



HAL
open science

Aide à la décision en présence de critères non mesurables (deux approches)

Bernard Fustier

► **To cite this version:**

Bernard Fustier. Aide à la décision en présence de critères non mesurables (deux approches). [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1989, 39 p., ref. bib.: 2 p.1/2. hal-01534285

HAL Id: hal-01534285

<https://hal.science/hal-01534285>

Submitted on 7 Jun 2017

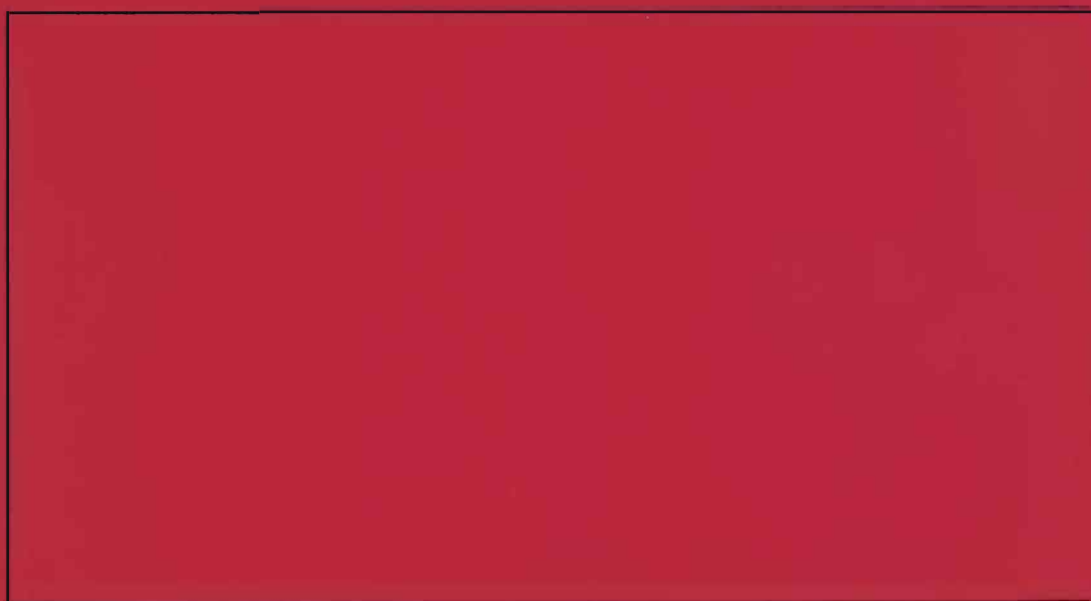
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

I.M.E.

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU C.N.R.S.

DOCUMENT DE TRAVAIL



INSTITUT DE MATHEMATIQUES ECONOMIQUES

UNIVERSITE DE DIJON

FACULTE DE SCIENCE ECONOMIQUE ET DE GESTION

4, BOULEVARD GABRIEL — 21000 DIJON

N° 115

**AIDE A LA DECISION
EN PRESENCE DE CRITERES NON MESURABLES**

DEUX APPROCHES

Bernard FUSTIER

MAI 1989

RESUME

Le présent document expose quatre méthodes d'analyse multicritère.

Le modèle ELECTRE est rappelé puis discuté. Une version simplifiée de cette méthode est ensuite exposée (ELECTRE-Im). Enfin, l'adhésion des critères concordants est introduite dans une troisième méthode (SPARTE).

Les modèles précédents utilisent le concept central de relation de surclassement dont la représentation est donnée par un graphe.

La dernière méthode exposée (REGIME) est fondée sur une approche probabiliste ; elle évite la manipulation (douteuse) de nombres ordinaux.

Mots-clefs : Analyse multicritère, graphe, probabilité.

ABSTRACT

This paper provides four multiple criteria choice methods.

The ELECTRE model is recollected and discussed. A simplified version of this model is then exposed (ELECTRE - Im). Finally, the adhesion of concordant criteria is taken into consideration in a third method (SPARTE).

The above-mentioned models use the central concept of "relation de surclassement" which is drawn by a graph.

The last exposed model (the REGIME method) is based on a probabilistic approach and avoids unpermitted calculations with ordinal numbers.

Keywords : Multicriteria analysis, Graph, Probability.

INTRODUCTION

Considérons un certain ensemble dont il convient d'extraire le "meilleur" élément, c'est-à-dire l'élément qui, en moyenne, est mieux placé que les autres candidats à la sélection d'après une liste de critères donnée a priori.

Lorsque la nature des critères permet d'envisager leur réduction en un seul, la solution s'impose très facilement au décideur. C'est le cas, par exemple, lorsqu'il s'agit de décerner le prix d'excellence : il suffit de calculer la somme pondérée des notes de chaque élève et de choisir celui dont la somme est la plus grande.

Les exemples de ce type sont très rares, et nous reviendrons d'ailleurs sur la procédure d'agrégation des critères qui n'est pas totalement justifiée. Dans la plupart des problèmes rencontrés en pratique, les critères de sélection ne sont pas seulement quantitatifs, mais également qualitatifs. Parmi les critères quantitatifs, tous ne sont pas mesurables (au sens de la théorie de la mesure que nous évoquerons brièvement par la suite). Les procédures de synthèse utilisées habituellement (moyennes, indices, fonction d'utilité...) ne présentent qu'un intérêt très limité pour guider le choix du décideur. Il faudra généralement recourir à des procédures nouvelles, mieux adaptées au caractère hétéroclite de l'ensemble des critères de jugement.

C'est en 1966, avec la méthode ELECTRE, que l'analyse multicritère commence à faire de réels progrès. Mise au point par Bernard ROY et les chercheurs de la SEMA, cette technique utilise une relation de surclassement pour éliminer d'une façon progressive les éléments les moins performants et présenter au décideur un sous-ensemble restreint d'éléments, non comparables entre eux. Il se peut que ce sous-ensemble ne renferme qu'un seul élément (le "meilleur"), mais dans les situations complexes qui correspondent aux problèmes réels (nombre élevé des candidats à sélectionner, critères donnant lieu à des classements antagonistes), le décideur devra, ensuite, choisir au sein du sous-ensemble l'élément qui lui paraît le mieux correspondre à l'objectif qu'il s'est assigné (cette seconde étape peut conduire à la définition d'une nouvelle liste de critères).

ELECTRE n'a pas été conçue pour donner une solution optimale. Son objectif est plus modeste puisqu'il s'agit d'aider le décideur en lui fournissant un petit nombre de solutions qui constituent le meilleur compromis parmi toutes les autres solutions possibles¹.

Nous ne dirons rien de plus sur cette méthode qui fera l'objet d'un exposé détaillé dans ce document et dont le nom est, aujourd'hui, suivi du chiffre I. ELECTRE-I a évolué au cours des vingt dernières années ; s'adaptant à des situations de plus en plus complexes (ROY 1985), elle est devenue ELECTRE-II, III puis IV. Parallèlement aux travaux de l'école française, on assiste, aux Etats-Unis et en Europe, à l'émergence et à la croissance de techniques concurrentes dont le principe de fonctionnement fait une très large place à la programmation mathématique (goal programming, méthodes interactives).

Au terme de cette évolution, on peut imaginer la multiplicité des méthodes offertes au décideur. Mais il convient de noter que la structure interne des méthodes atteint un degré de sophistication de plus en plus important. Mais le degré de réalisme des résultats produits par un algorithme n'est pas nécessairement relié à son degré de complexité². D'autre part, une méthode trop complexe risque de compromettre le dialogue entre le décideur et l'homme d'étude.

Nous exposerons -en raison de leur simplicité- trois relations de surclassement et une procédure probabiliste. Mais avant d'aborder le détail de ces deux approches, il convient de préciser les différentes composantes d'un problème de décision en présence de critères multiples.

¹Lorsque l'on a recours à une fonction d'utilité pour modéliser les préférences du décideur, la solution donnée est dite "optimale". L'intérêt de la méthode ELECTRE est précisément de se passer de l'optimisation d'une telle fonction.

²La programmation mathématique multiobjectif (JOHNSON, 1969) utilise une fonction d'utilité dont les propriétés ne sont pas toujours vérifiées en pratique.

O - LE CONTEXTE MULTICRITERE DE LA PRISE DE DECISION.

O.1. FORMULATION DU PROBLEME.

On considère un ensemble fini I, noté :

$$I = \{1 \dots i \dots n\}$$

dont chaque élément, appelé objet, est apprécié selon différents points de vue, éléments de l'ensemble fini J tel que :

$$J = \{1 \dots j \dots m\}$$

Plus formellement, désignons par K_j l'ensemble structuré des modalités du point de vue j (i.e. l'ensemble ordonné de tous les résultats pouvant donner lieu à une appréciation des objets i selon j) un critère est une application qui, à chaque objet de I, fait correspondre un résultat de K_j .

Soit δ_j le critère correspondant au j^e point de vue

$$\begin{aligned} \delta_j : I &\longrightarrow K_j \\ i &\longrightarrow \delta_j(i) \end{aligned}$$

$\delta_j(i)$ représente l'appréciation de l'objet i d'après le point de vue j.

Par commodité les appréciations sont associées à des valeurs numériques : $K_j \subset \mathbb{R}^+$.

Les $\delta_j(i)$ sont des valeurs précises : une différence minime sur K_j est significative d'une préférence stricte de la part du décideur. Soit deux objets i et k, on suppose que :

$$\delta_j(i) > \delta_j(k) \Rightarrow i \text{ est strictement préféré à } k \text{ selon } j.$$

$$\delta_j(i) = \delta_j(k) \Rightarrow i \text{ est jugé équivalent à } k \text{ selon } j.$$

δ_j est un critère vrai. On emploie cette expression (JACQUET-LAGREZE, ROY, 1981) par opposition à la notion de pseudo-critère qui implique des appréciations imprécises (par exemple, $\gamma_j(i)$ est définie par un intervalle de K_j). On ne s'intéresse ici qu'aux critères vrais. Par conséquent, chaque critère δ_j définit un préordre total sur I.

Cette source d'information est représentée par la matrice :

$$\Delta = [\delta_{j,i}]$$

$n \times m$

où il est d'usage d'attribuer les lignes aux objets i et les colonnes aux points de vue j .

L'information est complétée par la prise en compte d'un vecteur de pondération :

$$P = (p(j) / j \in J)$$

où $p(j)$ désigne le poids associé au point de vue j .

A l'instar des termes de la matrice Δ , les composantes de P sont généralement représentées par des valeurs numériques de telle manière que $\forall j, \forall j' \in J$:

$p(j) > p(j') \Rightarrow j$ est plus important que j'

$p(j) = p(j') \Rightarrow j$ est de même importance que j'

L'information de base est donc complètement spécifiée par le couple (Δ, P) qui représente un m-tuple de structures pondérées sur I (les m préordres associés aux m critères pondérés).

0.2 OBJECTIF

Une méthode d'analyse multicritère est une application qui, au m-tuple de structures pondérées sur I , fait correspondre une structure unique sur I :

$$(\Delta, P) \xrightarrow[\text{d'analyse multicritère}]{\text{méthode}} \text{structure unique sur } I$$

Les méthodes exposées dans le cadre de ce travail retiennent comme structure unique :

i) soit une dichotomie sur I : le premier sous-ensemble contient le (ou les) objet(s) à sélectionner, le second regroupe les solutions éliminées.

ii) ou/et un classement des objets par ordre décroissant de préférence (ordre total ou préordre total sur I).

0.3. NATURE DE L'INFORMATION A TRAITER

Jusqu'à présent, nous nous sommes contentés de dire que les $\delta_j(i)$ représentaient des valeurs numériques. Il convient maintenant de préciser avec soin la nature de ces nombres.

Un même nombre possède deux significations différentes :

- un sens cardinal
- un sens ordinal

que l'on dit recouper la distinction traditionnellement établie entre :

- critères quantitatifs,
- critères qualitatifs.

Si le critère δ_j est qualitatif, les modalités de K_j peuvent s'exprimer par des mots (par exemple, "très mauvais", ..., "moyen", ..., "très bon") auxquels sont associés des nombres³ pour insister sur l'ordre qui existe entre ces mots. Les $\delta_j(i)$ sont des nombres ordinaux. Ils ne sont pas dotés de structure algébrique, ce qui interdit a priori l'usage d'opérations arithmétiques sur de tels nombres.

Manipuler des nombres selon les règles de l'arithmétique, n'a de sens que si l'information portée par les colonnes de Δ est de nature cardinale. On rejoint ici le groupe des critères quantitatifs. Mais cette catégorie n'est pas homogène. Il faut établir une distinction entre :

- critères repérables,
- critères mesurables.

Les critères repérables sont des critères quantitatifs, mais les nombres qui définissent les modalités des K_j possèdent une étroite parenté avec les nombres ordinaux. En particulier, les rapports entre de tels nombres ne possèdent pas de signification rigoureuse. La température en un lieu, à un instant donné, est un exemple de critère repérable ; une température de 40°C n'est pas deux fois plus chaude qu'une température de 20°C (la position de la valeur 0 est arbitraire).

Si δ_j est un critère repérable, nous qualifierons de "pseudo-cardinaux" les nombres $\delta_j(i)$ qui, à l'exclusion de

³ *Bien que cela ne soit pas indispensable.*

l'opérateur -, ne peuvent donner lieu à des manipulations selon les règles de l'arithmétique (l'écart entre deux nombres pseudo-cardinaux possède une signification, c'est l'amplitude de température entre deux pays, par exemple).

En toute rigueur, ces règles ne s'appliquent qu'aux nombres cardinaux.

$\delta_j(i)$ est un nombre cardinal si l'application δ_j est une mesure (δ_j est un critère mesurable). Une mesure possède au moins la propriété d'additivité, i et k n'ayant aucune partie en commun :

$$\delta_j(i \cup k) = \delta_j(i) + \delta_j(k)$$

Le poids est une mesure : le poids total de deux objets différents est égal à la somme des poids individuels. On peut affirmer, en outre, qu'un objet de 40 kg est deux fois plus lourd qu'un objet de 20 kg.

Ces remarques s'appliquent évidemment à l'application p qui, à chaque point de vue j , fait correspondre le nombre $p(j)$:

- $p(j)$ est un nombre cardinal si p est une mesure,
- $p(j)$ est un nombre pseudo-cardinal si la correspondance établie par le décideur entre j et l'importance de ce point de vue est de nature repérable,
- $p(j)$ est un nombre ordinal si la correspondance s'effectue d'une manière purement qualitative.

0.4. PREDOMINANCE DU NON-MESURABLE.

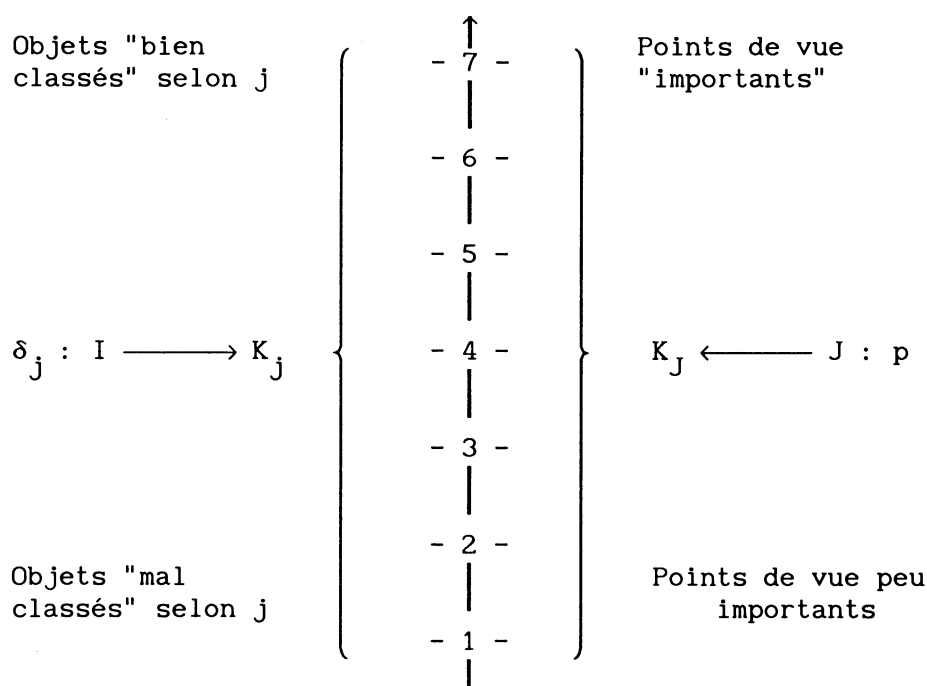
Lorsque (Δ, P) produit une source d'information purement cardinale et que, en outre, les K_j sont tous dotés de la même unité de mesure, l'établissement d'une structure unique sur I est immédiatement résolu par la méthode des sommes pondérées⁴. Mais en pratique ce type d'information est très rare ; l'emploi assez fréquent des sommes pondérées s'explique plus par la simplicité de la procédure que par une réflexion visant à justifier le caractère mesurable des applications δ_j et p . La performance dans telle matière j , même lorsqu'elle est évaluée

⁴ qui consiste à affecter à chaque objet i la valeur $\delta(i) = \sum [p(j) \cdot \delta_j(i) \mid j \in J]$. Les objets sont ensuite rangés par valeurs décroissantes des $\delta(i)$.

par une note, n'est pas un critère mesurable ; $\delta_j(i) = 20$ ne prouve pas que l'élève i est nécessairement deux fois plus "fort" que l'élève k . Partant de là, établir un classement général des élèves par la méthode des sommes pondérées n'est pas une procédure rigoureusement justifiée.

En fait, la détermination des $\delta_j(i)$ et des $p(j)$ appartient le plus souvent au domaine du non-mesurable. Elle contient par conséquent une certaine part de subjectivité que le décideur pourra réduire en faisant intervenir des experts⁵ ou en procédant à des enquêtes⁶.

Dans le cas présent nous admettrons que les termes de Δ , ainsi que les composantes de P , sont des nombres compris entre 1 et 7. Les ensembles K_j associés aux m points de vue sont donc représentés par des échelles comportant sept échelons. L'échelle d'évaluation des points de vue comporte également le même nombre d'échelons et sera notée K_j (l'intérêt de ce type d'échelle est discuté par OSGOOD and al., 1957).



⁵ Utilisée à des fins de prévision, la méthode DELPHI (voir par exemple DALKEY, 1969) peut également s'appliquer à la pondération des points de vue.

⁶ Voir par exemple le cas présenté par J.P. GREMY (in SUSSMAN, 1967) en ce qui concerne le classement des objets selon les différents points de vue.

Cette technique d'évaluation est très commode et doit être utilisée lorsqu'on ne dispose pas d'un "instrument de mesure" pour apprécier les objets selon les différents points de vue et affecter une structure de pondération à ces derniers. L'information qui en résulte est essentiellement de nature ordinale.

Les méthodes d'aide à la décision conçues spécialement pour s'adapter à ce genre de données sont peu nombreuses.

1 - APPROCHE FONDEE SUR LES RELATIONS DE SURCLASSEMENT

En toute rigueur, les relations exposées ici s'appliquent :

- à des critères repérables,
- à des pondérations mesurables.

1.1. CONCEPTS DE BASE.

1.1.1. Ensemble de concordance, ensemble de discordance.

- Soit i et k deux éléments de I . Pour savoir si l'objet i surclasse l'objet k , on commence par ranger les points de vue en accord avec l'option : " i est au moins aussi bon que k " dans un sous-ensemble de J , noté $C(i, k)$:

1.(1) $C(i, k) = \{j \in J / \delta_j(i) \geq \delta_j(k)\}$
et appelé "ensemble de concordance".

- Le sous-ensemble de J complémentaire à $C(i, k)$ est appelé "ensemble de discordance". Noté $D(i, k)$:

1.(2) $D(i, k) = \{j \in J / \delta_j(i) < \delta_j(k)\}$
l'ensemble de discordance regroupe, par définition, les points de vue pour lesquels k est strictement préféré à i .

1.1.2. Indicateur de concordance.

Les poids de chaque point de vue étant traduit par un nombre

cardinal, on peut définir l'importance numérique du sous-ensemble de concordance par la somme :

$$1.(3) \quad c(i, k) = \sum [\pi(j) \mid j \in C(i, k)]$$
$$\text{où } \pi(j) = p(j) / \sum [p(j) \mid j \in J]$$

$c(i, k)$ représente l'indicateur de concordance associé à l'hypothèse : "i surclasse k".

La définition de l'indicateur de concordance est complétée par la convention :

$$1.(4) \quad c(i, k) = 0 \quad \text{si } C(i, k) = \emptyset .$$

de telle manière que :

$$1.(5) \quad c(i, k) \in [0, 1]$$

On admettra d'autant plus facilement l'hypothèse de surclassement que la valeur de l'indicateur de concordance sera proche de 1. Cependant, la prise en compte de cet indicateur dans la construction des relations de surclassement ne saurait suffire à qualifier la présente approche d'"analyse de la concordance" (voir par exemple NIJKAMP, 1986 qui utilise cette expression quelque peu restrictive).

Une forte valeur de l'indicateur de concordance est une condition nécessaire, mais non suffisante pour accepter définitivement l'hypothèse de surclassement. Même si les critères concordants sont nombreux, encore faut-il que ces derniers imposent leur option avec une certaine "vigueur". D'autre part, il apparaît difficile de négliger la façon dont les critères discordants rejettent l'option de la majorité.

1.1.3. Adhésion, opposition.

Les critères étant repérables, l'écart séparant deux échelons quelconques d'une même échelle possède une certaine signification.

Donc si $j \in C(i, k)$, on définit l'adhésion de ce j^e point de vue concordant par la différence $\delta_j(i) - \delta_j(k)$. Symétriquement, la différence $\delta_j(k) - \delta_j(i)$ représente l'opposition manifestée par $j \in D(i, k)$.

Lorsque toutes les échelles possèdent la même hauteur h , on considère les amplitudes relatives :

$$1.(6) \quad a_j(i, k) = (\delta_j(i) - \delta_j(k)) / h$$

$$1.(7) \quad o_j(i, k) = (\delta_j(k) - \delta_j(i)) / h$$

de telle manière que la plus grande adhésion possible (respectivement, la plus grande opposition possible) soit égale à 1.

1.2. TROIS RELATIONS DE SURCLASSEMENT.

Une relation de surclassement est une relation binaire dont la vérification dépend d'un certain nombre de conditions. Si toutes les conditions sont réalisées, on dira que i surclasse k , et l'on traduira cette situation dans un graphe en reliant i et k par un arc (de i vers k). Dans le cas contraire (i.e. si au moins une des conditions n'est pas satisfaite), i ne surclasse pas k et aucun arc ne relie les deux sommets dans le graphe de surclassement.

$$i \text{ surclasse } k ? \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{oui : } i \circ \longrightarrow \bullet k \\ \text{non : } i \bullet \quad \quad \bullet k \end{array} \right.$$

On se limitera ici à la prise en compte de deux conditions de surclassement.

La première condition, commune à toutes les méthodes, est la condition de concordance (l'indicateur du même nom doit être assez proche de 1). La seconde condition fait intervenir les oppositions des points de vue discordants sans qu'il soit fait référence aux adhésions des points de vue concordants (méthodes ELECTRE I et Im) ou, au contraire, en tenant compte de ces dernières (méthode SPARTE).

Pour l'instant, nous ne dirons rien de plus sur cette seconde condition de surclassement qui fait la spécificité des méthodes exposées dans ce paragraphe.

Nous rappellerons d'abord la relation de surclassement utilisée par ELECTRE-I. Cette méthode a donné lieu à de nombreuses publications (BENAYOUN, ROY, SUSSMAN, 1966, ROY, 1968 et 1969) et à des applications

variées (voir par exemple les cas reproduits dans SUSSMAN, 1967). On examinera ensuite une variante de cette méthode, baptisée ELECTRE-Im du nom de l'opérateur "médiane" (m) employé pour simplifier la définition de la relation de surclassement de la méthode mère. Nous terminerons en présentant la relation de surclassement de la méthode SPARTE. Dans sa première version (SPARTE-I, FUSTIER, 1981), cette technique était conçue pour le traitement de critères mesurables bien que ses principales applications aient concerné des critères repérables ! Paradoxalement les résultats ont été jugés plutôt satisfaisants⁷. Plus conforme à l'esprit de l'analyse multicritère (ANTOINE et ROY, 1969 ; BERTIER et de MONTGOLFIER, 1971), la seconde version (SPARTE II, FUSTIER, 1986) propose des indicateurs de synthèse respectant la nature repérable des critères. Nous retiendrons ici la relation de surclassement de SPARTE-II sous une forme légèrement simplifiée.

1.2.1. ELECTRE-I

Les points de vue discordants sont rangés dans l'ordre décroissant des oppositions définies par 1.(7) (à titre de simplification on considère que toutes les échelles possèdent la même hauteur).

Soit s un nombre entier positif, appelé paramètre de discordance, on note $D^s(i, k)$ le sous-ensemble de $D(i, k)$ obtenu en éliminant de ce dernier les $s-1$ points de vue les plus discordants.

Les auteurs d'ELECTRE-I définissent alors l'indicateur de discordance (que nous pouvons encore appeler indicateur d'opposition des critères discordants⁸) par le coefficient suivant :

⁷ La première application se réfère à l'analyse de la prescription médicale (FUSTIER, 1983). La sélection des médicaments les plus "performants" a été confirmée par voie d'enquête. Un autre cas concerne la localisation d'un laboratoire d'analyses médicales en zone urbaine (BINZACK, 1983). La solution retenue a permis le calcul du chiffre d'affaires prévisionnel que l'établissement réalisa en fin de compte.

⁸ Pour insister sur le fait que le présent indicateur n'est pas le résultat d'une somme comme c'est le cas pour l'indicateur de concordance.

$$1.(8) \quad o^S(i, k) = \max [o_j(i, k) \mid j \in D^S(i, k)]$$

$o^S(i, k)$ représente donc l'opposition du s^e point de vue le plus discordant.

Notons que $D^1(i, k) = D(i, k)$, donc $o^1(i, k)$ n'est autre que l'opposition du point de vue le plus discordant.

Par convention :

$$1.(9) \quad D^S(i, k) = \emptyset \Rightarrow o^S(i, k) = 0$$

donc

$$1.(10) \quad o^S(i, k) \in [0, 1]$$

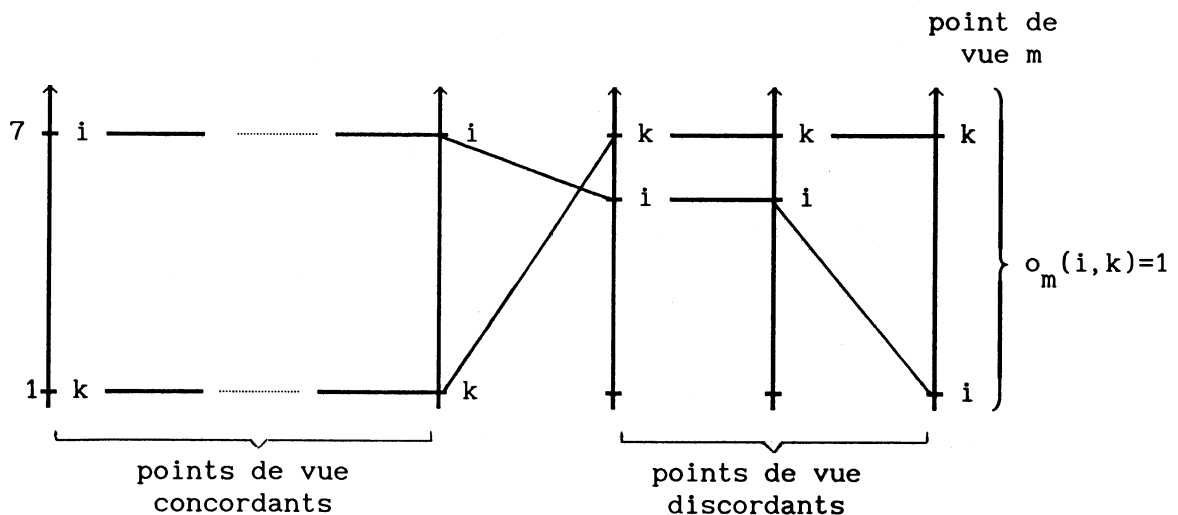
Soit p et q des nombres de l'intervalle $[0, 1]$:

- p est appelé seuil de concordance (sa valeur est proche de 1).
- q est appelé seuil de discordance (ou d'opposition, sa valeur est voisine de 0).

La relation de surclassement a pour expression :

$$1.(11) \quad i \text{ surclasse } k \Leftrightarrow c(i, k) \geq p \text{ et } o^S(i, k) \leq q$$

Le rôle du paramètre de discordance est d'éviter qu'un point de vue peu important impose le refus d'une option proposée à une très grande majorité comme c'est le cas sur la figure suivante :



Supposons que $c(i, k) = 0,90$ et $\pi(m) = 0,01$. A des seuils de surclassement très réalistes, par exemple $p = 0,85$ et $q = 0,20$, on

refuse le surclassement de k par i car $o^1(i, k) = o_m(i, k) = 1$. Ce résultat surestime grandement le rôle du point de vue m qui représente seulement $0,01/0,10 = 10\%$ de l'importance numérique des points de vue discordants. Il apparaît normal d'augmenter la valeur du paramètre de discordance et d'admettre en fin de compte l'hypothèse que i surclasse k (on vérifie que $o^2(i, k) = 0,17 < 0,20$).

L'intérêt du paramètre de discordance est incontestable lorsque les échelles possèdent la même hauteur, car comme nous venons de le constater un point de vue minoritaire au sein de la minorité peut manifester son opposition par une valeur égale à 1. Encore faut-il être en mesure de pouvoir visualiser les profils de chaque paire d'objets à comparer pour détecter ce point de vue contestataire. La procédure implique des exemples de petites dimensions. Mais pour des cas plus compliqués elle devient fastidieuse, sinon impossible. Donc, faute de pouvoir identifier le s^e point de vue le plus discordant, le passage au $(s + 1)^e$ risque d'éliminer (à tort) les points de vue les plus représentatifs de l'ensemble de discordance.

En revanche, le rôle du paramètre s se pose avec moins d'acuité pour des échelles ayant des hauteurs spécifiques h_j . En effet, dans ce cas, on veillera à ce que la hauteur d'une échelle reflète l'importance du point de vue associé. Si $p(j) < p(j')$ alors $h_j < h_{j'}$. En posant $h^* = \max(h_j | j \in J)$ puis en définissant l'opposition du critère discordant j par :

$$1. (12) \quad o_j(i, k) = (\delta_j(k) - \delta_j(i)) / h^*$$

on évitera ainsi que $o_j(i, k)$ atteigne la valeur 1 lorsque $p(j)$ est faible.

Dans ces conditions, l'utilité du paramètre de discordance reste à démontrer. Bien plus, on peut se demander s'il n'introduit pas une complication superflue au niveau de l'interprétation des surclassements réalisés.

En effet, considérons un premier surclassement obtenu aux seuils p, q compte tenu d'une valeur s du paramètre de discordance. Soit un second surclassement réalisé pour les valeurs suivantes : $p' < p, q' > q$ avec $s' = s$. Le premier surclassement est, sans aucune ambiguïté, plus fiable que le second. Maintenant supposons que, toutes choses égales par

ailleurs, $s' < s$: les surclassements ne sont plus rigoureusement comparables sur la base de leur fiabilité.

La variante d'ELECTRE-I proposée ci-dessous, ne fait plus allusion au paramètre de discordance.

1.2.2. ELECTRE - Im

Cette technique diffère seulement de la précédente par la définition de l'indicateur de discordance (ou d'opposition).

Non paramétré, l'indicateur de discordance doit néanmoins prendre en compte le plus grand nombre possible de points de vue discordants sans agréger les désaccords correspondants.

Il apparaît alors naturel de définir le nouvel indicateur de discordance, noté $m(i, k)$, par la médiane pondérée des oppositions manifestées par les critères discordants. Soit \mathcal{M} l'opérateur "médiane", on a :

$$1.(13) \quad m(i, k) = \mathcal{M} [(o_j(i, k), p(j)) \mid j \in D(i, k)] .$$

Dans cette expression, le couple $(o_j(i, k), p(j))$ signifie que la valeur $o_j(i, k)$ se répète, en ce qui concerne le calcul de la médiane, autant de fois que l'indique le nombre $p(j)$. En d'autres termes, chaque opposition est affectée du poids du point de vue qui lui correspond.

Par convention, on pose :

$$1.(14) \quad D(i, k) = \emptyset \Rightarrow m(i, k) = 0$$

de telle manière que :

$$1.(15) \quad m(i, k) \in [0, 1]$$

Finalement :

$$1.(16) \quad \boxed{i \text{ surclasse } k \Leftrightarrow c(i, k) \geq p \text{ et } m(i, k) \leq q}$$

La relation 1.(16) est conforme à la philosophie du respect de la minorité prônée par ELECTRE-I et que M.MARC (1966) exprime par ce raccourci : "même si cette minorité est peu nombreuse, fortement brimée, elle descend dans la rue, mitraille au poing".

Mais dans certaines circonstances, le droit de veto ainsi accordé à la minorité peut être remis en question comme nous allons le voir avec

la dernière relation de surclassement.

1.2.3. SPARTE

Une hypothèse peut être acceptée même si la minorité manifeste une vive opposition ; il suffit que la majorité impose l'option avec une détermination au moins aussi importante que celle exprimée par la minorité pour la refuser.

Pour formuler cette idée, on définit un indicateur d'adhésion, noté $m'(i, k)$, en tout point symétrique à l'indicateur d'opposition donné par 1.(13), soit :

$$1.(17) \quad m'(i, k) = M \left[(a(i, k), p(j) \mid j \in C(i, k)) \right]$$

avec, par convention :

$$1.(18) \quad C(i, k) = \emptyset \Rightarrow m'(i, k) = 0$$

de telle manière que :

$$1.(19) \quad m'(i, k) \in [0, 1]$$

Avec les notations adoptées précédemment, la relation de surclassement a pour expression :

$$1.(20) \quad \boxed{i \text{ surclasse } k \Leftrightarrow c(i, j) \geq p \text{ et } m'(i, k) \geq m(i, k)}$$

Remarque 1

Soit $M' = [m'(i, k)]$ la matrice carrée $(n \times n)$ des adhésions médianes, M' est appelée matrice d'adhésion,

et $M = [m(i, k)]$ la matrice carrée $(n \times n)$ des oppositions médianes, M est appelée matrice d'opposition.

Lorsque les critères établissent des ordres stricts sur I , on a :

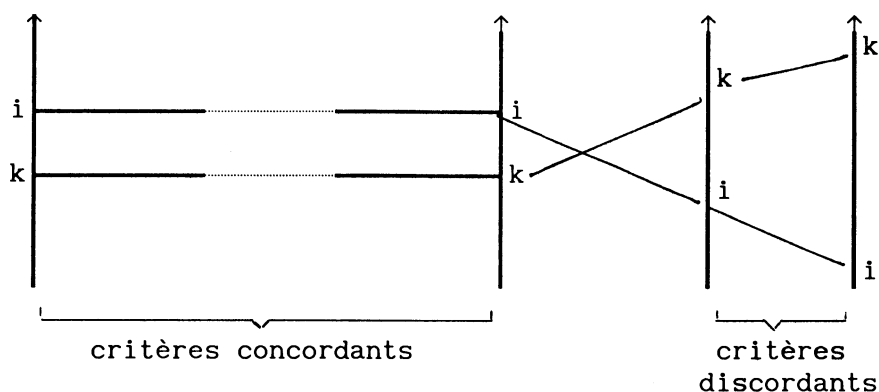
$$1.(21) \quad M' = {}^t M$$

où ${}^t M$ est la matrice transposée de M .

En effet, dans ce cas : $C(i, k) = D(k, i)$, donc : $m'(i, k) = m(k, i)$.

Remarque 2

La relation de surclassement ne comporte pas de seuil de discordance, mais il ne faut pas en déduire que les surclassements se réalisent uniquement en fonction de la force numérique des points de vue concordants. La condition $m'(i, k) \geq m(i, k)$ est somme toute assez sévère pour la majorité ; une "petite minorité bruyante" possède un droit de veto face à une "grosse majorité peu déterminée" (voir figure suivante) : i ne peut surclasser k .



Pour insister sur le sens qu'il convient d'accorder à cette seconde condition de surclassement, on construit la matrice logique $B = [b(i,k)]$ de dimensions $n \times n$, et dont le terme général est défini de la façon suivante :

$$1.(22) \quad b(i, k) = \begin{cases} 1 & \text{ssi } m'(i, k) \geq m(i, k) \\ 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

B est appelée matrice de possibilité, car seuls les couples (i, k) associés à la valeur 1 peuvent éventuellement être traduits par un arc dans un graphe de surclassement.

1.3. EXEMPLES D'APPLICATION.

On se limitera ici à la présentation des graphes de surclassement des méthodes ELECTRE-Im et SPARTE.

Les données sont les suivantes :

$$\Delta =$$

	$\mathbb{I} \backslash \mathbb{J}$	1	2	3	4
a		7	7	7	2
b		5	4	3	2
c		4	6	6	5
d		1	1	1	7

$$P = (7 \quad 4 \quad 5 \quad 2)$$

Soit $C = [c(i, k)]$ la matrice de concordance, on a :

\mathbb{I}	a	b	c	d
a	-	1	0,89	0,89
b	0,11	-	0,39	0,89
c	0,11	0,61	-	0,89
d	0,11	0,11	0,11	-

Les matrices d'adhésion et d'opposition définies plus haut sont les suivantes :

$$M' =$$

\mathbb{I}	a	b	c	d
a	-	0,42	0,17	1
b	0	-	0,17	0,50
c	0,50	0,50	-	0,83
d	0,83	0,83	0,33	-

$$M =$$

\mathbb{I}	a	b	c	d
a	-	0	0,50	0,83
b	0,50	-	0,50	0,83
c	0,17	0,17	-	0,33
d	1	0,50	0,83	-

De M' et M on déduit :

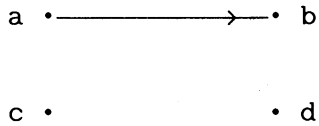
$$B =$$

\mathbb{I}	a	b	c	d
a	-	1	0	1
b	0	-	0	0
c	1	1	-	1
d	0	1	0	-

Les graphes de surclassement sont donc les suivants :

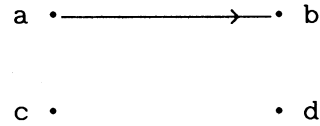
ELECTRE-Im

$p = 1 ; q = 0 :$



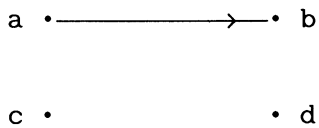
SPARTE

$p = 1$



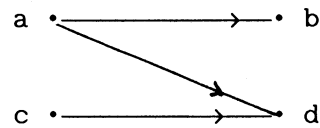
ELECTRE-Im

$p = 0,80 ; q = 0,20$



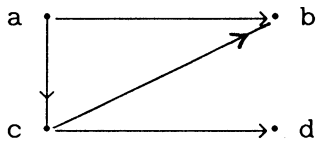
SPARTE

$p = 0,80$



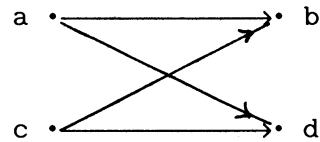
ELECTRE-Im

$p = 0,60 ; q = 0,50$



SPARTE

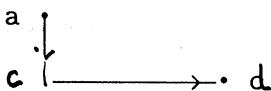
$p = 0,60$



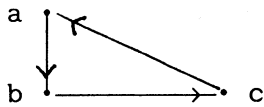
1.4. PRINCIPALES CARACTERISTIQUES DES RELATIONS DE SURCLASSEMENT.

Lorsque les conditions de surclassement sont rigoureuses, les cas d'incomparabilité sont nombreux (ils surviennent le plus fréquemment lorsque la règle de l'unanimité est imposée). Lorsqu'on atténue la sévérité des seuils, des cas d'incomparabilité subsistent : les graphes correspondants sont, en général, non complets (même si ceux-ci admettent comme graphes partiels les graphes obtenus à des seuils plus rigoureux). La relation de surclassement ne possède donc pas la propriété de transitivité.

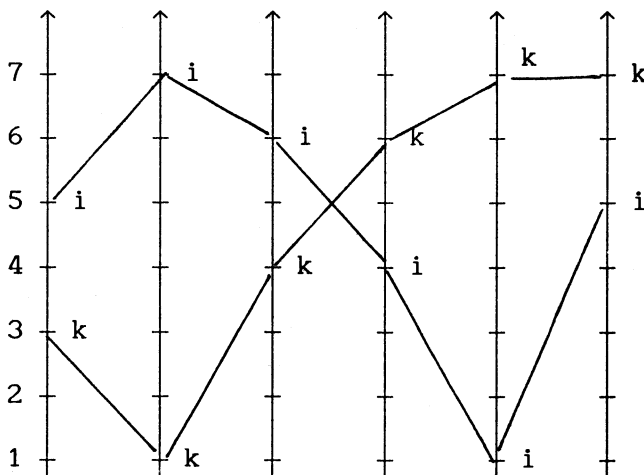
La relation d'ELECTRE-Im ($p = 0,60 ; q = 0,50$) présente un tel cas d'intransitivité :



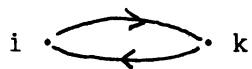
Il n'est donc pas exclu que le graphe de surclassement puisse comporter des circuits :



Considérons, par exemple, le cas illustré sur la figure suivante (les points de vue sont d'égale importance) :



ELECTRE-Im ($p = 0,60$; $q = 0,33$) et SPARTE ($p = 0,60$) aboutissent à un surclassement réciproque :



Un circuit représente une situation d'indifférence quant au choix des éléments composants ce circuit.

Notons bien que la situation d'indifférence décrite précédemment est fondée non pas sur la similitude des profils (objets équivalents), mais sur leur opposition ; la symétrie des antagonismes manifestée par deux groupes de critères est telle que le choix entre i et k peut être considéré comme indifférent.

En résumé, toute relation de surclassement définit une structure de préférence sur I (VINCKE 1985). En effet, en considérant l'hypothèse que


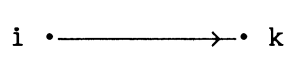
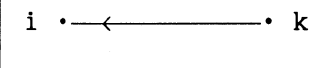

i surclasse k et l'hypothèse alternative, puis en notant :

> la préférence stricte

|| l'incomparabilité

= l'équivalence (indifférence du choix parmi les objets jugés équivalents)

on a une seule des possibilités suivantes :

		k surclasse i ?	
		oui	non
i s u r c l a s s e k ?	oui	 <p>$i = k$</p>	 <p>$i > k$</p>
	non	 <p>$k > i$</p>	 <p>$i k$</p>

1.5. EXPLOITATION DES GRAPHES DE SURCLASSEMENT.

Il s'agit de déterminer une structure unique sur I ou, plus précisément, des structures qui évoluent en fonction des seuils plus ou moins sévères assignés aux conditions de surclassement.

Dans la plupart des applications, un classement par niveau d'intérêt serait souhaitable. Malheureusement, les graphes de surclassement ne permettent pas d'établir directement⁹ un tel résultat. Il faut alors convenir de règles précises¹⁰ ou de procédures

⁹ Au paragraphe précédent, nous avons constaté que les relations de surclassement n'étaient pas réductibles à des structures de préordres complets.

¹⁰ Voir, par exemple, le classement de la méthode ELECTRE-II (ROY et BERTIER 1971) ou celui de SPARTE-II (FUSTIER 1986).

plus empiriques¹¹, mais dans tous les cas on ne peut éviter le recours aux postulats sous-jacents aux définitions qui, dans une large mesure, dépendent du bon vouloir de l'analyste (ou, plus exactement, de l'idée qu'il se fait d'un "bon classement").

Pour cette raison, nous privilégierons la structure beaucoup plus simple adoptée par ELECTRE-I et qui se ramène à une partition de I en deux sous-ensembles :

- le premier, appelé noyau, contient les objets non surclassés (et parmi eux l'objet "le meilleur") ;

- le second formé des objets surclassés (et qui, à coup sûr, ne contient pas la solution idéale).

En option, nous proposerons une procédure de classement (parmi tant d'autres). A cette procédure nous voyons qu'une seule justification : la simplicité.

1.5.1. Noyau d'un graphe.

* *Propriétés :*

Soit $G = (I, U)$ un graphe de surclassement où U représente l'ensemble des arcs obtenus à des seuils donnés p, q (ou p).

Le noyau de G, noté S, est le sous-ensemble de I pour lequel les propriétés suivantes sont satisfaites :

1) *Propriété de stabilité interne :*

$$\forall i, \forall k \in S : (i, k) \notin U$$

les éléments de S sont jugés incomparables.

2) *Propriété de stabilité externe :*

$$\forall i' \in I - S : \exists i \in S / (i, i') \in U$$

¹¹ On pourra consulter l'intéressante tentative de GREMY fondée sur l'analyse des matrices de concordance et d'opposition d'ELECTRE-I (in SUSSMANN 1967).

tout objet situé en dehors du noyau est surclassé par au moins un des objets de S.

Soit $S(p ; q)$ et $S(p)$ les noyaux des graphes obtenus aux conditions de surclassement indiquées par ELECTRE-Im et SPARTE. D'après l'exemple d'application donné en 1.3., on obtient :

ELECTRE-Im :

$S(1 ; 0)$	=	{a, c, d}
$S(0,80 ; 0,20)$	=	{a, c, d}
$S(0,60 ; 0,50)$	=	{a}

SPARTE :

$S(1)$	=	{a, c, d}
$S(0,80)$	=	{a, c}
$S(0,60)$	=	{a, c}

Ces résultats suscitent deux remarques :

1) Supposons que le problème de décision concerne uniquement le choix de la plus mauvaise solution. Pour ELECTRE-Im et SPARTE, il s'agit de l'objet b. Dans les deux cas la décision est prise à l'unanimité des points de vue. Pour la méthode des sommes pondérées, on vérifie qu'il s'agit de l'objet d ($\delta(d) = \min [\delta(i) \mid i \in I] = 30$). En toute rigueur, le décideur devrait opter en faveur du résultat des deux premières méthodes sachant que les critères ne sont pas mesurables.

2) Revenons au problème plus courant du choix de la meilleure solution. L'examen des résultats précédents montre que, compte tenu des divergences exprimées par les deux méthodes, le décideur peut sélectionner a ou c. Mais le choix entre ces deux objets n'est pas réductible à une situation d'indifférence. On sait seulement que a et c sont incomparables. Le décideur devra donc rechercher de nouveaux points de vue pour départager les deux objets¹² (ou tout du moins pour les rendre comparables, un surclassement réciproque n'étant pas exclu).

La définition du noyau ne conduit donc pas, sauf cas particuliers, à la mise en évidence directe du meilleur objet.

¹² A moins qu'il n'impose son "propre" point de vue (liberté de choix du décideur).

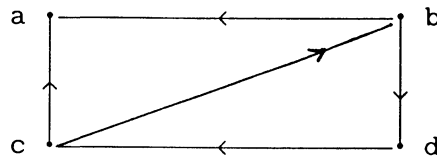
* *Conditions d'existence et d'unicité :*

On démontre (BERGE 1963) que le noyau d'un graphe existe et est unique si le graphe :

- 1) possède un nombre fini de sommets,
- 2) est dépourvu de circuits.

La condition (1) est toujours vérifiée dans les applications ; la condition (2) ne l'est pas toujours. Par exemple, le graphe suivant ne possède pas de noyau :

$G = (I, U) :$



* *Rétrécissement des circuits :*

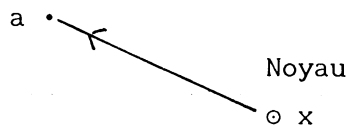
Soit X le sous-ensemble de I formé des objets reliés par un circuit ; d'après l'exemple précédent $X = \{b, c, d\}$. Si les conditions de surclassement ne sont pas trop lâches, on peut considérer que les éléments de X sont équivalents (le circuit représente une situation d'indifférence). Dans ces conditions, les éléments sont remplacés par un sommet fictif, noté x , et appelé le condensé de X (ROY 1969).

Du graphe $G = (I, U)$ on passe -par condensation de X - au graphe sans circuit $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$. Par définition $\bar{I} = (I - X) \cup \{x\}$. L'ensemble des arcs de \bar{G} est obtenu de la manière suivante. Soit $(i, k) \in U :$

- si $i \notin X$ et $k \notin X$ alors $(i, k) \in \bar{U}$
- si $i \notin X$ et $k \in X$ alors $(i, x) \in \bar{U}$
- si $i \in X$ et $k \notin X$ alors $(x, i) \in \bar{U}$

D'après l'exemple précédent :

$\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U}) :$



Les éléments du noyau étant considérés comme équivalents, on obtient, dans ce cas particulier, le pré-ordre complet : $\{b, c, d\} > \{a\}$

Remarque :

Si G comporte plusieurs circuits, l'ordre dans lequel on procède pour les éliminer est indifférent.

1.5.2. Option du classement.

Dans le graphe G, notons :

$d^+(i)$ le demi-degré extérieur du sommet i (= nombre d'arcs incidents extérieurement au sommet i).

$d^-(i)$ le demi-degré intérieur du sommet i (= nombre d'arcs incidents intérieurement au sommet i).

Nous conviendrons d'appeler "influence" du sommet i dans G, le coefficient $u(i)$ tel que :

$$1.(23) \quad u(i) = [d^+(i) - d^-(i)] / n - 1$$

$$1.(24) \quad u(i) \in [-1, 1]$$

($u(i) = 1$: i surclasse tous les autres sommets et n'est jamais surclassé. $u(i) = -1$: i est surclassé par tous les autres sommets et ne surclasse aucun sommet).

Puisque $\sum [d^+(i) \mid i \in I] = \sum [d^-(i) \mid i \in I]$, alors :

$$1.(25) \quad \sum [u(i) \mid i \in I] = 0$$

On définit un préordre sur I en rangeant les sommets G dans l'ordre décroissant des influences.

Remarque 1 :

Il n'est pas tenu compte des surclassements indirects (comme c'est le cas, par exemple, dans le classement fourni par SPARTE-II) ; les éventuels circuits ne remettent donc pas en cause la procédure de classement des sommets du graphe.

D'après l'exemple d'application on obtient :

ELECTRE-Im

$$p = 1 ; q = 0 :$$

i	u(i)
a	0,33
c,d	0
b	- 0,33

$$p = 0,80 ; q = 0 :$$

classement
inchangé

$$p = 0,60 ; q = 0,50 :$$

i	u(i)
a	0,67
c	0,33
d	- 0,33
b	- 0,67

SPARTE

$$p = 1 :$$

i	u(i)
a	0,33
c,d	0
b	- 0,33

$$p = 0,80 :$$

i	u(i)
a	0,67
c	0,33
b	- 0,33
d	- 0,67

$$p = 0,60 :$$

i	u(i)
a, c	0,67
b, d	- 0,67

Remarque 2 :

Les classements issus de SPARTE peuvent être synthétisés de la façon suivante :

Notons p_x la valeur du seuil de concordance correspondant au x^e graphe de surclassement et $u_x(i)$ l'influence du sommet i dans ce même graphe.

L'influence moyenne du sommet i dans les r premiers graphes est obtenue par :

$$1. (26) \quad \bar{u}(i) = \Sigma [p_x u_x(i) \mid x = 1 \dots r] / \Sigma (p_x \mid x = 1 \dots r)$$

On vérifie que :

$$1. (27) \quad \Sigma [\bar{u}(i) \mid i \in I] = 0$$

On obtient :

i	$\bar{u}(i)$
a	0,53
c	0,28
d	- 0,39
b	- 0,42

SPARTE : classement moyen

Cette procédure ne peut s'appliquer à ELECTRE-Im puisque p et q ne sont pas de même nature.

2 - APPROCHE PROBABILISTE : LA METHODE REGIME

A la différence des techniques utilisant des relations de surclassement, REGIME ne produit pas une suite de résultats, mais un classement définitif. Moins "soft" que les précédentes, cette méthode récente (HINLOOPEN and all. 1983, HINLOOPEN and SMYTH 1985, NIJKAMP 1986) possède le très grand avantage de s'adapter à n'importe quel type de données :

- nous examinerons d'abord le cas général : les termes de la matrice Δ et du vecteur P sont des nombres ordinaux ;

- en second lieu, REGIME sera adaptée à une situation fréquemment rencontrée en pratique : la matrice Δ contient à la fois des nombres ordinaux (pour les critères qualitatifs) et des nombres cardinaux (lorsque les critères sont mesurables).

Sur le plan de la compréhension, REGIME ne présente aucune difficulté. Le seul aspect qui peut éventuellement rebuter l'utilisateur est celui du calcul lorsqu'il s'agit d'évaluer la probabilité pour que tel objet soit meilleur qu'un autre. Aussi, dans chacun des cas énumérés précédemment, on commencera par donner un petit exemple qui sera progressivement résolu "à la main". Pour des applications plus importantes, il faudra recourir à des algorithmes spécifiques (voir ZELENY 1974).

2.1. DONNEES ORDINALES.

Exemple :

$$\Delta = \begin{array}{c|ccc} & \text{J} & & \\ \hline \text{I} & & & \\ \hline \text{a} & 5 & 4 & 1 \\ \text{b} & 5 & 1 & 3 \\ \text{c} & 1 & 7 & 5 \end{array}$$

$$P = (7 \quad 4 \quad 3)$$

2.1.1. Evaluation des adhésions et des oppositions.

La matrice Δ contient exclusivement des nombres ordinaux ; le calcul des adhésions ou des oppositions selon 1.(6) ou 1.(7) ne possède aucune signification.

Pour apprécier l'adhésion ou l'opposition du point de vue j à l'hypothèse :

i est meilleur que k ,

on considère uniquement le signe $s_j(i, k)$ de la différence $\delta_j(i) - \delta_j(k)$

$$2.(1) \quad s_j(i, k) = \begin{cases} + 1 & \text{si } \delta_j(i) > \delta_j(k) \\ 0 & \text{si } \delta_j(i) = \delta_j(k) \\ - 1 & \text{si } \delta_j(i) < \delta_j(k) \end{cases}$$

Si l'on fait intervenir l'ensemble des m points de vue, on obtient la matrice S des signes :

$$2.(2) \quad S = \begin{array}{c} [s_j(i, k)] \\ m \times n(n - 1) \end{array}$$

$n(n - 1)$ est le nombre A_n^2 de tous les couples (i, k) qui correspondent à l'hypothèse " i est meilleur que k ".

Concrètement :

	(a, b)	(a, c)	(b, a)	(b, c)	(c, a)	(c, b)
1	0	+ 1	0	+ 1	- 1	- 1
2	+ 1	- 1	- 1	- 1	+ 1	+ 1
3	- 1	- 1	+ 1	- 1	+ 1	+ 1

Remarque :

Puisque $s_j(i, k) = -s_j(k, i)$, il suffit de considérer la matrice $S' = [s_j(i, k)]$ de format $n \times n(n-1)/2$ où $n(n-1)/2$ est le nombre C_n^2 de toutes les paires d'objets à comparer. Ayant testé l'hypothèse "i est meilleur que k", on déduit automatiquement l'information (+ 1, 0 ou - 1) correspondant à l'hypothèse alternative). D'après l'exemple précédent, S' est déduite de S par suppression des couples (b, a), (c, a) et (c, b).

2.1.2. Le vecteur stochastique des pondérations.

Faute de pouvoir définir avec certitude la structure cardinale des pondérations, notée :

$$2.(3) \quad P^* = (p^*(j) \mid j \in J),$$

le décideur l'estime par la structure ordinale :

$$2.(4) \quad P = (p(j) \mid j \in J)$$

Les $p^*(j)$ sont des variables aléatoires dont les réalisations sont supposées conformes à la structure ordinale des estimations :

$$2.(5) \quad \forall j, j' \in J : p(j) \geq p(j') \Rightarrow p^*(j) \geq p^*(j')$$

En vue de faciliter les calculs ultérieurs, on admet que les composantes de P^* sont normalisées :

$$2.(6) \quad \forall j \in J : p^*(j) \geq 0 \\ \max [p^*(j) \mid j \in J] = 1$$

D'après l'exemple donné au début du paragraphe, on a :
 $p(1) > p(2) > p(3)$. Les vecteurs suivants : $P_1^* = (1 \ 0,9 \ 0,8)$,
 $P_2^* = (1 \ 0,5 \ 0,4)$, $P_3^* = (1 \ 0,2 \ 0,1)$ etc... satisfont aux conditions
imposées par 2.(5) et 2.(6).

En l'absence de plus amples précisions, on suppose que chaque vecteur a autant de chance de se réaliser que tout autre vecteur répondant à la contrainte définie par l'ordre des $p(j)$. En d'autres termes, les $p^*(j)$ sont uniformément distribuées¹³ dans les domaines de variation délimités par 2.(5) et 2.(6).

2.1.3. Classement des objets.

La vérification de l'hypothèse "i est meilleur que k" dépend du signe de l'expression :

$$2.(7) \quad v(i, k) = \sum [s_j(i, k) p^*(j) \mid j \in J]$$

En effet, si le décideur connaissait avec certitude la structure cardinale des pondérations, on aurait :

$$2.(8) \quad v(i, k) > 0 \Rightarrow i \text{ est meilleur que } k$$

Mais dans le contexte d'incertitude qui caractérise la réalisation des $p^*(j)$, le signe de 2.(7) ne peut être déterminé qu'en probabilité.

Par conséquent, en notant $p(i, k)$ la probabilité de l'événement "i est meilleur que k", on a :

$$2.(9) \quad p(i, k) = \text{Prob} [v(i, k) > 0]$$

Par extension, la probabilité pour que i soit "globalement" meilleur que tout autre objet de I, est définie par la probabilité moyenne $p(i)$ telle que :

$$2.(10) \quad p(i) = \sum [p(i, k) \mid k \in I - \{i\}] / n - 1$$

¹³ Cette hypothèse fondée sur le principe de "raison insuffisante" est souvent employée en théorie statistique de la décision (critère de LAPLACE : voir par exemple GREEN et TULL, 1974 p. 27-28).

Le classement final est obtenu en rangeant les éléments de I dans l'ordre décroissant des $p(i)$.

Remarque :

Par définition :

$$\text{Prob} ["k \text{ est meilleur que } i"] = 1 - \text{Prob} ["i \text{ est meilleur que } k"]$$

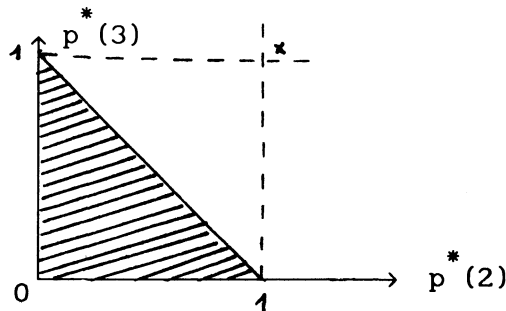
donc :

$$2. (11) \quad p(k, i) = 1 - p(i, k)$$

Poursuivant l'exemple de référence on obtient :

- $v(a, b) = p^*(2) - p^*(3)$
 $p(a, b) = \text{Prob} [v(a, b) > 0]$
 $= \text{Prob} [p^*(2) > p^*(3)]$
 or $p(2) > p(3) \Rightarrow p^*(2) > p^*(3)$
 donc $p(a, b) = 1$
 et $p(b, a) = 0$

- $v(a, c) = 1 - p^*(2) - p^*(3)$
 $p(a, c) = \text{Prob} [p^*(3) < 1 - p^*(2)]$



$$p(a, c) = \text{aire du triangle } 011 / \text{aire du carré } 01 \times 1$$

$$p(a, c) = 1/2$$

$$p(c, a) = 1/2$$

- $v(b, c) = 1 - p^*(2) - p^*(3) = v(a, c)$
 $p(b, c) = p(a, c) = 1/2$
 $p(c, b) = 1/2$

Finalement :

$$p(a) = \left[1 + \frac{1}{2} \right] / 2 = 0,75$$

$$p(b) = \left[0 + \frac{1}{2} \right] / 2 = 0,25$$

$$p(c) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] / 2 = 0,50$$

ce qui implique : $\{a\} > \{c\} > \{b\}$

2.2. DONNEES MIXTES.

Jusqu'à présent on considérait que l'ensemble J regroupait des points de vue de même nature. Dans ce paragraphe on admet la coexistence de points de vue qualitatifs et quantitatifs. En outre, les points de vue quantitatifs sont supposés correspondre à des critères mesurables.

La nature ordinale des pondérations étant généralement la règle dans les études de cas, la mixité des données concernera uniquement la matrice Δ .

Exemple :

Considérons le problème d'implantation d'une école primaire en zone rurale. Le décideur (Rectorat) hésite entre deux communes : a et b.

Deux critères de localisation sont pris en compte :

- critère 1 (mesurable) : "distance de la commune i à une source de nuisance indésirable" (si $\delta_1(i) > \delta_1(k)$, il est clair que i est préféré à k avec une intensité d'autant plus grande que la différence $\delta_1(i) - \delta_1(k)$ est importante).

- critère 2 (qualitatif) : "agrément du site".

On estime que : $p(1) = 4$ et $p(2) = 1$.

L'information à traiter est la suivante :

$$\Delta = \begin{array}{c|cc} & \text{J} & \\ \hline \text{I} & & \\ \hline \text{a} & 20 \text{ km} & 2 \\ \text{b} & 8 \text{ km} & 7 \end{array}$$

$$P = (4 \quad 1)$$

2.2.1. Evaluation des adhésions et des oppositions pour les critères mesurables.

Pour des mesures que nous supposons finies, l'adhésion ou l'opposition d'un point de vue j à l'hypothèse que i est meilleur que k , est exprimée par :

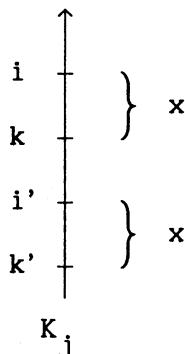
$$2.(12) \quad d_j(i, k) = [\delta_j(i) - \delta_j(k)] / \max [\delta_j(i), \delta_j(k)]$$

On vérifie immédiatement :

$$2.(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_j(i) < \delta_j(k) \Rightarrow d_j(i, k) \in [-1, 0[: \text{opposition} \\ \delta_j(i) = \delta_j(k) \Rightarrow d_j(i, k) = 0 : \text{point de vue neutre} \\ \delta_j(i) > \delta_j(k) \Rightarrow d_j(i, k) \in]0, 1] : \text{adhésion} \end{array} \right.$$

Supposons que $\delta_j(i) > \delta_j(k)$.

Pour les critères repérables, la différence $\delta_j(i) - \delta_j(k)$ est divisée par une constante (h) : l'adhésion du point de vue j est donc la même quelle que soit la portion d'échelle où l'on constate une telle différence. L'exemple suivant donne : $a_j(i, k) = a_j(i', k')$.



En utilisant 2.(12) on obtient : $d_j(i, k) < d_j(i', k')$, puisque :

$\delta_j(i) > \delta_j(i')$. Cette expression tient compte, en effet du rapport des mesures qui varie le long de l'échelle considérée. Posons $r = \delta_j(i) / \delta_j(k)$. Si $\delta_j(i) > \delta_j(k)$, 2.(12) est équivalente à :

$$d_j(i, k) = 1 - 1/r$$

L'adhésion de j est une fonction croissante de r . Si l'objet k est affecté d'une mesure nulle, r tend vers l'infini et $d_j(i, k) = 1$ (adhésion maximale). Dans le cas particulier où $r = 1$, j est un point de vue neutre.

Les remarques précédentes s'appliquent, d'une manière symétrique, au cas où $\delta_j(i) < \delta_j(k)$.

2.2.2. Caractère probabiliste des adhésions et des oppositions pour les critères non mesurables.

Pour ce type de critère, les $d_j(i, k)$ sont des variables aléatoires dont les réalisations sont supposées respecter le classement des objets pour les points de vue correspondants. Ces variables possèdent une loi de probabilité uniforme.

En résumé :

$$2.(14) \quad \delta_j(i) \geq \delta_j(k) : d_j(i, k) \text{ est uniformément distribuée sur } [0, 1]$$

$$2.(15) \quad \delta_j(i) < \delta_j(k) : d_j(i, k) \text{ est uniformément distribuée sur } [-1, 0[$$

2.2.3. Classement des objets.

A 2.(7) on substitue l'expression analogue :

$$2.(16) \quad w(i, k) = \sum [d_j(i, k) p^*(j) \mid j \in J]$$

Dans le cas présent on a :

$$d_1(a, b) = \frac{20 - 8}{20} = 0,6$$

$$\text{donc } w(a, b) = 0,6 + d_2(a, b) p^*(2)$$

$$(\text{puisque } p(1) > p(2) \Rightarrow p^*(1) = 1 > p^*(2))$$

La probabilité pour que i soit meilleur que k s'écrit :

$$2.(17) \quad p(i, k) = \text{Prob} [w(i, k) > 0]$$

On vérifie que :

$$2.(18) \quad p(k, i) = 1 - p(i, k).$$

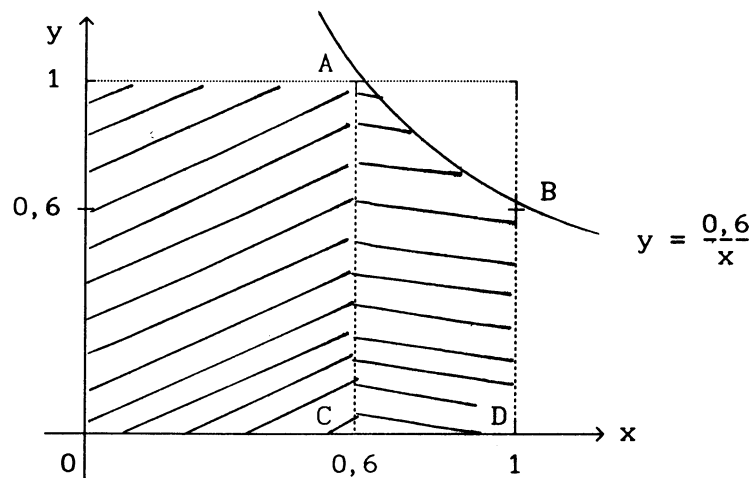
Dans le cas présent :

$$p(a, b) = \text{Prob} [-d_2(a, b) p^*(2) < 0,6]$$

$$\text{ou } p(a, b) = \text{Prob} \left[y < \frac{0,6}{x} \right]$$

avec $y = p^*(2)$ et $x = -d_2(a, b) > 0$ puisque $\delta_2(a) < \delta_2(b)$.

x est uniformément distribuée sur $]0, 1[$.



$$\text{donc } p(a, b) = 0,6 + \text{aire } A B C D$$

$$= 0,6 + 0,6 \int_{0,6}^1 \frac{dx}{x}$$

$$= 0,6 \left[1 + \left(\text{Log } x \right)_{0,6}^1 \right]$$

$$= 0,906$$

$$\text{et } p(b, a) = 0,094$$

Les probabilités moyennes $p(i)$ sont calculées conformément à 2.(10). Cette dernière étape est superflue si $\text{card } I = 2$:

$$\begin{aligned} p(a) &= p(a, b) = 0,906 \\ p(b) &= p(b, a) = 0,094 \end{aligned} \Rightarrow \{a\} > \{b\}$$

CONCLUSION

Les méthodes d'aide à la décision utilisant des relations de surclassement ne conduisent pas directement à la solution idéale. Le décideur doit, en général, arbitrer entre deux types de situations :

- structures grossières (noyaux comportant de nombreux sommets, classements sommaires en quelques classes d'équivalence) obtenues à des seuils de surclassement rigoureux (p proche de 1 et q voisin de 0) ;
- structures plus fines définies par des conditions de surclassement plus lâches.

La multiplicité des résultats produits¹⁴ et l'effort d'interprétation demandé au décideur sont de petits inconvénients qu'il convient d'accepter si l'on souhaite profiter de la souplesse de l'outil d'analyse et de la liberté de manoeuvre qu'il procure au décideur.

En revanche, l'approche probabiliste exige un moindre effort d'interprétation des résultats puisque ceux-ci sont présentés sous la forme d'un classement définitif. Notons que le contexte "soft" de la production des résultats au sens de la première approche n'est pas totalement abandonné ici, car la structure unique est construite d'après les probabilités de "surclassement" global de chaque objet. On peut donc penser que le décideur conserve une certaine marge de manoeuvre quant au choix de la solution finale.

Sur le plan théorique, l'approche probabiliste est parfaitement adaptée au traitement de données ordinales. En présence de critères purement qualitatifs nous savons que la préférence exprimée par l'inégalité $\delta_j(i) = 7 > \delta_j(k) = 1$ doit être traitée de la même façon que

¹⁴ Mis à part le classement moyen de SPARTE.

$$\delta_j(i) = 2 > \delta_j(k) = 1.$$

Néanmoins, l'absence de toute nuance dans l'expression des préférences du décideur peut paraître choquante, et on peut finalement se demander si l'approche fondée sur les relations de surclassement n'est pas en droit de tricher un peu avec la véritable nature de l'ordinal.

BIBLIOGRAPHIE

ANTOINE, J. et ROY, B. 1969. Les techniques préparatoires de la décision, intérêt et limites. Revue Projet.

BENAYOUN, R. ROY, B. et SUSSMAN, B. 1966. ELECTRE : une méthode pour guider le choix en présence de points de vue multiples. Note de travail n° 49 de la direction scientifique de la SEMA.

BERGE, C. 1963. Théorie des graphes et ses applications, 2ème édition, Dunod, Paris.

BERTIER, P. et de MONTGOLFIER, J. 1971. Comment choisir en tenant compte de points de vue non commensurables. Analyse et prévision.

BINZACK, P. 1983. Application de la méthode SPARTE à la localisation d'un laboratoire d'analyses médicales, Mémoire de maîtrise, Faculté de Science Economique et de Gestion, Dijon.

DALKEY, H. 1969. An Experimental Study of Group Opinion : the DELPHI Method, Futures, n° 5.

FUSTIER, B. 1981. Une méthode d'analyse multicritère : SPARTE, Document de Travail de l'I.M.E., n° 49, Dijon.

FUSTIER, B. 1983. Nouvelle théorie de la demande et prescription médicale ; le cas des normolipémiants. Actes de la table ronde de médicométrie régionale, Les Diablerets, Suisse.

FUSTIER, B. 1986. Classement en présence de critères multiples : SPARTE II, Document de Travail de l'I.M.E., n° 87, Dijon.

GREEN, P.E. et TULL, D.S. 1974. Recherche et décisions en marketing, Presses universitaires de Grenoble.

HINLOOPEN, E. NIJKAMP, P. and RIETVELD, P. 1983. Qualitative Discrete Multiple Criteria Choice Models in Regional Planning. Regional Science and Urban Economics, vol. 13, 77-102.

HINLOOPEN, E. and SMYTH, A.W. 1985. A Description of the Principles of a New Multicriteria Evaluation Technique, the REGIME Method, in Proceedings Colloquium Vervoersplanologisch Speurwerk, Delft, 430-441.

JACQUET-LAGREZE, E. et ROY, B. 1981. Aide à la décision multicritère et systèmes relationnels de préférences, in Analyse et agrégation des préférences dans les sciences sociales, économiques et de gestion, Economica, Paris, 255-278.

JOHNSON, E. 1969. Studies in Multiobjective Decision Models, Student Litterature, Lund, Sweden.

MARC, M. 1966. La recherche opérationnelle appliquée à l'élaboration des plans média. Actes du séminaire de l'Institut de Recherches et d'Etudes Publicitaires.

NIJKAMP, P. 1986. New Decision Methods for Transportation and Spatial Interaction Analysis. Rapport ronéoté, Amsterdam.

OSGOOD, C.E. SUCI, G.J. and TANNENBAUM, P.H. 1957. The Measurement of Meaning, University of Illinois Press, Urbana.

ROY, B. 1968. Classement et choix en présence de critères multiples (la méthode ELECTRE), RIRO, n° 2, 57-7?

ROY, B. 1969. Algèbre moderne et théorie des graphes, tome 1, Dunod, Paris.

ROY, B. 1985. Méthodologie multicritère d'aide à la décision. Economica, coll. Gestion, Paris.

ROY, B. et BERTIER, P. 1971. La méthode ELECTRE-II : une méthode de classement en présence de critères multiples. METRA, Direction scientifique, note de travail n° 142.

SUSSMAN, B. 1967. Peut-on choisir en tenant compte de critères multiples ? Une méthode (ELECTRE) et trois applications. METRA, vol. 6, n° 2, 283-316.

VINCKE, P. 1985. La modélisation des préférences, Document de Travail de l'I.M.E., n° 83, Dijon.

ZELENY, M. 1974. Linear Multiobjective Programming, Springer, Berlin.

LISTE DES DOCUMENTS DEJA PUBLIES

- n° 1 **Michel PREVOT** : Théorème du point fixe. Une étude topologique générale (*juin 1974*).
- n° 2 **Daniel LEBLANC** : L'introduction des consommations intermédiaires dans le modèle de LEFEBER (*juin 1974*).
- n° 3 **Colette BOUMON** : Spatial equilibrium of the sector in quasi-perfect competition (*September 1974*).
- n° 4 **Claude PONSARD** : L'imprécision et son traitement en analyse économique (*septembre 1974*).
- n° 5 **Claude PONSARD** : Economie urbaine et espaces métriques (*septembre 1974*).
- n° 6 **Michel PREVOT** : Convexité (*mars 1975*).
- n° 7 **Claude PONSARD** : Contribution à une théorie des espaces économiques imprécis (*avril 1975*).
- n° 8 **Aimé VOGT** : Analyse factorielle en composantes principales d'un caractère de dimension n (*juin 1975*).
- n° 9 **Jacques THISSE et Jacky PERREUR** : Relation between the point of maximum profit and the point of minimum total transportation cost : a restatement *July 1975*).
- n° 10 **Bernard FUSTIER** : L'attraction des points de vente dans des espaces précis et imprécis (*juillet 1975*).
- n° 11 **Régis DELOCHE** : Théorie des sous-ensembles flous et classification en analyse économique spatiale (*juillet 1975*).
- n° 12 **Gérard LASSIBILLE et Catherine PARRON** : Analyse multicritère dans un contexte imprécis (*juillet 1975*).
- n° 13 **Claude PONSARD** : On the axiomatization of fuzzy subsets theory (*July 1975*).
- n° 14 **Michel PREVOT** : Probability calculation and fuzzy subsets theory (*August 1975*).
- n° 15 **Claude PONSARD** : Hiérarchie des places centrales et graphes flous (*avril 1976*).
- n° 16 **Jean-Paul AURAY et Gérard DURU** : Introduction à la théorie des espaces multiflous (*avril 1976*).
- n° 17 **Roland LANTNER, Bernard PETITJEAN et Marie-Claude PICHERY** : Jeu de simulation du circuit économique (*août 1976*).

- n° 18 **Claude PONSARD** : Esquisse de simulation d'une économie régionale : l'apport de la théorie des systèmes flous (*septembre 1976*).
- n° 19 **Marie-Claude PICHERY** : Les systèmes complets de fonctions de demande (*avril 1977*).
- n° 20 **Gérard LASSIBILLE et Alain MINGAT** : L'estimation de modèles à variation dépendante dichotomique. La sélection universitaire et la réussite en première année d'économie (*avril 1977*).
- n° 21 **Claude PONSARD** : La région en analyse spatiale (*mai 1977*).
- n° 22 **Dan RALESCU** : Abstract models for systems identification (*June 1977*).
- n° 23 **Jean MARCHAL et Frédéric POULON** : Multiplicateur, graphes et chaînes de Markov (*décembre 1977*).
- n° 24 **Pietro BALESTRA** : Determinant and inverse of a sum of matrices with applications in economics and statistics (*avril 1978*).
- n° 25 **Bernard FUSTIER** : Etude empirique sur la notion de région homogène (*avril 1978*).
- n° 26 **Claude PONSARD** : On the imprecision of consumer's spatial preferences (*April 1978*).
- n° 27 **Roland LANTNER** : L'apport de la théorie des graphes aux représentations de l'espace économique (*avril 1978*).
- n° 28 **Emmanuel JOLLES** : La théorie des sous-ensembles flous au service de la décision : deux exemples d'application (*mai 1978*).
- n° 29 **Michel PREVOT** : Algorithme pour la résolution des systèmes flous (*mai 1978*).
- n° 30 **Bernard FUSTIER** : Contribution à l'analyse spatiale de l'attraction imprécise (*juin 1978*).
- n° 31 **Phuoc TRANQUI** : Régionalisation de l'économie française par une méthode de taxinomie numérique floue (*juin 1978*).
- n° 32 **Louis de MESNARD** : La dominance régionale et son imprécision, traitement dans le type général de structure (*juin 1978*).
- n° 33 **Max PINHAS** : Investissement et taux d'intérêt. Un modèle stochastique d'analyse conjoncturelle (*octobre 1978*).
- n° 34 **Bernard FUSTIER et Bernard ROUGET** : La nouvelle théorie du consommateur est-elle testable ? (*janvier 1979*).
- n° 35 **Didier DUBOIS** : Notes sur l'intérêt des sous-ensembles flous en analyse de l'attraction de points de vente (*février 1979*).

- n° 36 Heinz SCHLEICHER : Equity analysis of public investments : pure and mixed game-theoretic solutions (*April 1979*).
- n° 37 Jean Jaskold GABSZEWICZ : Théories de la concurrence imparfaite : illustrations récentes de thèmes anciens (*juin 1979*).
- n° 38 Bernard FUSTIER : Contribution à l'étude d'un caractère statistique flou (*janvier 1980*).
- n° 39 Pietro BALESTRA : Modèles de régression avec variables muettes explicatives (*janvier 1980*).
- n° 40 Jean-Jacques LAFFONT : Théorie des incitations, un exemple introductif (*février 1980*).
- n° 41 Claude PONSARD : L'équilibre spatial du consommateur dans un contexte imprécis (*février 1980*).
- n° 42 Jean-Marie HURIOT : Rente foncière et modèles de production (*avril 1980*).
- n° 43 Claude PONSARD : Fuzzy economic spaces (*April 1980*).
- n° 44 Alain KIRMAN : Imperfect communication in markets. A big world problem (*April 1980*).
- n° 45 Michel PREVOT : Variétés différentielles (*mai 1980*).
- n° 46 Claude PONSARD : Producer's spatial equilibrium with a fuzzy constraint (*May 1980*).
- n° 47 Michel PREVOT : Théorie des catastrophes (*mai 1980*).
- n° 48 Bernadette MARECHAL : Recherche de la forme d'un modèle à retards échelonnés. Application à la fonction d'investissement (*novembre 1980*).
- n° 49 Bernard FUSTIER : Une méthode d'analyse multicritère, SPARTE (*mars 1981*).
- n° 50 Jan SERCK-HANSEN : On the optimal capital/labour ratios in towns when demands for outputs are stochastics (*May 1981*).
- n° 51 Claude PONSARD : Partial spatial equilibria with fuzzy constraints (*May 1981*).
- n° 52 Xavier FREIXAS : Révélation des préférences dans l'allocation de biens publics (*juillet 1981*).
- n° 53 Bernard ROUGET : Equilibre spatial de consommation : quelques résultats (*novembre 1981*).
- n° 54 Louis PHILIPS : Welfare and price discrimination : optimal departures from uniform pricing (*November 1981*).

- n° 55 **Bernard FUSTIER** : Une introduction à la théorie de la demande floue (*janvier 1982*).
- n° 56 **Louis de MESNARD** : Séries temporelles et flou (*janvier 1982*).
- n° 57 **Claude PONSARD et Phuoc TRANQUI** : La régionalisation de l'économie européenne (*février 1982*).
- n° 58 **Manuel José VILARES** : A macroeconomic model with structural change and disequilibrium. A study of the economic consequences of the portuguese revolution of 1974 (*March 1982*).
- n° 59 **Pierre HANJOUL et Jacques-François THISSE** : La localisation de la firme sur un réseau (*septembre 1982*).
- n° 60 **Bernard VERMOT-DESROCHES** : Modèles d'interaction spatiale et théorie de l'interdépendance globale (*novembre 1982*).
- n° 61 **Henry ZOLLER et Jean PAELINCK** : Logement et qualités. Une analyse statique à court terme (*novembre 1982*).
- n° 62 **Jean-Marie HURIOT** : Rentes différentielles et rente absolue : un réexamen (*avril 1983*).
- n° 63 **Claude PONSARD** : Spatial fuzzy consumer's behavior : multi-dimensional analysis (*June 1983*).
- n° 64 **Maryse GADREAU et Bernadette MARECHAL** : Fonction de production, productivité et progrès technique à l'hôpital, une étude statistique par catégories d'établissements (*novembre 1983*).
- n° 65 **Claude PONSARD** : A theory spatial general equilibrium in a fuzzy economy (*April 1984*).
- n° 66 **Bernard FUSTIER** : Imprécision et modèles gravitaires de comportement (*mai 1984*).
- n° 67 **Bernadette MATHIEU** : Fuzzy expected utility (*June 1984*).
- n° 68 **Jacques LESOURNE** : La science économique et l'auto-organisation (*juillet 1984*).
- n° 69 **Peter M. SCHULZE** : Quantitative analysis of labour market relations for the federal republic of Germany (*October 1984*).
- n° 70 **Luc-Norman TELLIER, Xavier CECCALDI et François TESSIER** : Simulation des phénomènes de polarisation et de répulsion à partir du problème de Weber (*novembre 1984*).
- n° 71 **Alberto HOLLY** : Test d'exogénéité (*novembre 1984*).
- n° 72 **Bernadette MATHIEU-NICOT et Michel PREVOT** : Note sur les classes de similitude (*janvier 1985*).

- n° 73 **Elie SADIGH** : La formation du capital et le financement de l'amortissement chez Walras et Keynes (*février 1985*).
- n° 74 **Bernard FUSTIER et Bernard ROUGET** : Approche de la notion de centralité urbaine : le cas de l'agglomération dijonnaise (*février 1985*).
- n° 75 **Pierre SALMON** : The logic of pressure groups and "federalism" (*mars 1985*).
- n° 76 **André KELLER et Bernadette MARECHAL** : Propriétés spectrales des filtres usuels en économie : désaisonnalisation par Census X11, et différences d'ordre d (*avril 1985*).
- n° 77 **Jean-Marie HURIOT et Jacques-François THISSE** : La distance en analyse spatiale : une approche axiomatique (*mai 1985*).
- n° 78 **Alain MINGAT et Pierre SALMON** : La tendance politique des grandes villes : conséquence ou cause de la répartition de la population dans les agglomérations ? (*juin 1985*).
- n° 79 **Yorgo PAPAGEORGIU** : Spatial public goods - I. Theory (*October 1985*).
- n° 80 **Yorgo PAPAGEORGIU** : Spatial public goods - II. Applications (*October 1985*).
- n° 81 **Gérard CHARREAUX et J.P. PITOL-BELIN** : La théorie contractuelle des organisations : une application au conseil d'administration (*novembre 1985*).
- n° 82 **C.S. BERTUGLIA, G. LEONARDI et R. TADEI** : Dynamic analysis of transport - location interrelationships : theory and models (*November 1985*).
- n° 83 **Philippe VINCKE** : La modélisation des préférences (*décembre 1985*).
- n° 84 **Elie SADIGH** : La dépense du profit et le dysfonctionnement du système économique (*janvier 1986*).
- n° 85 **Elie SADIGH** : Réalisation de la rente et généralisation du surplus dans le système de Walras (*février 1986*).
- n° 86 **Jean-Claude GARLANDIER et Bernard ROUGET** : Influence économique et concurrence au sein d'une agglomération (*février 1986*).
- n° 87 **Bernard FUSTIER** : Classement en présence de critères multiples : SPARTE II (*avril 1986*).
- n° 88 **Jean-Marie HURIOT** : Land rent, production and land use (*July 1986*).

- n° 89 **DE MESNARD Louis** : L'accessibilité comme signal quantité dans les schémas de rationnement et de distribution décentralisés (*septembre 1986*).
- n° 90 **Pierre SALMON** : L'instrumentalisme en économie (*octobre 1986*).
- n° 91 **Pierre SALMON** : The theory of informal transactions in bureaucracies : some qualifications (*October 1986*).
- n° 92 **Urs SCHWEIZER** : Litigation and settlement II : Stability and other criteria (*October 1986*).
- n° 93 **Edmond MALINVAUD** : Capital productif, incertitudes et profitabilité (*novembre 1986*).
- n° 94 **Claude PONSARD** : Modèles mathématiques flous en économie (*novembre 1986*).
- n° 95 **Bernard FUSTIER** : Segsoft (*janvier 1987*).
- n° 96 **Antoine-Bertrand BILLOT** : Myopic planner, aggregation rule with fuzzy preorders, May's theorem with minimal step of implication (*March 1987*).
- n° 97 **Jean-Claude GARLANDIER et Bernard ROUGET** : Configuration spatiales et structure économique d'agglomération. Test d'un indicateur d'influence (*avril 1987*).
- n° 98 **Pierre SALMON** : Decentralization as an incentive scheme (*April 1987*).
- n° 99 **Agnès GAHITTE** : Axiomatics and construction on the central place system (*May 1987*).
- n° 100 **Pierre SALMON** : Modèles, théories et arguments en économie (*novembre 1987*).
- n° 101 **Pietro BALESTRA et Marie-Claude PICHERY** : Naturally constrained reduced form and structural parameters estimation (*february 1988*).
- n° 102 **Claude PONSARD** : Note on the ranking of fuzzy numbers : conditions for a total order relation (*February 1988*).
- n° 103 **Michel PREVOT** : Programmation linéaire multiobjectif, un résumé (*février 1988*).
- n° 104 **Agnès GAHITTE** : Le problème des voies de communication dans le système des places centrales (*avril 1988*).
- n° 105 **Bernard FUSTIER** : Centralité, une approche méthodologique (*mai 1988*).
- n° 106 **Claude PONSARD** : Espace et conflit : le choix des investissements dans des régions à risques (*mai 1988*).

- n° 107 **Marc ROUBENS** : Group decision theory with convex combination of fuzzy evaluations (*May 1988*).
- n° 108 **Jean-Marie HURIOT, T.E. SMITH and J.F. THISSE** : Minimum-cost distances in spatial analysis (*June 1988*).
- n° 109 **Ghislain ROY** : Transformations stochastiques de la matrice des productions (*juin 1988*).
- n° 110 **Antoine BILLOT** : Convexité floue et coeur périphérique d'une économie d'échange (*novembre 1988*).
- n° 111 **Denis BABUSIAUX** : Financement des investissements et calculs de rentabilité (*novembre 1988*).
- n° 112 **Peter NIJKAMP, Jacques POOT and Jan Rouwendal** : R & D policy in space and time. A nonlinear evolutionary growth model (*November 1988*).
- n° 113 **Lise ROCHAIX** : Incertitude, asymétries informationnelles et recherche sur le marché des services médicaux (*mars 1989*).
- n° 114 **Claude PONSARD** : Some dissenting views on the transitivity of individual preference (*April 1989*).
- n° 115 **Bernard FUSTIER** : Aide à la décision en présence de critères non mesurables. Deux approches (*mai 1989*).
- n° 116 **Ghislain ROY** : Invariants, dérivées et formes multilinéaires (*juin 1989*).
- n° 117 **Jean-Marie HURIOT** : La rente de Thünen retrouvée. Quelques réflexions en histoire de la pensée spatiale (*août 1989*).