



**HAL**  
open science

# Homogénéisation du comportement magnéto-élastique : du grain à l'échelle macroscopique

Laurent Daniel, Olivier Hubert, René Billardon

► **To cite this version:**

Laurent Daniel, Olivier Hubert, René Billardon. Homogénéisation du comportement magnéto-élastique : du grain à l'échelle macroscopique. Congrès Français de Mécanique, Sep 2003, Nice, France. hal-01533653

**HAL Id: hal-01533653**

**<https://hal.science/hal-01533653>**

Submitted on 6 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Homogénéisation du comportement magnéto-élastique : du grain à l'échelle macroscopique

Laurent DANIEL, Olivier HUBERT & René BILLARDON

LMT-Cachan (ENS-Cachan / CNRS (UMR 8535) / Université Paris 6)  
61, avenue du Président Wilson – 94235 CACHAN Cedex

### Résumé :

*La prédiction de la magnétostriction et du comportement magnétique réversible des matériaux ferromagnétiques est un sujet toujours ouvert. Des progrès ont récemment été réalisés dans la description de ces comportements pour les monocristaux. Nous proposons dans ce papier d'étendre cette démarche à la prévision du comportement d'un polycristal ferromagnétique doux texturé. Cette extension suppose une démarche d'homogénéisation magnéto-élastique. Le modèle est ensuite confronté à des résultats expérimentaux obtenus avec un alliage de fer-silicium industriel*

### Abstract :

*The prediction of the reversible evolution of macroscopic magnetostriction strains and magnetisation in ferromagnetic materials is still an open issue. Progress has been recently made in the description of the magneto-elastic behaviour of single crystals. Herein, we propose to extend this procedure to the prediction of the behaviour of textured soft magnetic polycrystals. This extension implies a magneto-mechanical homogenisation. The model proposed is discussed and the results are compared to experimental data obtained on industrial iron-silicon alloys.*

### Mots-clefs :

Modélisation multiéchelle, homogénéisation magnéto-élastique, polycristaux texturés

## 1 Introduction

La prédiction du comportement magnétique des matériaux ferromagnétiques, même dans le cas isotrope, est un sujet de recherches toujours d'actualité (Jiles (1991), A.Hubert *et al.* (1998)). Il en va de même pour la magnétostriction. Ce phénomène est intimement lié aux mécanismes d'aimantation à l'échelle microscopique. La complexité et l'anisotropie des phénomènes à cette échelle montrent qu'il est nécessaire d'avoir recours à une description macroscopique et des changements d'échelles lorsqu'il s'agit de rechercher le comportement magnéto-mécanique à l'échelle d'une structure (machine électrique..). L'objet de ce papier est donc de proposer une approche multiéchelle à fort contenu physique permettant d'obtenir un modèle magnéto-mécanique utilisable à l'échelle macroscopique. Après une brève illustration des phénomènes de couplage magnéto-élastiques, nous proposons une description des mécanismes physiques intervenant lors de l'aimantation d'un corps ferromagnétique. On décrit ensuite le modèle micro-magnéto-mécanique de comportement des monocristaux (Buiron *et al.* (1999, 2001)). Son extension au polycristal fait appel à des démarches de localisation et d'homogénéisation. Ce travail s'achève par une comparaison du modèle avec quelques résultats expérimentaux.

## 2 Couplages magnéto-élastiques – revue des phénomènes

Les comportements magnétique et mécanique des alliages ferromagnétiques industriels sont fortement couplés. Cela signifie que le comportement magnétique ne peut pas être déterminé de façon précise sans prendre en compte les champs mécaniques associés, et, parallèlement, la déformation dépend fortement de l'état magnétique du matériau considéré. Il existe ainsi deux principaux phénomènes associés à ce couplage. La perméabilité d'un matériau

ferromagnétique, tout d'abord, est fonction de l'état de contrainte. Par exemple, dans le cas du fer pur soumis à une compression uniaxiale, la perméabilité dans la direction de la compression diminue fortement quand la contrainte augmente. En revanche, une traction modérée améliore la perméabilité (Cullity (1972)). Par ailleurs une déformation dite déformation de magnétostriction, apparaît spontanément lorsqu'un matériau ferromagnétique est aimanté. On observe également une forte sensibilité de la magnétostriction à l'état de contraintes. Ce couplage peut être mis à profit pour la fabrication d'émetteurs ou de capteurs. Il est également en partie responsable du bruit émis par les machines électriques. L'effet  $E$  s'explique par ce même couplage. On se reportera à Bozorth (1951) pour de plus amples explications.

### 3 Rappel des mécanismes et modélisations à l'échelle du grain

En général, chaque grain d'un matériau ferromagnétique polycristallin est divisé en domaines magnétiques aimantés à saturation, ceci quels que soient le niveau et l'orientation du champ magnétique extérieur. Le vecteur aimantation associé à chacun des domaines est initialement orienté suivant une direction cristallographique privilégiée notée direction de « facile aimantation »,  $\langle 100 \rangle$  pour le fer. Il existe donc au maximum 6 familles de domaines dans un grain pour ce matériau. La structure en domaines évolue avec le champ magnétique suivant deux mécanismes concomitants : le mouvement des parois magnétiques, constituant la frontière entre deux domaines à bas champ, et la rotation de l'aimantation en direction du champ appliqué à plus fort champ. Quand la saturation magnétique est atteinte, chaque grain est composé d'un unique domaine aimanté dans la direction du champ.

La modélisation du comportement magnéto-mécanique d'un polycristal passe par une description des mécanismes à l'échelle du monocristal. Les deux mécanismes à décrire sont la déformation de magnétostriction et l'aimantation.

#### 3.1 Modélisation de la magnétostriction

Considérons un domaine magnétique  $\mu$ . Son aimantation  $\vec{M}$  peut s'écrire dans le repère cristallographique selon (1), les  $\mu_i$  étant les cosinus directeurs de l'aimantation dans ce repère. La déformation de magnétostriction d'une famille de domaines  $\mu$  s'écrit alors dans ce repère selon (2),  $\mu_{100}$  et  $\mu_{111}$  étant les deux constantes de magnétostriction du monocristal. Elles correspondent aux déformations à saturation mesurées suivant les directions  $\langle 100 \rangle$  et  $\langle 111 \rangle$ .

$$\vec{M} = M_s \vec{e} = M_s \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{100} \mu_1^2 - \frac{1}{3} & \mu_{111} \mu_1 \mu_2 & \mu_{111} \mu_1 \mu_3 \\ \mu_{111} \mu_1 \mu_2 & \mu_{100} \mu_2^2 - \frac{1}{3} & \mu_{111} \mu_2 \mu_3 \\ \mu_{111} \mu_1 \mu_3 & \mu_{111} \mu_2 \mu_3 & \mu_{100} \mu_3^2 - \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (2)$$

#### 3.2 Modélisation mécanique

Dans le cas des matériaux du génie électrique, l'amplitude de la déformation de magnétostriction est de l'ordre de  $10^{-5}$ . Les incompatibilités associées restent alors dans le domaine élastique et une simple description de l'état mécanique dans le cadre de l'élasticité linéaire suffit. Contraintes  $\varepsilon_g$  et déformations élastiques  $\varepsilon_g^e$  sont liées par la loi de Hooke (3).



$$\bar{M}_g = \langle \bar{M} \rangle = \sum_{i=1}^6 (f_i \cdot \bar{M}_i) \tag{10}$$

$$\underline{\varepsilon}_g^\mu = \langle \underline{\varepsilon}^\mu \rangle = \sum_{i=1}^6 (f_i \cdot \underline{\varepsilon}_i^\mu) \tag{11}$$

On trouvera dans les références Buiron et al. (1999, 2001) et Daniel et al. (2003) des comparaisons entre résultats expérimentaux (Webster (1925)) et prévisions de ce modèle pour un monocristal de fer pur. On observe un très bon accord aussi bien en ce qui concerne la magnétostriction que la courbe d'aimantation anhystérétique, les constantes matériaux employées étant issues de Mc Clintock *et al.* (1966) pour l'élasticité et Bozorth (1951) pour le magnétisme.

#### 4 Modélisation multi-échelle

Il convient tout d'abord de définir un volume élémentaire représentatif (VER) de matériau polycristallin. La texture est connue via une fonction d'orientation (FDO) constituée d'un fichier d'angles d'Euler (mesure EBSD). Les chargements macroscopiques sont le champ extérieur  $\bar{H}_{ext}$  et la contrainte  $\underline{\varepsilon}$ , les réponses macroscopiques sont l'aimantation  $\bar{M}_M$  et la déformation  $\underline{E}$ . L'idée générale de l'approche micro-macro est de postuler un loi de localisation, de manière à pouvoir déduire le chargement local du chargement global. Le modèle microscopique est ensuite appliqué à l'échelle du domaine. Une série d'opérations de moyennes judicieuses, d'abord du domaine au grain, puis du grain au VER permettent d'obtenir les réponses globales. L'existence du couplage implique alors un schéma itératif. La convergence est obtenue après minimisation d'une fonctionnelle d'erreur. La figure 1 rappelle le schéma multiéchelle employé ainsi que les principales grandeurs du problème.

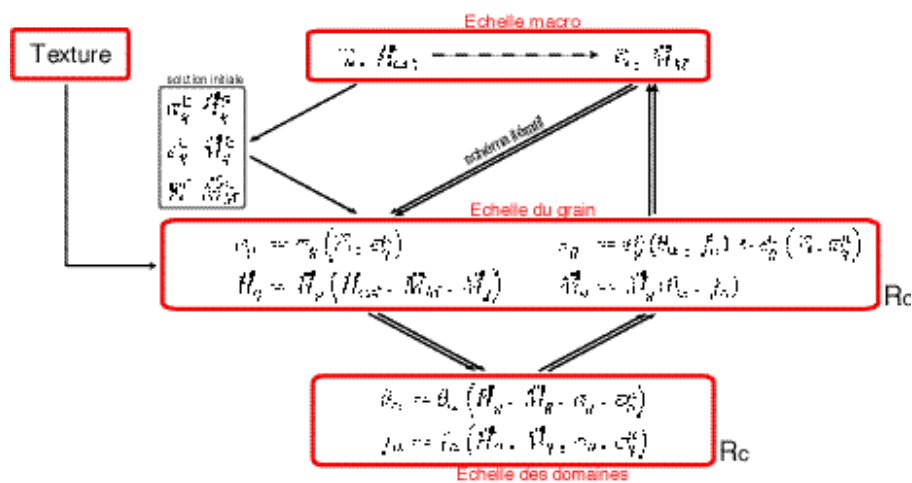


FIG. 1. Schéma multiéchelle employé.

##### 4.1 localisation des champs mécanique et magnétique

La localisation mécanique consiste à postuler une fonction g telle que:

$$\underline{\varepsilon}_g = g(\underline{\varepsilon}, \bar{H}_{ext}) \tag{12}$$

On détermine cette fonction à partir d'une approche auto-cohérente. Chaque grain est considéré comme une inclusion dans un milieu homogène équivalent au polycristal. On se

ramène à un problème d'Eshelby (Eshelby (1957)). Le tenseur d'Eshelby  $\underline{\underline{S}}^E$  est calculé à partir des fonctions de Green. Il permet de lier la déformation libre de magnétostriction à la déformation élastique de l'inclusion (13). Le tenseur d'élasticité du milieu équivalent est la solution de l'équation autocohérente (14). On définit également le tenseur d'influence de Hill (15) et les opérateurs de localisation des déformations (16) et des contraintes (17). On calcule ensuite la contrainte par grains comme la somme de la contrainte macroscopique localisée avec la contrainte d'incompatibilité de magnétostriction (18). Il s'agit d'une relation autocohérente puisque la déformation de magnétostriction dépend de la contrainte.

$$\underline{\underline{\epsilon}}^I = \underline{\underline{S}}^E : \underline{\underline{\epsilon}}^{\mu}_g \quad (13)$$

$$\underline{\underline{C}}^{AC} = \left\langle \underline{\underline{C}}^I : (\underline{\underline{C}}^I + \underline{\underline{C}}^*)^{-1} : (\underline{\underline{C}}^{AC} + \underline{\underline{C}}^*) \right\rangle \quad (14)$$

$$\underline{\underline{C}}^* = \underline{\underline{C}}^{AC} : (\underline{\underline{S}}^{E-1} - \underline{\underline{I}}) \quad (15)$$

$$\underline{\underline{A}} = (\underline{\underline{C}}^I + \underline{\underline{C}}^*)^{-1} : (\underline{\underline{C}}^{AC} + \underline{\underline{C}}^*) \quad , \quad \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}^I : \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{C}}^{AC-1} \quad (16),(17)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}_g = \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{C}}^I : (\underline{\underline{S}}^E - \underline{\underline{I}}) : \underline{\underline{\epsilon}}^{\mu}_g \quad (18)$$

La localisation magnétique consiste à calculer la fonction h telle que :

$$\underline{\underline{H}}_g = h(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{H}}_{ext}) \quad (19)$$

En électromagnétisme, on lui préfère la relation (20) utilisant la notion de champ démagnétisant  $\underline{\underline{H}}_d$ . Dans le cas d'un matériau isotrope linéaire, la relation (21) permet de relier le champ démagnétisant à l'écart entre l'aimantation du grain  $\underline{\underline{M}}_g$  et l'aimantation moyenne macroscopique  $\underline{\underline{M}}_M$ , la relation (22) établie par une approche autocohérente (Buiron (2000)) reliant le facteur démagnétisant  $N_c$  à la susceptibilité  $\chi_m$  du matériau. Nous choisissons d'étendre cette expression à la situation anisotrope et non linéaire présente.

$$\underline{\underline{H}}_g = \underline{\underline{H}}_{ext} + \underline{\underline{H}}_d \quad (20)$$

$$\underline{\underline{H}}_d = N_c (\underline{\underline{M}}_M - \underline{\underline{M}}_g) \quad , \quad N_c = (3 + 2 \chi_m)^{-1} \quad (21),(22)$$

## 4.2 Homogénéisation magnéto-élastique

La dernière étape du calcul consiste à homogénéiser le comportement local pour remonter aux comportements macroscopiques magnétique (23) et mécanique (24). Comme le calcul autocohérent est une procédure itérative, on utilise les grandeurs macroscopiques calculées pour ré-estimer les comportements locaux. Le calcul est réitéré jusqu'à convergence.

$$\underline{\underline{M}}_M = \langle \underline{\underline{M}}_g \rangle \quad (23)$$

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}}_g \rangle \quad (24)$$

## 5 Comparaison entre résultats expérimentaux et prévisions du modèle

Des essais ont été entrepris pour un alliage de fer-silicium livré sous forme de tôle de 0,5mm d'épaisseur. Les essais mécaniques consistent en des tractions uniaxiales sur des éprouvettes prélevées tous les 10° dans le plan de tôle. On accède ainsi aux modules d'Young et coefficients de Poisson. Des mesures magnétiques anhystérétiques ont également été réalisées pour obtenir des courbes d'aimantation et de magnétostriction longitudinale (parallèle au champ appliqué), corrigée de l'effet de forme (Hubert *et al.* (2002)). La figure 2 permet de comparer les différents résultats expérimentaux aux résultats du modèle. Le fichier d'orientations cristallographiques a été obtenu par EBSD ; il est constitué de 500 grains. Le modèle donne des

résultats particulièrement satisfaisants en ce qui concerne l'élasticité anisotrope. Les tendances et anisotropie du comportement magnétique anhystérétique sont bien reproduites. Le niveau d'aimantation prévu par le modèle est cependant surestimé. La prévision de la magnétostriction est cohérente en ce qui concerne les niveaux atteints et l'allure générale, mais l'anisotropie est insuffisamment décrite. La prise en compte d'un effet magnétique de surface permet d'inverser les tendances (Daniel *et al.* (2003)).

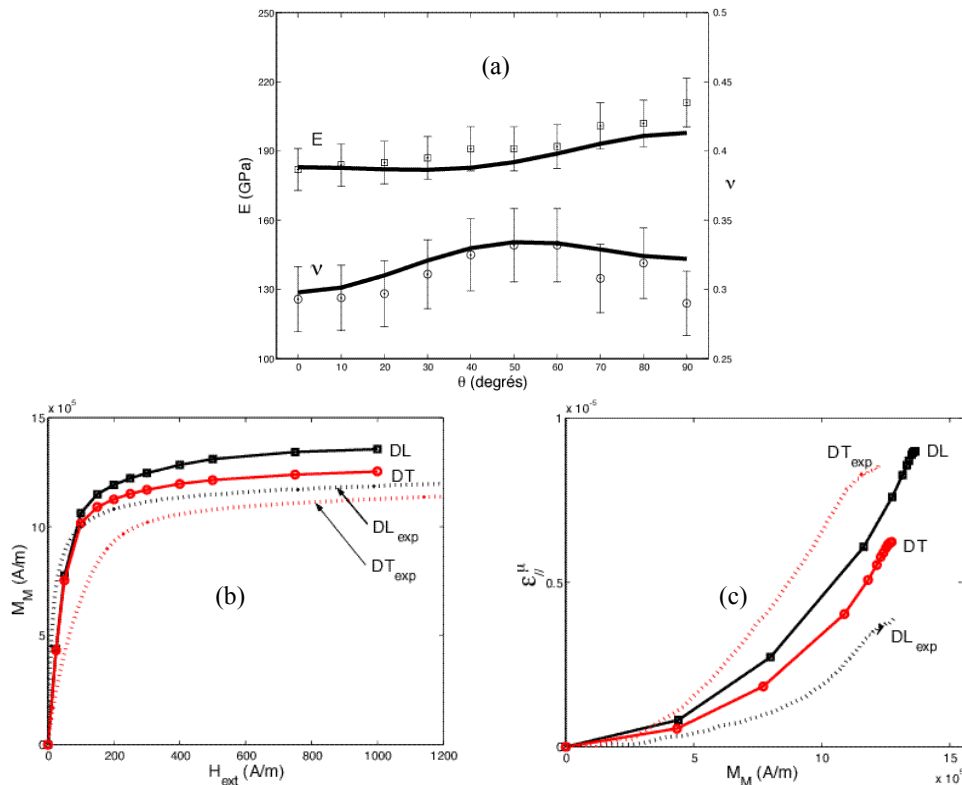


FIG. 2. Comparaisons modèle / expérience : (a) élasticité (modèle : traits pleins) ; aimantation (b) et magnétostriction longitudinale (c) anhystérétiques.

## Références

- Bozorth, R.M., 1951, *Ferromagnetism* (ed. Van Norstand), New-York.  
 Buiron, N., Hirsinger, L., Billardon, R., 1999, *J. Phys IV*, **9**, 187-196.  
 Buiron, N., thèse de doctorat, 2000, ENS-Cachan.  
 Buiron, N., Hirsinger, L., Billardon, R., 2001, *J. Phys IV*, **11**, 373-380.  
 Cullity, B.D., 1972, *Introduction to magnetic materials* (ed. Addison-Wesley).  
 Daniel, L., Hubert, O., Ossart F., Billardon, R., 2003 *J. Phys IV*, **105**, 6<sup>th</sup> European mechanics of materials conference (EMMC'6), Liège – Belgium, pp 247-254.  
 Eshelby, J.D., 1957, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A421**, 376.  
 Hubert, A., Schäfer, R., 1998 *Magnetic domains* (ed. Springer).  
 Hubert, O., Daniel, L., Billardon, R., 2003 *J. Mag. Mag. Mat.*, **254-255C**, 352-354.  
 Jiles, D.C., 1991, *Introduction to magnetism and magnetic materials*, (ed Chapman and Hall).  
 Mc Clintock, F.A., Argon, A.S., 1966, *Mechanical behaviour of materials*, (ed ; Addison-Wesley).  
 Néel, L., 1944, *J. Phys. Radiat.*, **5**, 241.  
 Webster, W.L., 1925, *Proc. R. Soc. Lond.*, **109A**, 570.