



HAL
open science

Recherche de la forme d'un modèle à retards échelonnés : application à la fonction d'investissement

Bernadette Maréchal

► **To cite this version:**

Bernadette Maréchal. Recherche de la forme d'un modèle à retards échelonnés : application à la fonction d'investissement. [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1980, 23 p., figures, bibliographie. hal-01533753

HAL Id: hal-01533753

<https://hal.science/hal-01533753v1>

Submitted on 6 Jun 2017

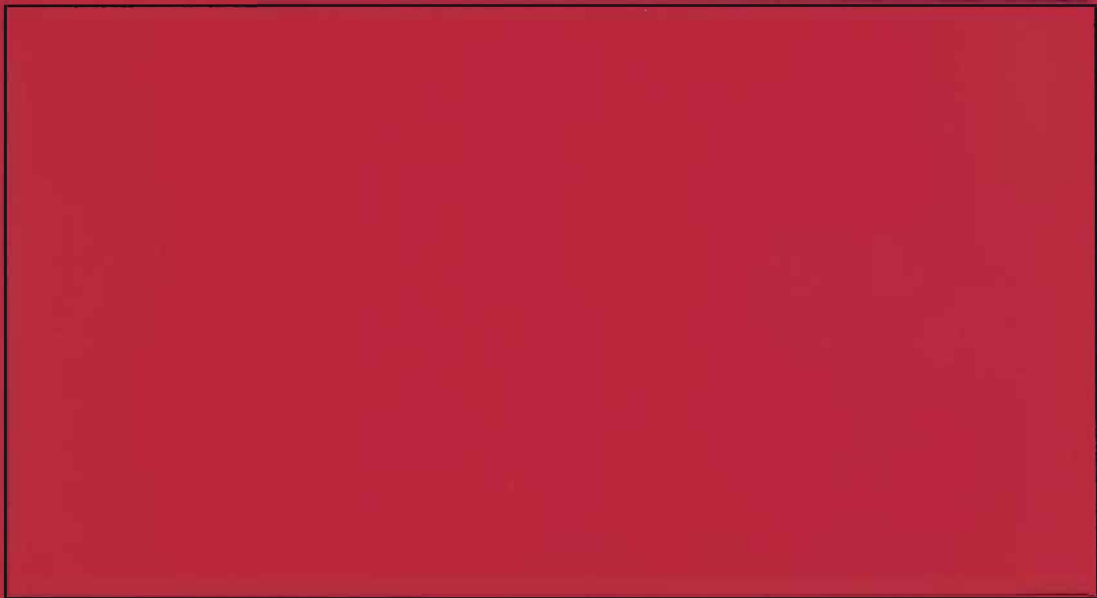
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

I.M.E.

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU C.N.R.S.

DOCUMENT DE TRAVAIL



INSTITUT DE MATHEMATIQUES ECONOMIQUES

UNIVERSITE DE DIJON

FACULTE DE SCIENCE ECONOMIQUE ET DE GESTION

4, BOULEVARD GABRIEL — 21000 DIJON

N°48

RECHERCHE DE LA FORME D'UN MODELE
A RETARDS ECHELONNES : APPLICATION
A LA FONCTION D'INVESTISSEMENT

Bernadette MARECHAL

novembre 1980

Cet article a fait l'objet d'une communication
au XIIème Colloque de l'Institut de Mathématiques
Economiques, le 28 novembre 1980.

L'auteur est assistante à l'Université de Dijon

Institut de Mathématiques Economiques - 4 Bd Gabriel - 21000 Dijon

L'étude des modèles à retards échelonnés a toujours été au centre des préoccupations aussi bien de l'économiste que de l'économètre.

Pour l'économiste, le modèle à retards échelonnés permet de traduire le fait que l'influence d'une variable économique sur une autre est généralement étalée sur plusieurs périodes tout en étant peut être décalée dans le temps. C'est sur cette idée que s'appuie, en matière d'investissement, la théorie des accélérateurs flexibles développée par les partisans du principe d'accélération(1), principe dont la version originale est due à J.M.CLARK [6].

Par suite, avant qu'une mesure de politique économique ne soit engagée (par exemple en vue de relancer les investissements), il est important d'en connaître l'impact total, c'est-à-dire d'une part la date à laquelle les premiers effets commenceront à être perçus et celle à laquelle ils seront perçus au maximum, d'autre part le nombre de périodes durant lesquelles ils seront perçus. C'est pourquoi dans le modèle théorique établi par l'économiste, il convient d'attribuer à chaque coefficient de régression une valeur numérique. Et c'est pour transformer le modèle théorique en modèle économétrique que l'on fait appel à l'économètre. Le modèle théorique se présente généralement sous la forme:

$$\begin{aligned}
 y_t &= \sum_{j=0}^{+\infty} a_j x_{t-j} + u_t \\
 &= (a_0 + a_1 L + \dots + a_j L^j + \dots) x_t + u_t \\
 &= A(L) x_t + u_t \qquad \qquad \qquad t=1,2,\dots
 \end{aligned}$$

où:

. L est l'opérateur de retard défini par:

$$L x_t = x_{t-1} ; L^j x_t = x_{t-j}$$

. u est un terme aléatoire dont les propriétés doivent être précisées.

Le rôle de l'économètre est alors de trouver des estimateurs asymptotiquement convergents pour les coefficients a_j . Mais avant

(1) C'est une relation technique entre les variations de la demande de biens de consommation et la demande de biens capitaux. Cette relation suppose un ajustement instantané du stock de capital à son niveau optimal.

d'estimer ces coefficients, il faut préciser le nombre de coefficients à estimer ainsi que les propriétés du terme aléatoire.

*En ce qui concerne le nombre de coefficients à retenir, de nombreuses spécifications ont été proposées, mais aucune ne s'appuie sur des résultats empiriques déjà établis. Au contraire, et pour reprendre une remarque de E.MALINVAUD: "...il importe de trouver des hypothèses commodes et admissibles pour la suite des coefficients ..." [29,p.480]. Par exemple, on supposait que tous les coefficients a_j étaient positifs, que le coefficient a_j était une fonction décroissante du retard j , etc. Ainsi les spécifications les plus couramment employées étaient:

. la distribution géométrique proposée par L.M.KOYCK [27] et définie par:

$$A(L) = \frac{a}{1 - bL}$$

. la distribution rationnelle proposée par D.W.JORGENSON [23] et définie par:

$$A(L) = \frac{U(L)}{W(L)} = \frac{u_0 + u_1L + \dots + u_nL^n}{w_0 + w_1L + \dots + w_nL^n}$$

avec $w_0 = 1$

. la distribution polynômiale proposée par S.ALMON [1] et qui consiste à ajuster un polynôme de degré q sur les coefficients a_j du modèle à retards échelonnés:

$$a_j = \beta_0 + \beta_1 j + \dots + \beta_q j^q = P(j) .$$

A l'exception de la première, l'emploi de la distribution rationnelle ou de la distribution polynômiale implique que soit au préalable déterminé le degré de chaque polynôme. A cette fin, le critère de la variance résiduelle minimale et le critère du coefficient de détermination sont les plus fréquemment retenus. Mais ce qui ne nous paraît pas reposer sur des bases solides c'est plus le choix d'une structure de retards particulière que la manière de déterminer le degré de chaque polynôme. Pourquoi rechercher des "hypothèses commodes et admissibles" plutôt qu'utiliser directement l'information contenue dans l'échantillon, échantillon qui n'est que la traduction chiffrée du phénomène que l'on cherche à expliquer? C'est ce que nous nous sommes proposée de faire à propos de la fonction d'investissement en France.

*Le second problème est relatif à la structure du terme aléatoire. A l'exception de la structure polynômiale, les deux autres conduisent à un modèle dont la forme finale est un modèle autorégressif. On doit alors se demander si le terme aléatoire doit être ajouté sur la forme originale ou sur la forme finale du modèle. Généralement, le terme aléatoire est ajouté sur la forme finale du modèle, et il satisfait aux conditions d'application de la méthode ordinaire des moindres carrés: "... l'hypothèse de non-corrélation à la fin de la procédure plutôt qu'au début ne peut être justifiée sur le plan économique" [18,p.38] . Il est vrai que, dans le cas d'erreurs autocorrélées sur la forme originale du modèle, des difficultés d'ordre technique peuvent apparaître lors de l'estimation des coefficients de ce modèle. Mais, si l'on veut que le modèle économétrique soit utile à l'économiste, ce risque ne mérite-t-il pas d'être pris?

Ainsi, jusqu'à présent, l'estimation des coefficients d'un modèle à retards échelonnés impliquait que soient au préalable posées des hypothèses assez contraignantes qui pouvaient, dans certains cas, être en contradiction avec le principe même du modèle à retards échelonnés. Nous allons montrer, dans une première partie, que les coefficients d'un modèle à retards échelonnés peuvent être estimés sans aucune information a priori ni sur les coefficients du modèle ni sur la structure du terme aléatoire. La méthode d'estimation employée est connue sous le nom de méthode de la régression spectrale. Elle a été développée par E.J.HANNAN [20] en 1965, puis reprise par G.S.FISHMAN [16] et P.J.DHRYMES [9] .

La seconde partie sera consacrée à l'application ou plus exactement à l'utilisation des résultats obtenus par la méthode de la régression spectrale. En d'autres termes, il s'agira de trouver à quelle fonction s'apparentent les coefficients d'un modèle à retards échelonnés, coefficients qui ont été estimés par la méthode de la régression spectrale.

(1) "... there is no strong economic argument for making the uncorrelation assumption at the end of the procedure rather than at the other". [18,p.38] .

1 - La méthode de la régression spectrale

Comme son nom l'indique, la méthode de la régression spectrale fait référence à l'analyse spectrale (1), et plus particulièrement à l'analyse spectrale croisée (2). Bien que cette méthode d'estimation soit très attrayante, elle n'a pratiquement jamais été employée dans des travaux économétriques français. Cependant, dès 1971, E.MALINVAUD et D.FOUQUET avaient compris l'avantage de l'emploi de l'analyse spectrale dans la recherche économétrique: "En permettant une étude très souple des délais qui interviennent dans les divers phénomènes considérés, l'analyse spectrale constituerait un guide au moment du choix de modèles appropriés" [30, p.44].

Le but de la méthode de la régression spectrale, rappelons-le, est d'estimer les coefficients d'un modèle à retards échelonnés sans aucune information a priori ni sur l'évolution temporelle des coefficients de régression, ni sur la structure du terme aléatoire.

11 - Les hypothèses de la méthode de la régression spectrale

Considérons le modèle à retards échelonnés très général:

$$(1.1) \quad y_t = \sum_{j=-r_1}^{r_2} a_j x_{t-j} + u_t \quad t=1, \dots, T$$

dont la représentation matricielle est:

$$(1.2) \quad Y = X A + U.$$

L'introduction de "retards négatifs" permet de prendre en compte l'influence des anticipations, mais l'étude peut très bien être conduite en ne retenant que des "retards positifs". Les hypothèses nécessaires à l'application de la méthode de la régression spectrale sont peu nombreuses, et surtout très peu contraignantes.

H1 - Les processus $\{y_t, t=1, \dots\}$, $\{x_t, t=1, \dots\}$ et $\{u_t, t=1, \dots\}$ sont centrés et stationnaires en covariance. La fonction d'autocovariance, et donc la fonction d'autocorrélation, ne dépendent que du décalage entre deux observations:

- (1) Etude des séries temporelles dans le domaine des fréquences [21] et [17].
 (2) Etude des relations entre les composantes de même fréquence [21] et [17].

$$K_x(\tau) = E [x_{t+\tau} x_t] \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Il en est de même pour la fonction de covariance croisée:

$$K_{xy}(\tau) = E [x_{t+\tau} y_t] \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

H2 - Il y a indépendance entre la variable exogène x et le terme aléatoire u :

$$f_{xu}(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in]-\pi, +\pi].$$

$f_{xu}(\lambda)$ représente le spectre croisé entre les processus $\{x_t, t=1, \dots\}$ et $\{u_t, t=1, \dots\}$. C'est la transformée de Fourier de la fonction de covariance croisée:

$$f_{xu}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau\lambda} K_{xu}(\tau).$$

H3 - Le spectre de puissance $f_u(\lambda)$ (1) du terme aléatoire u est toujours positif sur l'intervalle $]-\pi, +\pi]$, de telle sorte que la matrice Ω_u des variances-covariances des erreurs est une matrice définie positive et donc non-singulière.

H4 - Le spectre de puissance $f_u(\lambda)$ du terme aléatoire u est une fonction bornée possédant une série de Fourier absolument convergente. Il en est de même pour $f_u^{-1}(\lambda)$:

$$f_u^{-1}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \mu_p e^{ip\lambda}$$

avec:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} |\mu_p| < +\infty.$$

H5 - Le vecteur U des erreurs est distribué suivant une loi normale multivariée d'espérance mathématique nulle et de matrice des variances-covariances Ω_u :

$$U \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \Omega_u).$$

(1) ou transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance du terme aléatoire u soit:

$$f_u(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau\lambda} K_u(\tau).$$

Afin de faciliter l'exposé des démonstrations qui vont suivre donnons quelques résultats supplémentaires.

* On montre facilement que:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} f_x(\lambda) e^{i(k-k')\lambda} &= f_{x-k, x-k}(\lambda) \\ f_{xy}(\lambda) e^{i(k-k')\lambda} &= f_{x-k, x-k}(\lambda) . \end{aligned}$$

* Si $I_u(\lambda)$ désigne le périodogramme du processus $\{u_t, t=1, \dots\}$, alors:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} I_u(\lambda) &= \frac{1}{T} \left| \sum_{t=1}^T e^{-it\lambda} u_t \right|^2 \\ &= I_y(\lambda) + \sum_{j=-r_1}^{r_2} \sum_{j'=-r_1}^{r_2} a_j a_{j'} I_x(\lambda) e^{-i(j'-j)\lambda} \\ &\quad - 2 \sum_{j=-r_1}^{r_2} a_j I_{yx}(\lambda) e^{ij\lambda} . \end{aligned}$$

Pour obtenir ce résultat, il suffit de remplacer u_t par $(y_t - \sum_{j=-r_1}^{r_2} a_j x_{t-j})$ dans la définition de $I_u(\lambda)$.

A l'exception de l'hypothèse d'une distribution normale pour le terme aléatoire, les hypothèses nécessaires à l'application de la méthode de la régression spectrale ne concernent que les propriétés spectrales des variables retenues dans le modèle à retards échelonnés.

12 - Estimation du vecteur A des coefficients de régression a_j

Le vecteur \hat{A} des coefficients de régression recherché est celui qui maximise la fonction \mathcal{V} de vraisemblance (1), ou bien celui qui maximise le logarithme de cette fonction de vraisemblance dont l'expression est:

$$(1.5) \quad \text{Log } \mathcal{V} = K - \frac{1}{2} U' \Omega_u^{-1} U$$

(1) c'est-à-dire la densité de probabilité des erreurs.

avec:

$$K = -\frac{T}{2} \text{Log } 2\pi - \frac{1}{2} \text{Log } |\Omega_u| .$$

La matrice Ω_u est une matrice inconnue. Le but est alors de transformer le modèle défini par l'équation (1.2) en un modèle dont les erreurs ont des propriétés connues, ou du moins que l'on peut facilement déterminer.

Considérons une matrice W carrée et ayant pour élément général:

$$w_{rs} = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{is\theta_r} \quad \theta_r = \frac{2\pi r}{T} \quad r, s = 1, \dots, T .$$

Cette matrice est donc une matrice à éléments complexes qui est normale et unitaire (1).

Pré-multiplions le modèle défini par l'équation (1.2) par la matrice \bar{W} :

$$\bar{W} Y = \bar{W} X A + \bar{W} U$$

soit:

$$(1.6) \tilde{Y} = \tilde{X} A + \tilde{U} .$$

Le vecteur \tilde{U} des erreurs transformées possède les propriétés suivantes:

$$E(\tilde{U}) = E(\bar{W}U) = \bar{W}E(U) = 0$$

$$E(\tilde{U}\tilde{U}') = \bar{W} E(UU') W' = \bar{W} \Omega_u W' = \Omega_{\tilde{U}} .$$

Si d_{sk} représente l'élément général de la matrice $\Omega_{\tilde{U}}$, en utilisant les règles de calcul matriciel, il vient:

$$d_{sk} = \frac{1}{T} \sum_{l=1}^T \sum_{h=1}^T K_u (1-h) e^{i(l\theta_s - h\theta_k)} .$$

Lorsque T devient infini, on montre que:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} d_{sk} = \begin{cases} 2\pi f_u(\theta_s) & s = k \\ 0 & s \neq k \end{cases} .$$

Ainsi, asymptotiquement, la matrice $\Omega_{\tilde{U}}$ des variances-covariances du vecteur \tilde{U} est égale à une matrice diagonale:

(1) c'est-à-dire telle que: $\bar{W}' W = W \bar{W}'$
 $\bar{W}' W = I .$

$$(1.7) \Omega_{\tilde{y}} = 2\pi \text{diag} [f_u(\theta_1), \dots, f_u(\theta_s), \dots, f_u(\theta_T)] .$$

Les éléments de cette matrice diagonale peuvent être facilement évalués. En considérant le modèle défini par l'équation (1.1) comme le résultat de l'application d'un filtre linéaire à la série input $\{x_t\}$, il vient:

$$f_u(\theta_s) = c_y(\theta_s) [1 - \gamma_{yx}(\theta_s)]$$

où $\gamma_{yx}(\theta_s)$ représente la cohérence (1) entre les composantes de fréquence θ_s ($\theta_s = 2\pi s/T$) des processus $\{y_t, t=1, \dots\}$ et $\{x_t, t=1, \dots\}$.

Par suite, il est possible d'estimer le spectre du terme aléatoire u sans connaître la structure de ce terme aléatoire, c'est-à-dire sans connaître la fonction d'autocovariance du processus $\{u_t, t=1, \dots\}$.

Exprimons maintenant le logarithme de la fonction de vraisemblance en fonction de la matrice $\Omega_{\tilde{y}}$, et ce afin d'obtenir une expression contenant les coefficients de régression a_j .

Puisque:

$$\Omega_{\tilde{u}} = \bar{W} \Omega_u W'$$

il vient:

$$\Omega_u = W' \Omega_{\tilde{u}} W'$$

et:

$$(1.8) \Omega_u^{-1} = W' \Omega_{\tilde{u}}^{-1} \bar{W} .$$

Dans l'expression (1.5), remplaçons Ω_u^{-1} par son expression en fonction de $\Omega_{\tilde{u}}^{-1}$:

$$\log \mathcal{V} = K - \frac{1}{2} (WU)' \Omega_{\tilde{u}}^{-1} (\bar{W}U)$$

et effectuons ce produit matriciel:

$$(1) \text{ La cohérence est définie par: } \gamma_{yx}(\theta_s) = \frac{|f_{yx}(\theta_s)|^2}{f_y(\theta_s) f_x(\theta_s)} .$$

Son interprétation est analogue à celle du coefficient de détermination.

$$\begin{aligned} \text{Log } \mathcal{V} &= K - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T \sum_{t=1}^T \sum_{t'=1}^T e^{-i(t-t')\theta_s} u_t u_{t'} f_u^{-1}(\theta_s) \\ &= K - \frac{1}{4\pi} \sum_{s=1}^T I_u(\theta_s) f_u^{-1}(\theta_s) \end{aligned}$$

soit, en utilisant la relation (1.4) dans laquelle les quantités inconnues $I_y(\theta_s)$, $I_x(\theta_s)$ et $I_{yx}(\theta_s)$ ont été remplacées par leur estimateur respectif $\hat{f}_y(\theta_s)$, $\hat{f}_x(\theta_s)$ et $\hat{f}_{yx}(\theta_s)$ (1):

$$\begin{aligned} (1.9) \text{ Log } \mathcal{V} &= K - \frac{1}{4\pi} \sum_{s=1}^T f_u^{-1}(\theta_s) \left[\hat{f}_y(\theta_s) \right. \\ &\quad - \sum_{j=-r_1}^{r_2} \sum_{j'=-r_1}^{r_2} a_j a_{j'} e^{-i(j'-j)\theta_s} \hat{f}_x(\theta_s) \\ &\quad \left. + 2 \sum_{j=-r_1}^{r_2} a_j e^{ij\theta_s} \hat{f}_{yx}(\theta_s) \right]. \end{aligned}$$

Les conditions du premier ordre de maximisation de la fonction $\text{Log } \mathcal{V}$ par rapport aux coefficients a_j sont données par un système de (r_1+r_2+1) équations de la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Log } \mathcal{V}}{\partial a_j} &= 0 \\ \text{soit: } \sum_{s=1}^T \sum_{j'=-r_1}^{r_2} a_{j'} e^{-i(j'-j)\theta_s} \hat{f}_x(\theta_s) f_u^{-1}(\theta_s) \\ (1.10) &= \sum_{s=1}^T e^{ij\theta_s} \hat{f}_{yx}(\theta_s) f_u^{-1}(\theta_s) \quad j=-r_1, \dots, r_2. \end{aligned}$$

Après avoir d'une part modifié l'intervalle de variation de s de telle sorte que $\theta_s \in]-\pi, +\pi]$, d'autre part multiplié les deux membres de chaque équation par $1/2m$ (2), le système d'équations admet pour représentation matricielle:

(1) Pour estimer le spectre de puissance, on pondère les autocovariances estimées $\hat{K}(\tau)$ par une fonction $k(\tau)$ appelée fenêtre de retards [8], [36] et [37]. Ainsi:

$$\hat{f}_x(\theta_s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-m}^m e^{-i\tau\theta_s} k(\tau) \hat{K}_x(\tau)$$

où: m désigne le nombre d'autocovariances estimées,

$$\hat{K}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \sum_{t=1}^{T-\tau} x_{t+\tau} x_t \quad \tau=0, 1, \dots, m.$$

Cette procédure est également valable pour l'estimation du spectre croisé.

(2) afin d'utiliser les propriétés du spectre de puissance et du spectre croisé, ainsi que celles de leur estimateur respectif.

$$(1.11) \quad \hat{P} A = \hat{Q}$$

où:

. \hat{P} est une matrice carrée, d'ordre (r_1+r_2+1) et dont l'élément général est:

$$\hat{p}_{jj'} = \frac{1}{2m} \sum_{s=-m+1}^m e^{-i(j'-j)\theta_s} \hat{f}_x(\theta_s) f_u^{-1}(\theta_s)$$

. \hat{Q} est un vecteur de dimensions $(r_1+r_2+1, 1)$ et dont l'élément général est:

$$\hat{q}_j = \frac{1}{2m} \sum_{s=-m+1}^m e^{ij\theta_s} \hat{f}_{yx}(\theta_s) f_u^{-1}(\theta_s) .$$

Par suite, le vecteur \hat{A} recherché est solution de l'équation (1.11), soit:

$$(1.12) \quad \hat{A} = \hat{P}^{-1} \hat{Q}.$$

Tous les éléments de la matrice \hat{P} et du vecteur \hat{Q} peuvent être facilement calculés, un estimateur du spectre de puissance des erreurs étant donné par la relation suivante:

$$\hat{f}_u(\theta_s) = \hat{f}_y(\theta_s) [1 - \hat{\gamma}_{yx}(\theta_s)] .$$

En conséquence, les coefficients de régression estimés \hat{a}_j ne dépendent que des spectres de puissance estimés $\hat{f}_x(\theta_s)$ et $\hat{f}_y(\theta_s)$ et du spectre croisé estimé $\hat{f}_{yx}(\theta_s)$. Dans le cas qui vient d'être présenté, le vecteur \hat{A} dépend également du nombre de coefficients à estimer. Si les valeurs de r_1 et r_2 n'ont pas été correctement choisies, alors la cohérence entre les résidus estimés et la variable explicative pourra être assez élevée pour certaines fréquences (théoriquement cette cohérence est nulle). Mais il existe un cas particulier très intéressant pour la conduite des calculs. Lorsque la valeur du rapport $f_x(\theta_s) / f_u(\theta_s)$ est à peu près constante sur tout l'intervalle $]-\pi, +\pi]$, le vecteur \hat{A} est indépendant du nombre de coefficients à estimer. En effet, dans ce cas particulier la matrice \hat{P} est une matrice diagonale.

Ainsi la méthode de la régression spectrale permet d'estimer les coefficients d'un modèle à retards échelonnés sans aucune information a priori. On peut alors se demander quelles sont les propriétés asymptotiques de cet estimateur \hat{A} .

13 - Propriétés asymptotiques de l'estimateur A

L'étude des propriétés asymptotiques de l'estimateur \hat{A} nécessite une légère modification de l'équation (1.12).

Par un procédé analogue à celui qui a été utilisé pour obtenir la relation (1.4), on montre que:

$$f_{ux}(\theta_s) = f_{yx}(\theta_s) - \sum_{j'=-r_1}^{r_2} a_{j'} e^{ij'\theta_s} f_x(\theta_s) .$$

En substituant cette relation dans l'équation (1.10), il vient, après simplification:

$$(1.13) \hat{P} [\hat{A} - A] = \hat{C}$$

où \hat{C} est un vecteur de dimensions $(r_1+r_2+1, 1)$ et ayant pour élément général:

$$\hat{c}_j = \frac{1}{2m} \sum_{s=-m+1}^m e^{ij\theta_s} \hat{f}_{ux}(\theta_s) f_u^{-1}(\theta_s) .$$

Les éléments de la matrice \hat{P} et du vecteur \hat{C} étant des quantités estimées, les théorèmes relatifs aux transformations linéaires ne peuvent être appliqués à l'équation (1.13) pour trouver les propriétés asymptotiques du vecteur \hat{A} . En revanche, le théorème suivant (1) peut être utilisé:

Soit $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ une suite de variables aléatoires ayant pour fonction de distribution $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$. Supposons que lorsque n devient infini, la fonction de distribution F_n tende vers la fonction de distribution $F(v)$.

Soit $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ une suite de variables aléatoires telles que lorsque n devient infini la variable aléatoire z_n converge en probabilité vers la constante d supposée positive.

Alors la variable aléatoire $y_n = x_n z_n$ admet pour fonction de distribution la fonction $F(v/d)$. L'application de ce théorème à l'étude des propriétés asymptotiques du vecteur \hat{A} suppose que la limite en probabilité de la matrice \hat{P} soit égale à la matrice P , et que la distribution asymptotique du vecteur \hat{C} soit connue. L'établissement de ces deux conditions fait appel aux propriétés asymptotiques des estimateurs du spectre de puissance [36], [38] et [21], et du spectre croisé [21]. Afin de ne pas alourdir cet exposé, ces

(1) ce théorème est donné dans l'ouvrage de H. CRAMER [7, p.254].

démonstrations ne seront pas données, mais elles peuvent être retrouvées dans l'ouvrage de G.S.FISHMAN [16, pp.158-159]. On montre alors que:

- . p. limite $\hat{P} = P$
 $T \rightarrow +\infty$
- . $\sqrt{T} \hat{C} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, P)$.

Par conséquent le vecteur:

$$\sqrt{T} [\hat{A} - A] = \sqrt{T} \hat{P}^{-1} \hat{C}$$

est asymptotiquement distribué selon une loi normale multivariée d'espérance mathématique nulle et de matrice des variances-covariances P^{-1} :

$$(1.14) \quad \sqrt{T} [\hat{A} - A] \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, P^{-1}) .$$

Connaissant la distribution asymptotique du vecteur \hat{C} , on peut ensuite effectuer les tests de signification des coefficients de régression.

En résumé, la complexité de la méthode de la régression spectrale n'est qu'apparente. Elle ne nécessite en effet que l'estimation des spectres de puissance et des spectres croisés des variables retenues dans le modèle de régression. De plus, dans son article, E.J.HANNAN a montré que, pour l'estimation des coefficients d'un modèle à retards échelonnés, la méthode de la régression spectrale était beaucoup plus efficace que la méthode proposée par N.LIVIATAN [28].

Cette méthode de la régression spectrale va maintenant être appliquée à un exemple non pas en vue de l'estimation des coefficients d'un modèle à retards échelonnés, mais dans le but de trouver à partir de l'évolution temporelle des coefficients \hat{a}_j estimés la fonction à laquelle s'apparentent ces coefficients. En d'autres termes, il s'agit de trouver une approximation à une structure de retards finie.

2 - Application de la méthode de la régression spectrale:
recherche du processus d'ajustement du stock de capital
à son niveau optimal

La théorie néo-classique de l'investissement développée par D.W.JORGENSON [22] sert de support théorique à cette étude empirique. Dans cette théorie, l'investissement net (1) est une fonction à retards échelonnés de la variation du niveau optimal K^E du stock de capital, soit:

$$IN_t = \mu(L) [K_t^E - K_{t-1}^E]$$

où:

$$\begin{aligned} \cdot \mu(L) &= \mu_0 + \mu_1 L + \dots + \mu_i L^i + \dots \\ \cdot K_t^E &= \alpha \frac{P_t Q_t}{c_t} \end{aligned}$$

α désigne l'élasticité de la production par rapport au stock de capital, p le prix de la production, Q la production et c le coût d'usage du capital.

L'investissement brut est obtenu en ajoutant à l'investissement net l'investissement de remplacement; ce dernier est supposé proportionnel au stock de capital de la fin de la période précédente (ou du début de la période actuelle). La fonction d'investissement brut proposée par D.W.JORGENSON est alors la suivante:

$$(2.15) \quad I_t = \mu(L) [K_t^E - K_{t-1}^E] + \gamma K_{t-1}$$

où γ est le taux de dépréciation du capital.

L'auteur a également montré que, sous certaines conditions, la structure de retards $\mu(L)$ pouvait être remplacée par une structure de retards rationnelle de la forme:

$$\mu(L) = \frac{U(L)}{W(L)} = \frac{u_0 + u_1 L + \dots + u_n L^n}{w_0 + w_1 L + \dots + w_n L^n} \quad w_0 = 1.$$

Mais le modèle de D.W.JORGENSON ne permet pas de dissocier l'effet-prix relatif de l'effet-production dans la demande de biens capitaux. C'est pour pallier cet inconvénient, et aussi afin de

(1) sous l'hypothèse d'une fonction de production de Cobb-Douglas à rendements d'échelle décroissants.

justifier le choix d'une fonction de production de Cobb-Douglas, que R.EISNER et M.I.NADIRI [11] ont proposé une autre version du modèle de D.W.JORGENSON, soit:

$$(2.16) \quad \Delta \text{Log } K_t = \frac{U_p(L)}{W(L)} \Delta \text{Log } \left(\frac{p}{c}\right)_t + \frac{U_q(L)}{W(L)} \Delta \text{Log } Q_t .$$

Avant d'estimer les coefficients de ces deux modèles, plusieurs problèmes doivent être résolus:

* Quel est le degré de chaque polynôme?

* Le terme aléatoire doit-il être ajouté sur la forme originale ou bien sur la forme finale du modèle?

* Quelle est la structure de ce terme aléatoire?

* Existe-t-il un certain délai avant que l'investissement ne réagisse aux variations de l'un de ses déterminants? En d'autres termes les premiers coefficients de la série doivent-ils être nuls?

A notre avis, la réponse à ces différentes questions doit être donnée par l'information contenue dans l'échantillon. C'est pourquoi la méthode de la régression spectrale a été employée. Mais pour que cette méthode soit valablement appliquée, il faut disposer d'un grand nombre d'observations. Aussi avons-nous décidé de travailler sur données statistiques trimestrielles. De plus, la théorie néo-classique a été élaborée dans le cadre de la firme. Ce cadre devait également être respecté. Pour la constitution de l'échantillon, la firme a été assimilée à la branche, la branche étant entendue au sens de la Comptabilité Nationale. A notre connaissance, il n'existait pas en France de séries statistiques trimestrielles relatives à l'investissement ni au stock de capital par branche. Il a donc fallu les construire à partir de séries annuelles et en utilisant les méthodes de trimestrialisation des séries annuelles élaborées par la Division des Comptes Trimestriels de l'INSEE [35] et [3]. Les calculs ont été effectués pour la période 1963-1977 (1) avec une rétropolation depuis 1959, pour chacune des dix branches de la nomenclature en U de la Comptabilité Nationale et en distinguant le matériel du bâtiment et travaux publics hors logement.

(1) Lorsque nous avons obtenu certaines séries annuelles, les résultats concernant l'année 1978 n'étaient pas encore disponibles. Mais la mise à jour des séries trimestrielles qui ont été ainsi construites ne pose aucun problème.

A partir de ces séries trimestrielles, ont été recherchées la nature des structures de retards et la structure du terme aléatoire des deux modèles suivants:

. Modèle de D.W.JORGENSON

$$I_t = \mu_1(L) \left[\frac{p_t Q_t}{c_t} - \frac{p_{t-1} Q_{t-1}}{c_{t-1}} \right] + \mu_2(L) K_t + u_t$$

. Modèle de R.EISNER et M.I.NADIRI

$$\Delta \text{Log } K_t = \mu_p(L) \Delta \text{Log} \left(\frac{p}{c} \right)_t + \mu_q(L) \Delta \text{Log } Q_t + u_t .$$

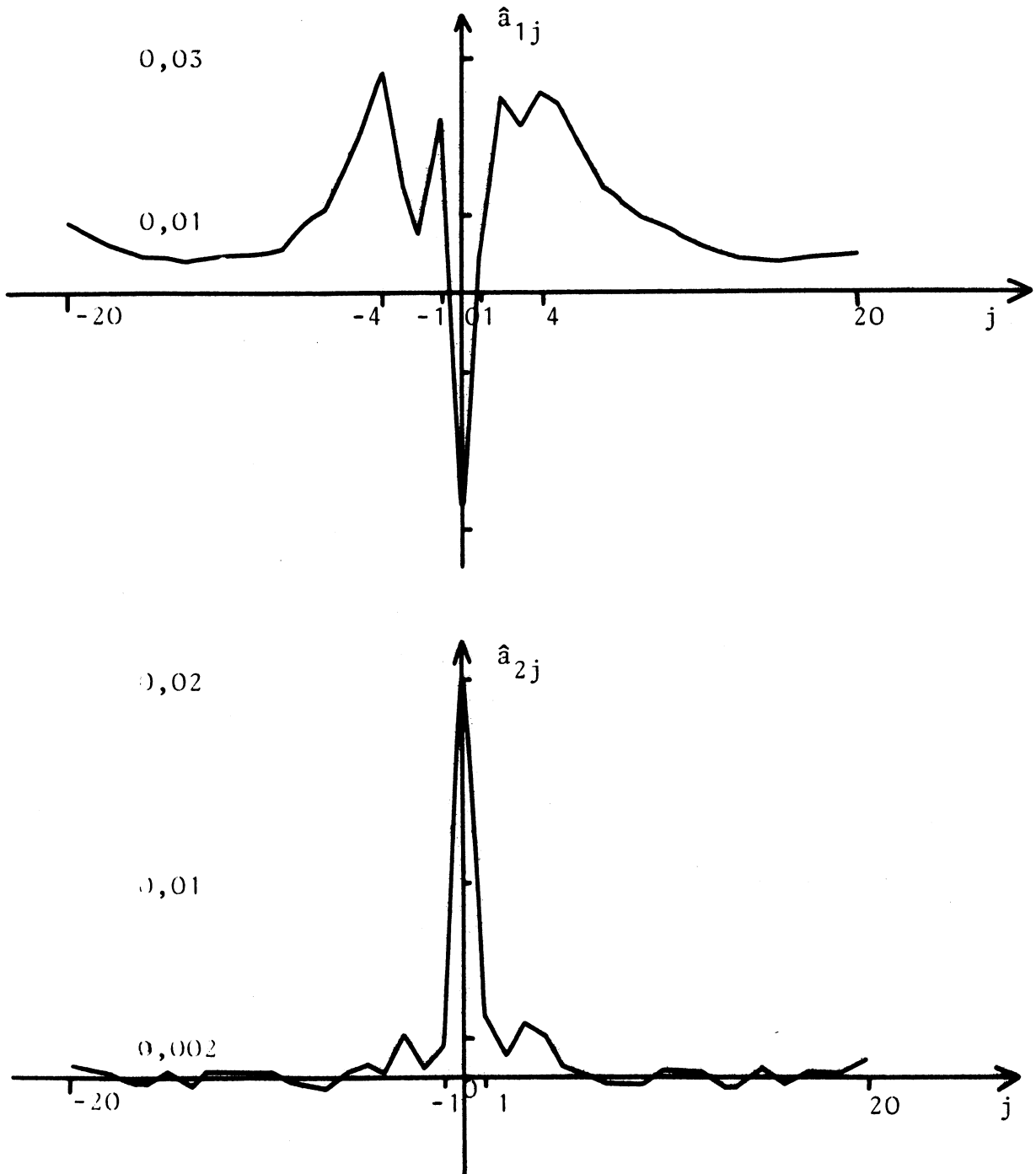
A cette fin, les coefficients du modèle à retards échelonnés suivant:

$$y_t = \sum_{j=-20}^{20} a_{1j} x_{1t-j} + \sum_{j=-20}^{20} a_{2j} x_{2t-j} + u_t \quad (1)$$

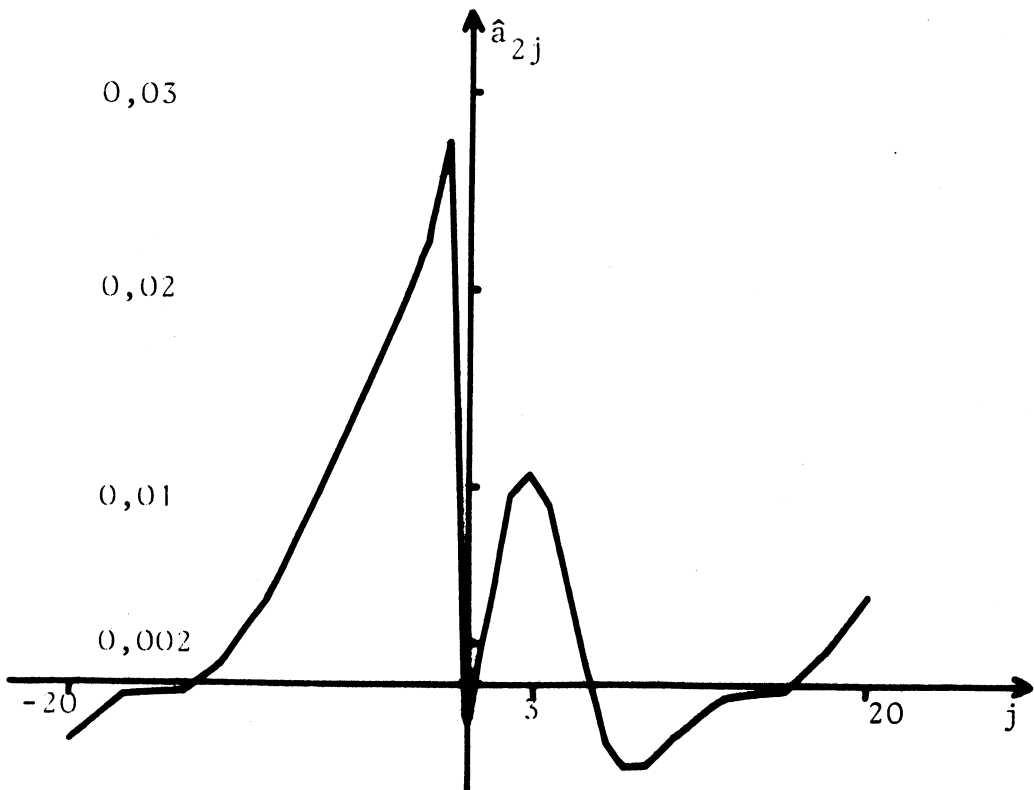
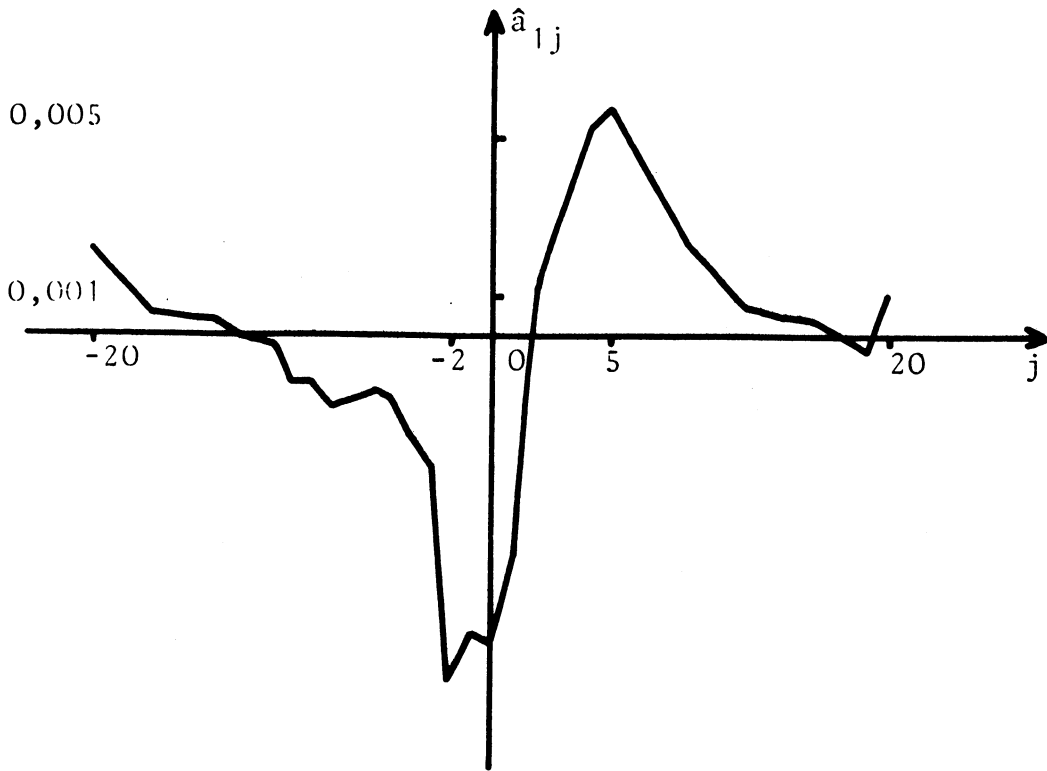
ont été estimés par la méthode de la régression spectrale.

Pour la branche "Industries des biens d'équipement professionnel" (branche U05 - Matériel) les évolutions temporelles des coefficients estimés \hat{a}_{1j} et \hat{a}_{2j} ont été représentées (cf. graphiques 1 et 2).

(1) Par exemple y_t représente l'investissement brut si l'on considère le modèle de D.W.JORGENSON, la variation logarithmique du stock de capital si l'on considère le modèle de R.EISNER et M.I.NADIRI. Toutes les variables sont des variables centrées .



Graphique 1 : Evolutions temporelles des coefficients \hat{a}_{1j} et \hat{a}_{2j} . Branche U05. Modèle de D.W.JORGENSON. Matériel.

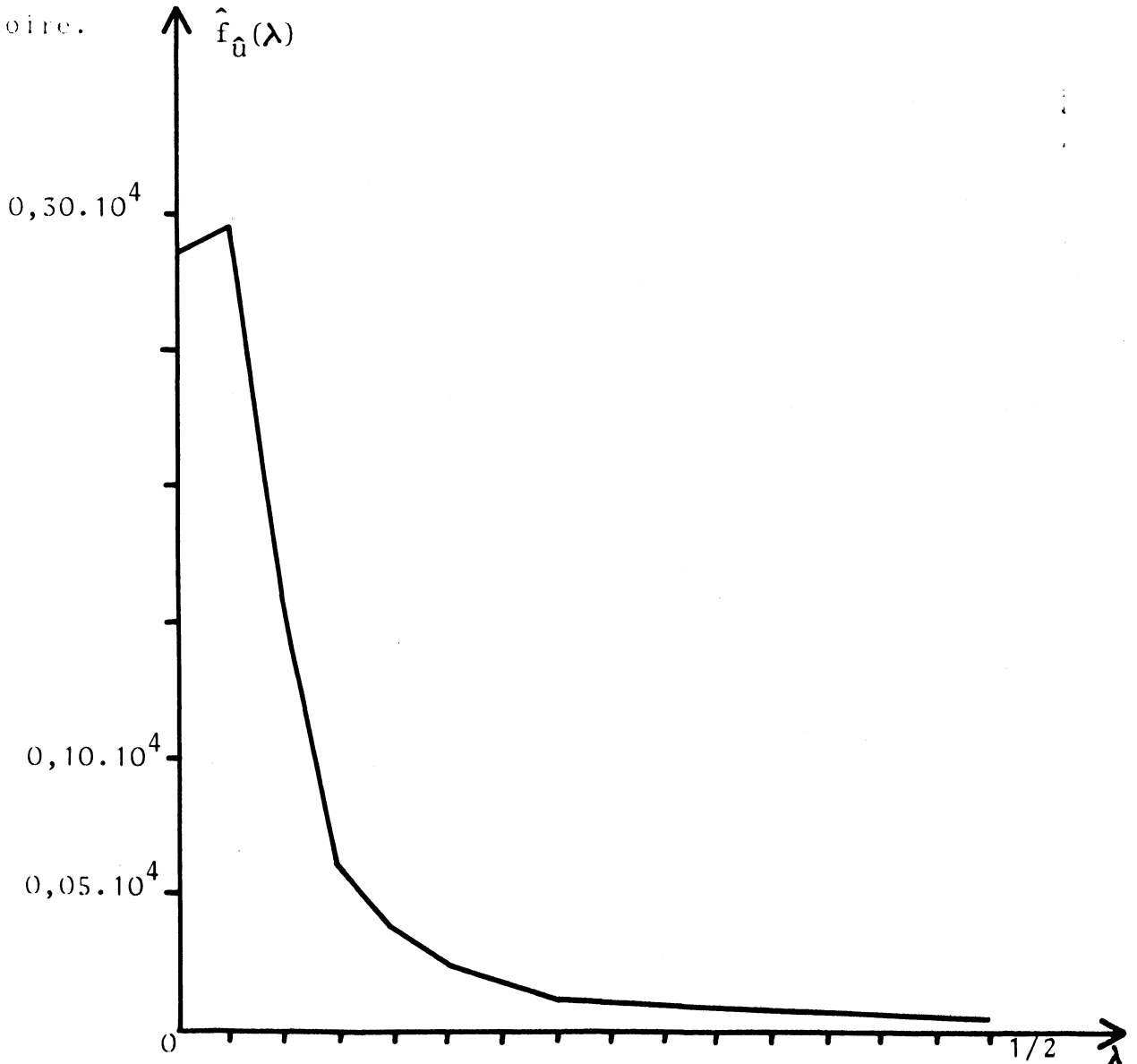


Graphique 2 : Evolutions temporelles des coefficients \hat{a}_{1j} et \hat{a}_{2j} .
 Branche U05. Modèle de R.EISNER et M.I.NADIRI.
 Matériel.

A la lecture de ces graphiques (seuls les retards positifs sont considérés), il résulte que:

- l'influence de la production peut être décrite par une structure autorégressive très simple,
- l'influence du prix relatif, loin d'être négligeable, ne semble pas suivre une distribution simple et connue,
- l'investissement de remplacement apparaît déjà comme proportionnel au stock de capital du début du trimestre.

En ce qui concerne le terme aléatoire, le spectre des résidus étant caractérisé par une forte puissance spectrale aux basses fréquences (cf. graphique 3), on peut retenir un processus autorégressif du premier ordre pour la structure de ce terme aléatoire.



Graphique 3: Représentation graphique du spectre des résidus.
Modèle de D.W.JORGENSEN. Branche UO5. Matériel.

Ces premiers résultats obtenus sur séries statistiques trimestrielles, dont la fiabilité n'était pas au départ garantie, sont très nettement en faveur de la théorie néo-classique de l'investissement en France. Les décisions d'investissement demeurent très dépendantes des variations de la production, mais l'influence du prix relatif n'est pas négligeable.

CONCLUSION

La méthode de la régression spectrale telle qu'elle a été développée par E.J.HANNAN apparaît surtout comme une méthode d'estimation des coefficients d'un modèle à retards échelonnés, méthode d'estimation qui ne s'appuie sur aucune information a priori. Mais cette méthode peut et doit être utilisée à d'autres fins. En effet, elle peut être considérée comme une méthode d'analyse des séries temporelles au même titre que celle qui a été suggérée par G.E.P. BOX et G.M.JENKINS [5], c'est-à-dire une méthode dont le but consiste à trouver le modèle le mieux adapté aux données statistiques disponibles. Il est également important de noter que, dans son ouvrage "Distributed Lags. Problems of estimation and formulation" [9], P.J.DHRYMES a développé une méthode d'estimation des coefficients d'une structure de retards rationnelle par les techniques d'analyse spectrale. Cette méthode d'estimation apparaît ainsi comme le prolongement de l'identification de la forme d'un modèle par la méthode de la régression spectrale.

Il reste à espérer que d'autres études soient entreprises dans ce domaine, car d'une part la complexité de cette méthode d'analyse n'est qu'apparente, d'autre part elle constitue un guide pour le choix du modèle le plus approprié aux données statistiques disponibles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALMON S., The distributed lag between capital appropriations and expenditures. *Econometrica*, vol.33,n°1, January 1965, pp.178-196.
- [2] ALPHEN H.J.Van, MERKIES A.H.Q.M., Distributed lags in construction: an empirical study. *International Economic Review*,vol.17,n°2,June 1976, pp.411-430.
- [3] BOURNAY J., LAROQUE G., Comptes trimestriels 1949-1959. Collections de l'INSEE, Série C,n°70, mars 1979,pp.9-178.
- [4] BOURNAY J., LAROQUE G., Réflexions sur la méthode d'élaboration des Comptes Trimestriels. *Annales de l'INSEE*, n°36,Octobre-Décembre 1979,pp.3-29.
- [5] BOX G.E.P., JENKINS G.M., Time series analysis. Forecasting and Control, Holden Day, San Francisco, Revised edition, 1976.
- [6] CLARK J.M., Business acceleration and the law of demand: a technical factor in economic cycles. *Journal of Political Economy*, vol.25,n°3, March 1917,pp.217-235.
- [7] CRAMER H., Mathematical methods of statistics. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1946.
- [8] DHRYMES P.J., Econometrics statistical foundations and applications. Harper and Row, London, 1970.
- [9] DHRYMES P.J., Distributed lags. Problems of estimation and formulation. Holden Day, San Francisco, 1971.
- [10] DORAN H.E., A simulation study of the small sample properties of the Hannan estimator of a distributed lag model when the signal-to-noise is constant. *International Economic Review*, vol.17,n°1, February 1976,pp.8-25.
- [11] EISNER R., NADIRI M.I., Investment behavior and neo-classical theory. *Review of Economics and Statistics*, vol.50, n°3, August 1968, pp.369-382.
- [12] ENGLE R., Band spectrum regression. *International Economic Review*, vol.15,n°1, February 1974, pp.1-11.
- [13] ENGLE R., Testing price equations for stability across spectral frequency bands. *Econometrica*, vol.46,n°4, July 1978, pp.869-881.

- [14] ENGLE R., GARDNER R., Some finite sample properties of spectral estimates of a linear regression. *Econometrica*, vol.44,n°1, January 1976, pp.149-165.
- [15] FISHER I., Note on a short-cut method for calculating distributed lags. *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, vol.29, part 3, 1937, pp.323-327.
- [16] FISHMAN G.S., *Spectral methods in econometrics*. Harvard University Press, Cambridge, 1969.
- [17] GRANGER G.W.J., HATANAKA H., *Analyse spectrale des séries temporelles en économie*. Dunod, Finance et Economie Appliquée, vol.29, Paris, 1969.
- [18] GRILICHES Z., Distributed lags: a survey. *Econometrica*, vol.35, n°1, January 1967, pp.16-49.
- [19] GUTH H., KUGLER P., ZEHNDER R., Zu einigen neuen entwicklungen in der schätzung von time - lag - strukturen. *Kyklos*, vol.32, fasc.1/2, 1979, pp.365-379.
- [20] HANNAN E.J., The estimation of relationships involving distributed lags. *Econometrica*, vol.33, n°1, January 1965, pp.206-224.
- [21] JENKINS G.M., WATTS D.G., *Spectral analysis and its applications*. Holden Day, San Francisco, 1968.
- [22] JORGENSON D.W., Capital theory and investment behavior. *American Economic Review*, vol.53, n°2, May 1963, pp.247-259.
- [23] JORGENSON D.W., Rational distributed lag functions. *Econometrica*, vol.32,n°1, January 1966, pp.135-149.
- [24] JORGENSON D.W., The theory of investment behavior. in *Determinants of investment behavior*. Edited by R.FERBER, Universities National Bureau Conference, Series n°18, New York, 1967.
- [25] JORGENSON D.W., Econometric studies of investment behavior: a survey. *Journal of Economic Literature*, vol.9, n°4, December 1971, pp.1111-1147.
- [26] JORGENSON D.W., HUNTER J., NADIRI M.I., A comparison of alternative econometric models of quarterly investment behavior. *Econometrica*, vol.38,n°2, March 1970, pp.187-212.

- [27] KOYCK L.M., Distributed lags and investment analysis. North Holland Publishing Co, Amsterdam, 1954.
- [28] LIVIATAN N., Consistent estimation of distributed lags. International Economic Review, vol.4, n°1, January 1963, pp.44-52.
- [29] MALINVAUD E., Méthodes statistiques de l'économétrie. Dunod, Finance et Economie Appliquée, vol.16, Paris, 1964.
- [30] MALINVAUD E., FOUQUET D., Analyse spectrale des données économiques: un essai sur l'activité dans l'industrie française. Annales de l'INSEE, n°6, Janvier-avril 1971, pp.41-75.
- [31] MARTIN J.P., Dépendance à court terme entre variables économiques. Journal de la Société Statistique de Paris, n°2, 1975, pp.134-147.
- [32] MUET P.A., Croissance, profits et investissement: une étude économétrique. Thèse de 3ème cycle, Université de Paris I, ronéoté, INSEE, CEPREMAP, juin 1978.
- [33] MUET P.A., Les modèles à retards échelonnés: fondements théoriques, spécifications et méthodes d'estimation usuelles. Cahiers du Groupe de Mathématiques Economiques, Université de Paris I, Cahier n°2, octobre 1979.
- [34] MUET P.A., ZAGAME P., Fonction d'investissement et retards échelonnés. Annales de l'INSEE, n°21, Janvier-Mars 1976, pp.85-132.
- [35] NASSE Ph., Le système des comptes nationaux trimestriels. Annales de l'INSEE, n°14, Septembre-Décembre 1973, pp.113-161.
- [36] PARZEN E., On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series. Annals of Mathematical Statistics, vol.28, n°3, September 1957, pp.329-348.
- [37] PARZEN E., On choosing an estimate of the spectral density function of a stationary time series. Annals of Mathematical Statistics, vol.28, n°4, December 1957, pp.921-931.
- [38] PARZEN E., On asymptotically efficient consistent estimates of the spectral density function of a stationary time series. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, vol.20, n°2, 1958, pp.303-329.

- [39] SOLOW R.M., On a family of lag distributions. *Econometrica*, vol.28,n°2, April 1960, pp.393-406.
- [40] ZEHNDER R., Zur spektraltechnischen schätzung von distributed lag-modellen. *Habilitations-schrift*, Basel, 1977. (noch nicht veröffentlicht).