2} & -B \frac{\alpha^2 \cos \alpha}{L^2} & C \frac{\alpha^2 \sinh \alpha}{L^2} & D \frac{\alpha^2 \cosh \alpha}{L^2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Le déterminant de cette matrice doit être nul.

On remarque à partir des équations (1) et (3) que $B = D = 0$

$$\phi_{(x)} = A \sin\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + B \cos\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + C \sinh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + D \cosh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) \quad (30)$$

$$\phi_{(x)} = A \sin\left(\alpha \frac{x}{L}\right) + C \sinh\left(\alpha \frac{x}{L}\right) \quad (31)$$

$$\text{Et nous avons : } -\frac{\rho S}{EI} \times \frac{\ddot{q}}{q} = \frac{\alpha^4}{L^4} \quad (32)$$

Les deux autres équations (2) et (4) donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{(x=L)} = A \sin(\alpha) + C \sinh(\alpha) = 0 \quad (33) \\ \phi''_{(x=L)} = -A \frac{\alpha^2}{L^2} \sin(\alpha) + C \frac{\alpha^2}{L^2} \sinh(\alpha) = 0 \quad (34) \end{array} \right.$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{(x=L)} = A \sin(\alpha) + C \sinh(\alpha) = 0 \quad (35) \\ \phi''_{(x=L)} = -A \sin(\alpha) + C \sinh(\alpha) = 0 \quad (36) \end{array} \right.$$

La somme des deux équations donne :

$$2C \sinh(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } C = 0 \quad (37)$$

La soustraction des deux équations donne :

$$2A \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = n\pi \text{ et donc } C = 0 \quad (38)$$

Est la valeur propre du système.

Nous avons donc comme équation de mode propre :

$$\phi_{(x)} = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (39)$$

Que l'on note en fonction de n (quantification) :

Le mode propre s'écrit :

$$\phi_{n(x)} = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (40)$$

La norme du mode propre s'écrit :

$$\int_0^L \phi_n(x) \phi_n(x) = \int_0^L A_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (41)$$

On remplace du $\sin^2(ax)$ vaut $\frac{1}{2}(1 - \cos(2ax))$ (42)

$$\int_0^L \phi_n(x) \phi_n(x) = A_n^2 \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right) dx \quad (43)$$

On pose $u = \frac{2n\pi x}{L}$

$$du = \frac{2n\pi}{L} dx$$

$$dx = \frac{L}{2n\pi} du$$

$$\int_0^L \phi_n(x) \phi_n(x) = A_n^2 \int_0^L \frac{1}{2} dx + A_n^2 \frac{1}{2} \int_0^L \frac{L}{2n\pi} \cos u du \quad (44)$$

La primitive de $\cos u$ est $\sin u$

$$\int_0^L \phi_n(x) \phi_n(x) = A_n^2 \left[\left(\frac{x}{2} - \frac{L}{4n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right) \right]_0^L = A_n^2 \left(\frac{L}{2} - 0 - (0 - 0) \right) = \frac{A_n^2 L}{2} \quad (45)$$

On constate que si l'on choisissait $A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$ (46) les modes $\phi_n(x)$ formeraient une base orthonormée pour le produit scalaire canonique.

Dans le cas de vecteurs propres normés nous avons donc :

$$\phi_{n(x)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (47)$$

Remarque

On retrouve ce résultat en écrivant que le déterminant de la matrice des composants doit être nul.

Détermination de la pulsation propre :

$$\omega^2 = \frac{\alpha^4}{L^4} \times \frac{EI}{\rho S} \quad (48)$$

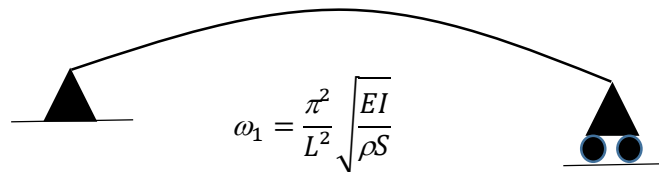
Avec $\alpha = n\pi$ (49)

$$\omega^2 = \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \times \frac{EI}{\rho S} \quad (50)$$

$$\omega = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (51)$$

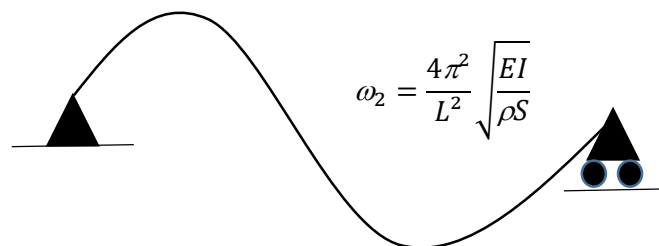
De ses équations, nous pouvons établir les différents modes propres de vibration de la poutre (cf. figure 2).

1^{er} mode :



$$\phi_{1(x)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

2^{ème} mode :



$$\phi_{2(x)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

3^{ème} mode :

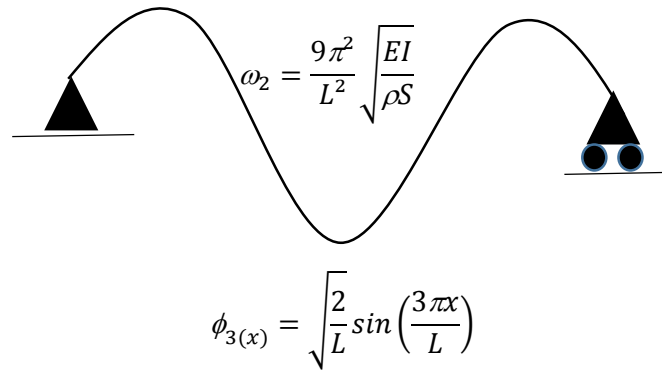


Figure 2 – Mode propre de vibration d’une poutre sur deux appuis –

1.2 Particule dans un puits de potentiel à une dimension infinie

Soit une particule emprisonnée dans un puits de potentiel (cf. figure 3).

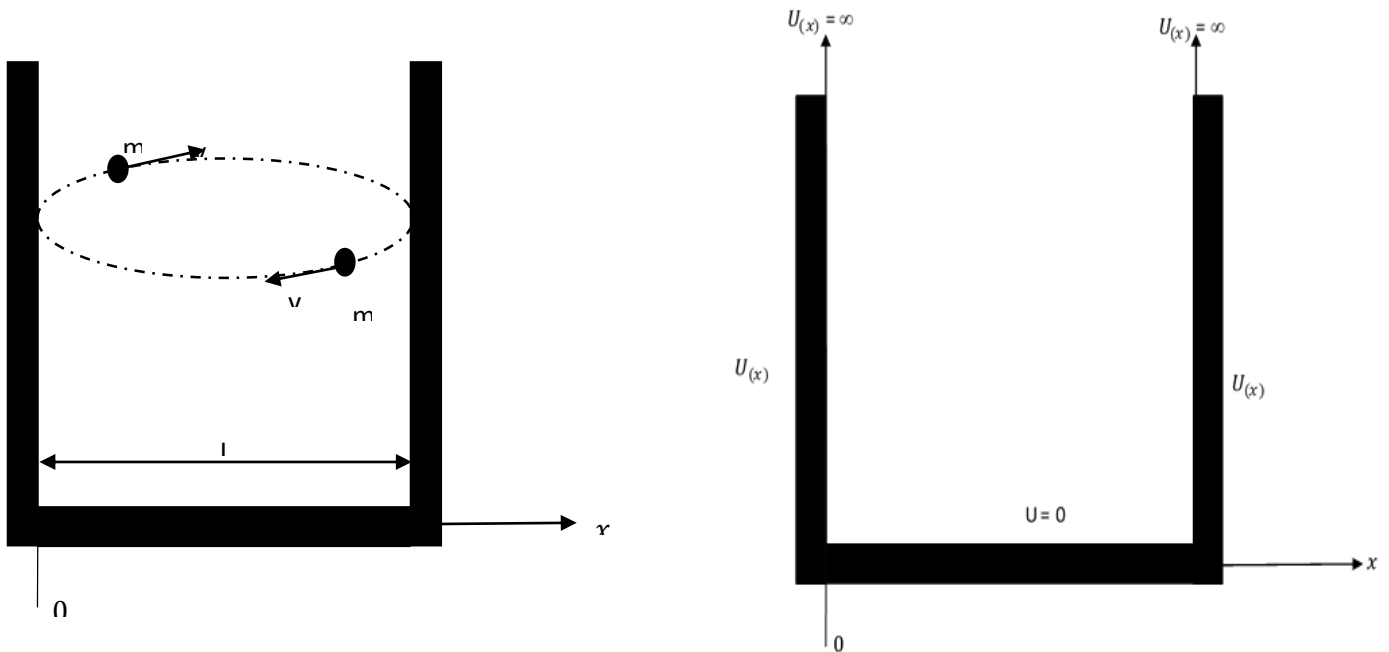


Figure 3 – Particule en mouvement dans un puits de potentiel

L’équation de Schrödinger indépendante du temps s’écrit :

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + E_m \psi(x) = 0 \quad (52)$$

Les conditions aux limites sont donc les suivantes :

La particule est présente :

$$0 \leq x \leq L$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + E_m \psi(x) = 0$$

La particule suit l’équation de Schrödinger

La particule n’est pas présente :

$$x < 0 \text{ ou } x > L$$

$$\psi(x) = 0$$

Il n’y a pas de particule

Par ailleurs, $\psi_{(x)}$ est une fonction continue. Il en résulte : $\psi_{(0)} = \psi_{(L)} = 0$

Soit :

$$\frac{d^2 \psi_{(x)}}{dx^2} + k^2 \psi_{(x)} = 0 \quad (53)$$

Avec :

$$k^2 = \frac{2mE_m}{\hbar^2} \quad (54)$$

La solution pour la fonction d'onde pour cette équation différentielle est de la forme :

$$\psi_{(x)} = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad (55)$$

On suppose que l'énergie est E_m et est positive.

Utilisons les conditions aux limites pour trouver les constantes A et B :

En $x = 0$, $\psi_{(0)} = 0$:

Ce qui implique $B = 0$

$$\psi_{(x)} = A \sin(kx)$$

En $x = L$, $\psi_{(L)} = 0$:

$$\psi_{(L)} = A \sin(kL) = 0$$

Il faut donc avec A et k différent de 0 que $kL = n\pi$

Ce qui implique que :

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad (56)$$

Avec n un entier =1,2,3.....

Comme nous avons posé :

$$k^2 = \frac{2mE_m}{\hbar^2}$$

Il en résulte :

$$k^2 = \frac{2mE_m}{\hbar^2} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad (57)$$

On en déduit les valeurs discrètes d'énergie :

$$E_{m,n} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \quad (58)$$

Avec $n = 1,2,3,\dots$

Les valeurs propres de l'énergie sont donc quantifiées.

On peut donc écrire l'expression de la fonction d'onde :

$$\psi_{(x)} = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Cherchons l'expression de A :

La particule devant être quelque part dans le puit quantique.

La fonction $\|\psi(x)\|^2 = 1$ par satisfaction de la densité de probabilité (la particule doit se trouver quelque part dans la boîte entre 0 et L.

$$\int_0^L \|\psi(x)\|^2 dx = 1 \quad (59)$$

$$\int_0^L A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{A^2}{2} \int_0^L \left\{1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right\} dx = \frac{A^2}{2} \left[x - \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right]_0^L$$

$$= \frac{A^2}{2} \left(L - \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi L}{L}\right) \right) = \frac{A^2 L}{2} = 1$$

Soit $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$ (60)

Et la solution du problème, c'est-à-dire la fonction d'onde dans le puit quantique s'écrit donc :

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (61)$$

Fonction d'onde	probabilité de présence	
$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$	$\ \psi(x)\ ^2 = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$	(62)

Remarque concernant l'énergie :

En posant : $E = h\nu = \frac{h}{T}$

Et avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$E = \frac{\omega h}{2\pi} = \hbar\omega$$

$$\hbar\omega = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)$$

$$\omega = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{\hbar}{2m} \right) \quad (63)$$

1.3 Conclusion de cette première partie

Le tableau 1 ci-dessous montre la parfaite analogie entre les vibrations propre d'une poutre sur deux appuis (issue de la résistance des matériaux) et la quantification de l'énergie d'une particule dans un puit quantique (issue de la mécanique quantique).

Cas étudié	Valeurs propres		Modes propres	
	Pulsation propre quantifiée	Energie quantifiée	Mode propre d'oscillation de la poutre	Expression de la fonction d'onde
Poutre sur deux appuis	$\omega = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \right)$ $\frac{\phi^{IV}}{\phi} = -\frac{\rho S}{EI} \times \frac{\ddot{q}}{q} = \frac{\alpha^4}{L^4}$ $\phi_{(x)}^{IV} - \frac{\alpha^4}{L^4} \phi_{(x)} = 0$ $y_{(x,t)} = q_{(t)} \phi_{(x)}$	Sans objet	$\phi_{n(x)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ $\frac{\phi^{IV}}{\phi} = -\frac{\rho S}{EI} \times \frac{\ddot{q}}{q} = \frac{\alpha^4}{L^4}$ $\frac{d^2 q_{(t)}}{dt^2} + \left(\frac{\alpha^4 EI}{L^4 \rho S}\right) q_{(t)} = 0$ $y_{(x,t)} = q_{(t)} \phi_{(x)}$	Sans objet
Particule dans un puit de potentiel	En posant : $E = h\nu = \frac{h}{T}$ $\omega = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{\hbar}{2m} \right)$ $\frac{d^2 \psi_{(x)}}{dx^2} + \left(\frac{2mE_m}{\hbar^2} \right) \psi_{(x)} = 0$	$E = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)$	Sans objet	$\psi_{n(x)} = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ $\frac{d^2 \psi_{(x)}}{dx^2} + \left(\frac{2mE_m}{\hbar^2} \right) \psi_{(x)} = 0$

Tableau 1 – Analogie entre les pulsations propres de vibration d'une poutre sur deux appuis et l'énergie quantifiée d'une particule dans un puit quantique

Les pulsations propres ω de la poutre en RDM sont l'analogie des sauts d'énergie quantifiés E_m de la particule dans le puit quantique. $\left(\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \right)_{RDM} \Rightarrow \left(\frac{\hbar}{2m} \right)_{quantique}$

Les modes propres ϕ de vibration de la poutre RDM sont l'analogie des modes propre de la fonction d'onde ψ dans le puit quantique.

2^{ème} partie – relation entre la courbure et l'énergie en 1 et 2 dimensions (poutre et plaque en RDM) et en en 4 dimensions (Relativité générale)

2.1 Cas de la poutre sur 2 appuis

Considérons la même poutre que celle définis en figure 1.

La relation fondamentale reliant la courbure (1/R) au moment de flexion $M_{(x)}$ et à la dérivée seconde de la flèche $y_{(x)}$ s'écrit :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_{(x)}}{EI} = \frac{1}{R} \quad (64)$$

Dans cette expression, $y_{(x)}$ est la flèche vertical de la poutre (m), $M_{(x)}$ le moment de flexion (N.m), E le module d'Young du matériau constituant la poutre (N/m²), I l'inertie de la section the (m⁴) et R le rayon de courbure en (m).

L'expression exacte de la courbure est donnée dans l'expression (65). Le terme en racine cubique est négligeable pour de faible courbure.

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)^3} \quad (65)$$

De plus, l'énergie de flexion élastique d'une poutre s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_{(x)}^2}{EI} dx \quad (66)$$

Considérons pour simplifier une poutre subissant un moment constant M à chaque extrémité (cf. figure 4).

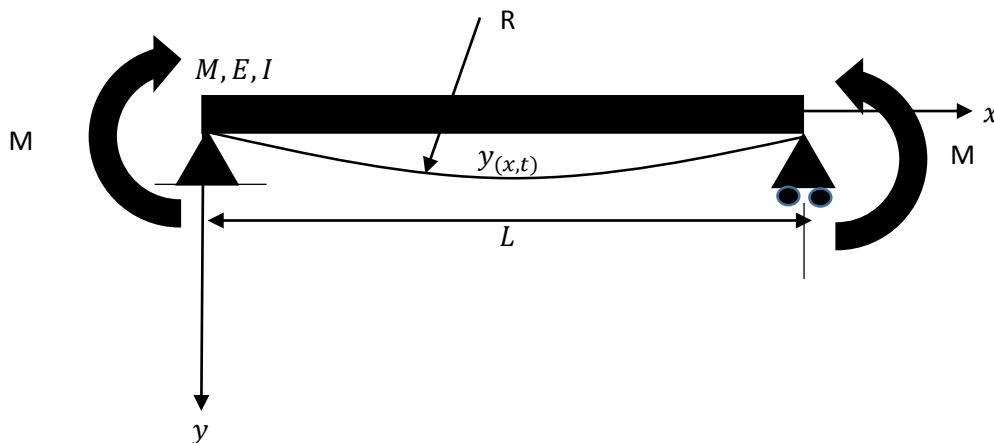


Figure 4 – Poutre sur 2 appuis sollicitée par un moment M à chaque extrémité –

L'équation du moment fléchissant s'écrit (flexion pure) :

$$M_{(x)} = M \quad (67)$$

A partir de l'équation (64) nous obtenons :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{1}{R} \quad (68)$$

$$M_{(x)} = M = -\frac{EI}{R} \quad (69)$$

En reportant l'expression (69) dans l'expression de l'énergie de flexion (66) :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(EI)^2}{R^2 EI} dx$$

La courbure étant constante, nous obtenons :

$$U = \frac{1}{2} \frac{EIL}{R^2}$$

Ou encore en flexion pure :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{2}{EI} \left(\frac{U}{L}\right) \quad (70)$$

Nous obtenons donc une relation reliant la courbure à l'énergie de déformation de la poutre.

Remarque :

En intégrant deux fois par rapport à x l'expression (68) et considérant que la déformée doit être nulle sur chaque appui, on obtient l'expression de la déformée.

$$y(x) = -\frac{M}{2EI}x^2 + \frac{ML}{2EI}x \quad (71)$$

Et nous retrouvons un résultat bien connu de résistance des matériaux :

$$y_{(L/2)} = -\frac{ML^2}{8EI} + \frac{ML^2}{4EI} = \frac{ML^2}{8EI} \quad (72)$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{R}$$

2.2 Cas de la plaque mince d'épaisseur h

Considérons une plaque d'épaisseur mince h , de côtés Δx et Δy sollicitée par des moments de flexion M_x dans un premier temps (cf. figure 5) :

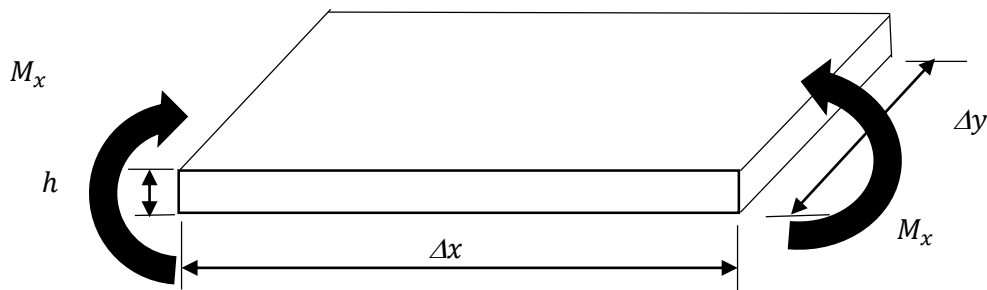


Figure 5 – Plaque sollicitée par des moments de flexion sur ses côtés

M_x Représente un moment de flexion par unité de longueur de la plaque :

Sous l'effet des moments de flexion, la plaque fléchit et prend un rayon de courbure R comme indiqué à la figure 6 :

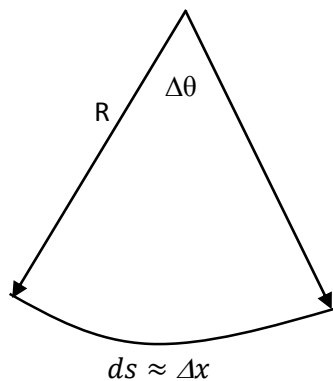


Figure 6 – Relation entre la courbure R de la plaque et sa fibre moyenne

Nous avons suivant la figure 5: $R_x \Delta\theta = ds \approx \Delta x \quad (73)$

Et nous avons une relation reliant la courbure $1/R$ à la flèche w de la plaque:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \quad (74)$$

En reportant l'expression (74) dans l'expression (73) on obtient :

$$\Delta\theta = \frac{\Delta x}{R_x} = -\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \Delta x \quad (75)$$

L'énergie de déformation élastique de la plaque s'écrit alors :

$$\Delta U = \frac{1}{2} M_x \Delta y \Delta\theta \quad (76)$$

$$\Delta U_x = -\frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \Delta x \Delta y \quad (77)$$

La contribution suivant y de l'énergie s'écrit de la même façon si des moments M_y sont maintenant appliqués en plus le long du coté Δx :

$$\Delta U_y = -\frac{1}{2} M_y \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} \Delta x \Delta y \quad (78)$$

La contribution liée à la torsion s'écrit :

$$\Delta U_{xy} = \frac{1}{2} 2M_{xy} \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y \quad (79)$$

Finalement l'énergie de déformation de la plaque s'écrit :

$$\Delta U = \Delta U_x + \Delta U_y + \Delta U_{xy} \quad (80)$$

$$\Delta U = -\frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \Delta x \Delta y - \frac{1}{2} M_y \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} 2M_{xy} \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y \quad (81)$$

Soit :

$$\Delta U = \frac{1}{2} \left[-M_x \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y \partial x} - M_y \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} \right] \Delta x \Delta y \quad (82)$$

En utilisant les relations bien connues reliant les moments de flexion aux dérivées seconde de la déformée,

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} \right) \quad (83), M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \right) \quad (84)$$

$$M_x = D \left(\frac{1}{R_x} + \nu \frac{1}{R_y} \right) \quad (85), M_y = D \left(\frac{1}{R_y} + \nu \frac{1}{R_x} \right) \quad (86)$$

$$M_{xy} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x \partial y} \quad (87)$$

Et en les reportant dans l'expression (82) on obtient :

$$\Delta U = \frac{1}{2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} + 2D(1-v) \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y \partial x} \right. \\ \left. + D \left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} \right] \Delta x \Delta y \quad (88)$$

Soit en développant l'expression (88)

$$\Delta U = \frac{1}{2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \right)^2 + vD \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} + 2D \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y \partial x} - 2vD \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y \partial x} \right. \\ \left. + D \left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} \right)^2 + vD \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} \right] \Delta x \Delta y$$

$$\Delta U = \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \right)^2 + 2v \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} + 2(1-v) \left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} \right)^2 \right] \Delta x \Delta y$$

$$\Delta U = \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \right)^2 + 2v \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} + 2(1-v) \left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} \right)^2 \right] \Delta x \Delta y \quad (89)$$

Nous obtenons donc également une relation entre la courbure et la déformée de la plaque :

$$\left[\left(\frac{1}{R_x} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_y} \right)^2 + 2(1-\nu) \left\{ \left(\frac{1}{R_{xy}} \right)^2 \right\} + 2\nu \left\{ \frac{1}{R_x} \frac{1}{R_y} \right\} \right] = \frac{24(1-\nu^2)}{Eh^3} \times \frac{\Delta U}{\Delta x \Delta y} \quad (90)$$

Remarque :

Les expressions ci-dessous permettent de reformuler et simplifier l'expression (89)

$$-2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (91)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} \right)^2 = \left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (92)$$

La somme des deux expressions (91) et (92) ci-dessus redonne l'expression (89) :

$$\left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2$$

Donc l'expression (89) s'écrit à partir des expressions (91) et (92) :

$$\Delta U = \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{(x,y)}}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] \Delta x \Delta y \quad (93)$$

Avec pour rigidité de flexion D :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (94)$$

Soit :

$$\Delta U = \frac{D}{2} \left[\left(-\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{1}{R_x} \frac{1}{R_y} - \left(\frac{1}{R_{xy}} \right)^2 \right] \right] \Delta x \Delta y \quad (95)$$

Ou en présentant cette équation de manière à faire ressortir la courbure d'un côté et l'énergie de l'autre :

$$\left[\left(-\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{1}{R_x} \frac{1}{R_y} - \left(\frac{1}{R_{xy}} \right)^2 \right] \right] = \left(\frac{2}{D} \right) \frac{\Delta U}{\Delta x \Delta y} \quad (96)$$

Nous allons maintenant développer cette expression dans le cas de la flexion pure:

Les rayons de courbures sont dans ce cas tous égaux. Le rayon de courbure liée à la torsion est nul.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R} \quad (97)$$

En reportant ces expressions dans l'équation (96) on obtient :

$$\Delta U = \frac{D}{2} \left[\left(-\frac{2}{R} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{1}{R^2} \right] \right] \Delta x \Delta y$$

$$\Delta U = \frac{D}{2} \left[\frac{4}{R^2} - \frac{2}{R^2} + 2\nu \frac{1}{R^2} \right] \Delta x \Delta y$$

$$\Delta U = \frac{D}{2} \left[\frac{2}{R^2} + 2\nu \frac{1}{R^2} \right] \Delta x \Delta y$$

$$\Delta U = \frac{D}{R^2} [1 + \nu] \Delta x \Delta y$$

Soit :

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{D(1+\nu)} \frac{\Delta U}{\Delta x \Delta y} \quad (98)$$

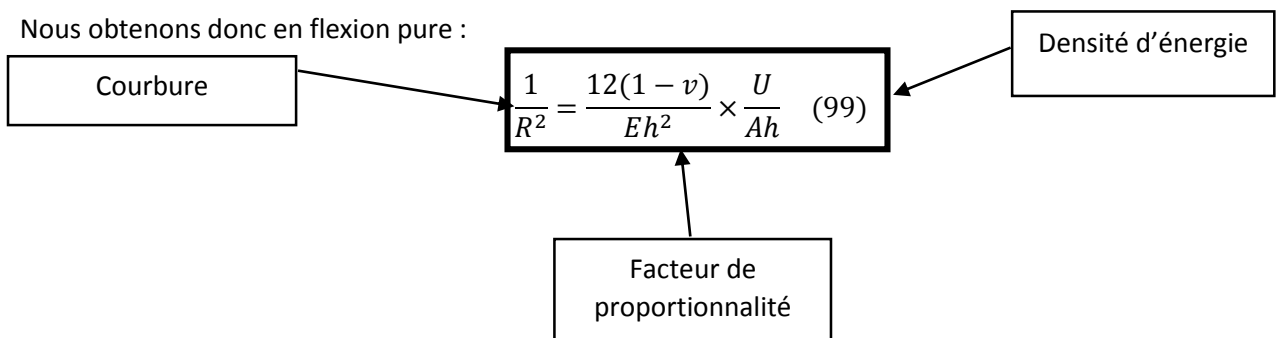
En prenant en compte l'expression de la rigidité de flexion (94) et en posant $\Delta x \Delta y = A$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{12(1-\nu^2) U}{Eh^3(1+\nu) A}$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^2(1+\nu)} \times \frac{U}{Ah}$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{12(1+\nu)(1-\nu)}{Eh^2(1+\nu)} \times \frac{U}{Ah}$$

Nous obtenons donc en flexion pure :



2.3 Cas de la relativité générale

2.3.1 Expression de l'Equation d'Einstein

L'équation d'Einstein s'écrit:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (100)$$

Dans cette équation, la courbure et l'énergie de l'espace-temps sont reliées (cf. figure 7).

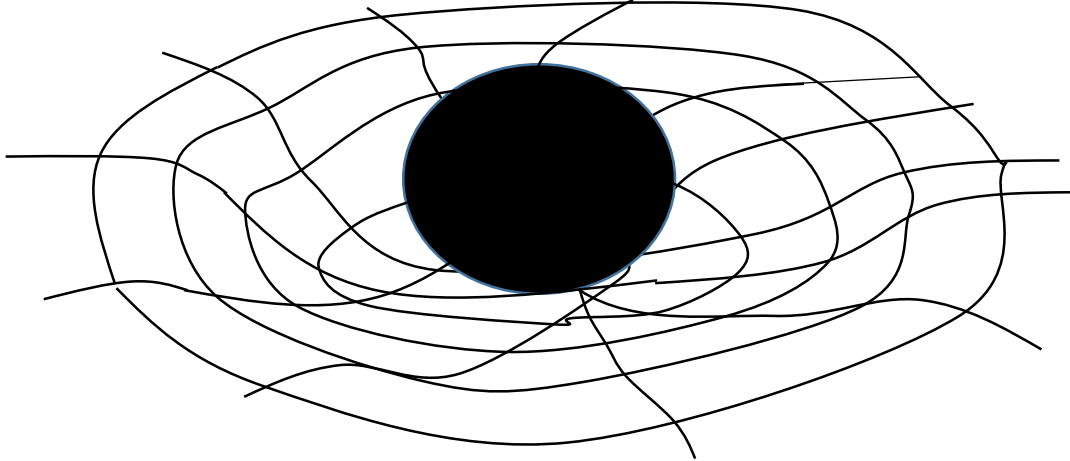


Figure 7 – Visualisation symbolique de la courbure de l'espace-temps en le ramenant à un espace plan

Avec :

$G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein.

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (101)$$

Par ailleurs, l'équation aux dimensions de κ est la suivante:

$$\kappa = \frac{L^3 T^4}{M T^2 L^4} = \frac{T^2}{M L} = \frac{s^2}{kgm} \quad (102)$$

L'équation d'Einstein sous forme développée devient :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (103)$$

2.3.2 Détails sur le tenseur de courbure

Le tenseur de Ricci est obtenu par contraction du tenseur de courbure de Riemann sur l'indice λ :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda}^{\lambda}$$

R est une nouvelle contraction du tenseur $R_{\mu\nu}$

Le tenseur de courbure ou tenseur de Riemann s'écrit :

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\alpha} = \Gamma_{\mu\alpha, \nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu, \alpha}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\alpha}^{\eta} - \Gamma_{\alpha\eta}^{\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \quad (104)$$

Ou encore :

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\alpha} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda}\Gamma_{\mu\alpha}^{\eta} - \Gamma_{\alpha\eta}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \quad (104 \text{ bis})$$

Avec les symboles de Christoffel suivant :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right) \quad (105)$$

$g_{\mu\nu}$ est la métrique,

Les coefficients de la métrique sont issus de l'intervalle invariant (cf. relativité restreinte)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (106)$$

Soit, en considérant la sommation d'indices d'Einstein :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \quad (107)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \quad (108)$$

$$\xi^0 = ct; \xi^1 = x; \xi^2 = y; \xi^3 = z \quad (109)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (110)$$

Λ est la constante cosmologique (candidate possible pour expliquer l'énergie du vide et la matière noire).

Les $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ sont les dérivées premières de la métrique $g_{\mu\nu}$:

Par exemple en coordonnées (t,r,θ,φ) :

$$\Gamma_{r\lambda,r}^{\lambda} = \Gamma_{rt,r}^t + \Gamma_{rr,r}^r + \Gamma_{r\theta,r}^{\theta} + \Gamma_{r\varphi,r}^{\varphi} = \frac{\partial\Gamma_{rt}^t}{\partial r} + \frac{\partial\Gamma_{rr}^r}{\partial r} + \frac{\partial\Gamma_{r\theta}^{\theta}}{\partial r} + \frac{\partial\Gamma_{r\varphi}^{\varphi}}{\partial r} \quad (111)$$

Donc les $\Gamma_{r\lambda,r}^{\lambda}$ sont des dérivées secondes de la métrique $g_{\mu\nu}$ que l'on peut comparer en une et deux dimension avec les expressions des courbures données aux expressions (70) , (90), (96) et (99).

Donc $G_{\mu\nu}$ a bien la dimension d'une courbure en $1/m^2$

Par exemple pour le premier terme de $R^{\lambda}_{\mu\nu\alpha}$ (voir 104 bis)

$$\frac{\partial\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial\left\{\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}\right)\right\}}{\partial x^{\nu}}$$

2.3.3 Détail sur le tenseur énergie impulsion

Nous rappelons que les composantes du tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ ont la dimension de densité d'énergie :

$$G = 6.6726 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad 1\text{J} = 1\text{W}\cdot\text{s} = 1 \text{ N}\cdot\text{m} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2} \quad \text{kg}$$

$$\text{Curvature} = \frac{8\pi G}{c^4} \times \frac{\text{Energy}}{\text{Volume}} = \frac{8\pi G}{c^2} \frac{\text{Mass}}{\text{Volume}} \quad (112)$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 $1/L^2$ $(L/T)^4$ (L^3)

Le tenseur énergie impulsion est une matrice dont les composantes sont données ci-dessous (113) :

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{m\gamma^2 c^2}{V} & \rho\gamma^2 cv_x & \rho\gamma^2 cv_y & \rho\gamma^2 cv_z \\ \rho\gamma^2 cv_x & \rho\gamma^2 v_x v_x & \rho\gamma^2 v_x v_y & \rho\gamma^2 v_x v_z \\ \rho\gamma^2 cv_y & \rho\gamma^2 v_y v_x & \rho\gamma^2 v_y v_y & \rho\gamma^2 v_y v_z \\ \rho\gamma^2 cv_z & \rho\gamma^2 v_z v_x & \rho\gamma^2 v_z v_y & \rho\gamma^2 v_z v_z \end{bmatrix} \quad (113)$$

Où γ est le facteur de Lorentz (114) (cf. relativité restreinte), la densité d'énergie $\rho = \frac{m}{V}$ avec m la masse et V le volume unitaire, c la vitesse de la lumière, v_i une vitesse dans la direction i .

Le facteur de Lorentz découle de la transformation de Lorentz qui traduit en autre que la vitesse de la lumière est constante quelque soit le référentiel considéré.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (114)$$

Nous allons montrer qu'à faible vitesse (en situation non relativiste) et en 3 dimensions, ce tenseur à 16 composantes dans l'espace-temps quadridimensionnel inclue en fait le tenseur des contraintes (9 composantes) de la mécanique des milieux continus dont dérive la résistance des matériaux [11].

Le tenseur des contraintes en deux dimensions s'écrit:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (115)$$

Et en 3 dimensions :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (116)$$

En théorie de l'élasticité qui découle de la mécanique des milieux continus, la relation entre le tenseur des contraintes σ_{ij} et une force appliquée Q_i sur une surface de normale n_j s'écrit :

$$Q_i = \sigma_{ij} n_j \quad (117)$$

Dans le cadre d'une approche variationnelle le tenseur des contraintes peut donc s'écrire ainsi :

$$\sigma_{ij} = \frac{\Delta Q_i}{\Delta n_j} \text{ with } \Delta n_j \rightarrow 0 \quad (118)$$

Considérant la masse m , la densité d'énergie de masse ρ , le volume V et l'accélération a_i

$$\sigma_{ij} = \frac{\Delta Q_i}{\Delta n_j} = \frac{\Delta(m \times a_i)}{\Delta n_j} = \frac{\Delta(\rho \cdot V \cdot a_i)}{\Delta n_j} \quad (119)$$

Si nous faisons l'hypothèse que la variation de la force est due uniquement à la variation de volume en fonction du temps, nous obtenons :

$$a_i = \frac{v_i}{\Delta t} \quad (120)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\Delta(\rho \cdot V \cdot a_i)}{\Delta n_j} = \rho \frac{1}{\Delta n_j} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right) v_i \quad (121)$$

Nous pouvons définir le volume V :

$$V = \Delta x_i \cdot \Delta x_j \cdot \Delta x_k \quad (122)$$

Et nous obtenons :

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{1}{\Delta n_j} \left(\frac{\Delta x_i \cdot \Delta x_j \cdot \Delta x_k}{\Delta t} \right) v_i \quad (123)$$

Nous pouvons remplacer la surface n_j par sa valeur:

$$n_j = \Delta x_i \cdot \Delta x_k \quad (124)$$

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{v_i}{\Delta t} \left(\frac{\Delta x_i \cdot \Delta x_j \cdot \Delta x_k}{\Delta x_i \cdot \Delta x_k} \right) \quad (125)$$

Après simplification nous obtenons :

$$\sigma_{ij} = \rho v_i \left(\frac{\Delta x_j}{\Delta t} \right) \quad (126)$$

Par définition de la vitesse nous avons :

$$v_j = \left(\frac{\Delta x_j}{\Delta t} \right) \quad (127)$$

Nous obtenons finalement l'expression du tenseur des contraintes à faible vitesse en fonction de la densité d'énergie et du produit des vitesses (dimension 3 de l'espace) :

$$\sigma_{ij} = \rho v_i v_j \quad (128)$$

Le tenseur énergie impulsion lui découle du produit de la densité d'énergie par les quadri vitesses (dimension 4 de l'espace-temps) issue de la relativité restreinte :

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu \quad (129)$$

Avec pour le quadrivecteur vitesse :

$$u_\mu = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{bmatrix} \quad (130)$$

En vitesse faible $\gamma=1$ et le tenseur énergie impulsion s'écrit :

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{mc^2}{V} & \rho c v_x & \rho c v_y & \rho c v_z \\ \rho c v_x & \rho v_x v_x & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho c v_y & \rho v_y v_x & \rho v_y v_y & \rho v_y v_z \\ \rho c v_z & \rho v_z v_x & \rho v_z v_y & \rho v_z v_z \end{bmatrix} \quad (131)$$

Compte tenu de la définition du tenseur des contraintes (cf. équation 128), le tenseur énergie impulsion à faible vitesse peut donc s'écrire :

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{mc^2}{V} & \rho c v_x & \rho c v_y & \rho c v_z \\ \rho c v_x & \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \rho c v_y & \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \rho c v_z & \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (132)$$

L'équation d'Einstein à faible vitesse relie donc en 4 dimensions (espace-temps) le tenseur de courbure $G_{\mu\nu}$ (dimension $1/m^2$) au tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ qui quant à lui intègre le tenseur des contraintes.

2.4 Conclusion de cette deuxième partie

Le tableau 2 ci-dessous récapitule les résultats obtenus. On constate que la relativité générale est finalement une généralisation des résultats de la théorie de l'élasticité en 4 dimensions.

Théorie considérée	Nombre de dimensions	Formulation entre énergie et courbure	Exemple (flexion pure) ou à faible vitesse
Poutre sur deux appuis en élastique	1	$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \right)^3}$ $U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M(x)^2}{EI} dx$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{R}$	$\frac{1}{R^2} = \frac{2}{EI} \left(\frac{U}{L} \right)$
Plaque	2	$\left[\left(-\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{1}{R_x R_y} - \left(\frac{1}{R_{xy}} \right)^2 \right] \right] = \left(\frac{2}{D} \right) \frac{\Delta U}{\Delta x \Delta y}$	$\frac{1}{R^2} = \frac{12(1-\nu)}{Eh^3} \times \frac{U}{A}$
Relativité générale	4	$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$	$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ $T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{mc^2}{V} & \rho c v_x & \rho c v_y & \rho c v_z \\ \rho c v_x & \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \rho c v_y & \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \rho c v_z & \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

Tableau 2 – Comparaison des différentes relations entre énergie et courbure en fonction du nombre de dimensions considérées –

Conclusion

Nous avons montré sur des exemples, que la résistance des matériaux permet de comprendre par analogie dans certains cas les principes fondamentaux de la mécanique quantique :

- Les modes propres de vibration d'une poutre sur deux appuis correspondent aux différentes formes de la fonction d'onde reliée aux sauts d'énergie de la particule dans un puit quantique.
- Les pulsations propres de vibration de la poutre sur deux appuis correspondent à la quantification de l'énergie de la particule dans un puit quantique.

Nous avons montré que la relativité générale est une généralisation en 4 dimensions (espace-temps) de la relation courbure/énergie présente également en résistance des matériaux pour les poutres et les plaques notamment.

Enfin, nous avons montré que le tenseur énergie-impulsion écrit à faible vitesse redonne le tenseur des contraintes de la théorie de l'élasticité.

Références Bibliographiques

Pour la mécanique des structures

[1] S. Timoshenko, (1949) « Résistance des matériaux Traduit de l'anglais sur la 2e édition par Ch. Laffitte »

[2] D. Izabel (2007) « Formulaire de résistance des matériaux tome 1 à 5 » Sebtp

[3] S. Timoshenko, (1951) « Théorie des plaques et des coques, Traduit de l'anglais par L. Vial Reliure inconnue » (1951) p 46 chap 12 and p37 chap 10

[4] Ménad CHENAF Jean-Vivien HECKCSTB Guide PPRT (2007)
Compléments technique relatif a l'effet de surpression
Recommandations et précautions en vue de réduire les risques – rapport d'étude

Pour la relativité générale

[5] T.G. Tenev M.F. Horstemeyer (2016) « The Mechanics of Spacetime { A Solid Mechanics Perspective on the Theory of General» Foundations of Physics manuscript arXiv:1603.07655v3 » p 24

[6] M. R. Beau (2014) « Théorie des champs des contraintes et des déformations en relativité générale et expansion cosmologique ». - Foundations of Physics manuscript arXiv:1209.0611v2 p4 and Annales de la Fondation Louis de Broglie, Volume 40, 2015

[7] T. Damour (2006) – « La Relativité Générale aujourd'hui » Institut des Hautes Etudes Scientifiques Bures-sur-Yvette, France - Séminaire Poincaré 1-40 p

[8] T. Damour (2005) « Einstein et la physique du vingtième siècle » Membre de l'Académie des sciences p 4

[9] M. R. Beau (2014) « Sur l'hypothèse concernant l'existence d'un champ de gravité de type vectoriel couplant avec l'accélération des masses » Hal archive ouvertes 00683021v2 point c p13

[10] Collective (2016) Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger physical review letter

[11] Cours de physique « tenseur energie impulsion »

<http://physique.coursgratuits.net/relativite-generale/tenseur-d-energie-impulsion.php>

[12] Cours en ligne de richard Taillet univ grenoble– initiation à la relativité générale et restreinte

Pour la mécanique quantique

[13] C. De Beule (2016) “Graphical interpretation of the Schrodinger equation” university antwerpen

[14] Michael Fowler (2007) “Schrödinger’s Equation in 1-D: Some Examples Curvature of Wave Functions”

[15] Steven Errede (2016) UIUC Physics 406 Acoustical Physics of Music, Department of Physics, University of Illinois at Urbana-Champaign, IL,

[16] Xinzhong Wu (2015) Probability and Curvature in Physics School of History and Culture of Science, Shanghai Jiaotong University, Shanghai, China Journal of Modern Physics, 2015, 6, 2191-2197

[17] Dalibard : Cour en ligne de mécanique quantique X polytechnique

[18] Cours en ligne : calcul variationnel et relativité restreinte X polytechnique

Pour l’ensemble des sujets

[19] Feynman (1963) The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley 1963, vol.II, p.38-10.

[20] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, Gravitation, W.H. Freeman 1973; x17.5, pp.426-428

[21] Paty Michel (2005) HAL L’espace-temps de la théorie de la relativité

[22] Bernard Guy (2016) Relier la mécanique et la relativité générale ? Réflexions et propositions