



HAL
open science

Modélisation de la rupture quasi-fragile d'un béton à l'échelle mésoscopique

Alexandre Gangnant

► **To cite this version:**

Alexandre Gangnant. Modélisation de la rupture quasi-fragile d'un béton à l'échelle mésoscopique. 34èmes Rencontres Universitaires de Génie Civil de l'AUGC (RUGC 2016), May 2016, Liège, Belgique. hal-01528938

HAL Id: hal-01528938

<https://hal.science/hal-01528938v1>

Submitted on 30 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/303749393>

Modélisation de la rupture quasi-fragile d'un béton à l'échelle mésoscopique par l'utilisation d'essai Wedge Splitting

Conference Paper · May 2016

CITATIONS

0

READS

82

1 author:



[Alexandre Gangnant](#)

Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux

8 PUBLICATIONS 0 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Modélisation de la rupture quasi-fragile du béton à l'échelle mésoscopique

Alexandre Gangnant¹

¹ Université de Bordeaux, Institut de Mécanique et d'Ingénierie (I2M), Département Génie Civil et Environnementale (GCE) - UMR CNRS 5295, 351 cours de la libération, 33400 Talence, France

e-mail : a.gangnant@i2m.u-bordeaux1.fr

RÉSUMÉ. Cette thèse propose une modélisation de l'endommagement du béton à l'échelle mésoscopique, i.e., à l'échelle du grain et de la zone d'élaboration de la fissure. Basé sur la théorie d'endommagement de Fichant, le modèle mésoscopique rend compte de l'existence d'une longueur interne conséquente. Cette longueur interne est déterminée à partir de courbes de Résistance au sens de la Mécanique Linéaire de la Rupture équivalente. De part ces courbes et différents post-traitements numériques concernant les sites à endommagement actifs (distances, position barycentre et champ d'énergie dissipée), le développement de la zone d'élaboration (FPZ) et la phase de propagation auto-similaire de la fissure principale sont clairement mis en évidence. Des essais Wedge Splitting (WS) sont également menés afin d'enrichir l'analyse du comportement à la rupture du béton au travers du modèle d'endommagement isotrope. Enfin, les conséquences néfastes du confinement de la zone d'élaboration dans les éprouvettes WS sur l'estimation des propriétés de rupture sont illustrées et discutées.

ABSTRACT. In this current thesis, a concrete damage model at mesoscale is used, i.e., at the Fracture Process Zone scale. Based on Fichant theory, the mesoscopic isotropic damage model is able to give an internal length. Within the framework of equivalent Linear Elastic Fracture Mechanics (eq.LEFM), the FPZ internal length is directly estimated from Resistance Curve (known as R-Curve). With the use of R-curve and damaged activated sites analyses (such as average distance, barycenter position or dissipated energy distribution), the FPZ development and the steady state propagation of the main crack are highlighted. Wedge Splitting Tests (WST) are also carried out in order to assess fracture properties and to enrich the analysis of the fracture behaviour of concrete through the isotropic damage model. Finally, the consequences of FPZ confinement inside the Wedge Splitting Specimen and on fracture properties are illustrated and discussed.

MOTS-CLÉS : endommagement, mésoscopique, béton, éléments-finis, quasi-fragile, zone d'élaboration de la fissure

KEYWORDS: damage, mesoscopic, concrete, finite element, quasi-brittle, fracture process zone

1. Introduction

Le comportement quasi-fragile, i.e., le comportement adoucissant des bétons (et autres matériaux de constructions) est dû à la présence d'une zone d'élaboration de la fissure (FPZ) souvent non-négligeable. Cette zone endommagée est un lieu de redistributions de contraintes favorisant la dissipation de l'énergie élastique stockée dans la structure. Ce caractère adoucissant donne lieu à la localisation de déformations (ce phénomène doit être numériquement traité par des techniques de régularisation). La compréhension du processus de développement de la FPZ et sa caractérisation (par des analyses numériques [SKA 10] ou expérimentales [WU 11]) est un objectif majeur dans l'étude du comportement à la rupture du béton. D'autre part, la taille de la FPZ apparaît dépendante de la géométrie des structures entraînant de surcroît une dépendance analogue des propriétés de rupture vis-à-vis de la géométrie des structures. Ce couplage propriétés/géométrie des structures représente un verrou majeur pour le dimensionnement optimal des structures de génie civil. Dans cette étude, un béton numérique par une approche aux éléments-finis en 2D est mis en place. La combinaison d'une approche discontinue au travers de courbe de Résistance (par la Mécanique de la Rupture) et d'une approche continue (modèle d'endommagement isotrope Fichant-Laborderie) à l'échelle mésoscopique permet d'apporter une première piste de compréhension du processus de fissuration. En effet, l'utilisation de l'échelle mésoscopique devrait permettre la description des conséquences du désordre initial local sur la réponse macroscopique. Une campagne d'essai Wedge Splitting (WS) [BRÜ 90] est réalisée et simulée. Le couplage numérique/expérimentale permet de mettre d'une part en exergue l'efficacité et la puissance du modèle d'endommagement, mais aussi de soulever des interrogations sur l'essai WS.

Après une présentation du matériau étudié et du principe de l'essai WS, la mécanique élastique de la rupture équivalente et le modèle de comportement sont explicités. Sur la base des résultats, une analyse concernant le processus de la fissuration est réalisée. Le but principal étant de proposer une estimation plus fine de la FPZ.

2. Modèles et Matériau

2.1. Essai Wedge Splitting et béton étudié

Des essais Wedge Splitting ont été réalisés sur des éprouvettes de béton ordinaire dont la formulation est basée sur un béton prêt à l'emploi proposée par *Unibéton* ($E/C=0.63$, $G/S=1.54$, CEM II/A 42.5). Les granulats utilisés sont des concassés de roches calcaires. Ces derniers sont répartis suivant 10 classes de fractions volumiques et de diamètres différents (1,2,4,5,6,6.3,8,10,12.5 et 14mm) pour une fraction volumique globale des granulats de 70%. Soulignons que ce béton a déjà fait office ces dernières années de diverses recherches sur la rupture quasi-fragile [GRÉ 13] [ROJ 12]. Cet essai de rupture dont la stabilité n'est plus à prouver [HAR 95] permet l'évaluation des propriétés de rupture [GAN 13]. L'enfoncement vertical d'un coin en acier présentant un demi-angle de 15° provoque une force transversale (F_{sp}) entraînant une ouverture d'entaille ($CMOD$). L'essai se fait en pilotage par ouverture d'entaille à une vitesse initiale de $25e^{-3} \text{ mm.min}^{-1}$ (la vitesse est augmentée en fin d'essai). Deux dimensions d'éprouvettes sont expérimentalement et numériquement étudiées : $250 \times 250 \times 100 \text{ (mm}^3\text{)}$ et $300 \times 250 \times 100 \text{ (mm}^3\text{)}$ (respectivement nommées WST 250 et WST 300). Il est à noter qu'une entaille de faible largeur (0.6 mm) est réalisée lors du coulage. 8 éprouvettes de chaque dimension, conditionnées dans l'eau courant à 20°C , sont testées en moyenne à 180 jours. En plus de l'enregistrement du comportement global via la courbe force-déplacement, une instrumentation par l'imagerie et l'acoustique a été mise en place.

2.2. Courbe de Résistance : la Mécanique Linéaire de la Rupture Élastique équivalente

L'existence de la FPZ rend impossible l'application de la mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER). En revanche, une approximation du comportement quasi-fragile est possible en utilisant la mécanique linéaire élastique de la rupture équivalente (MLEReq) [BAŽ 90]. La MLEReq émet ainsi comme postulat (vérifiable et vérifié par des cycles charge/ endommagement/ propagation/ décharge) que la diminution de la complaisance apparente du spécimen ($\lambda = CMOD/F_{sp}$) est traduite par la propagation d'une fissure élastique équivalente (a_{eq}), i.e., une fissure qui, dans un modèle élastique parfait, produit la même complaisance que celle constatée (Figure 1).

Les propriétés de rupture du béton sont estimées à partir de courbe de Résistance (ou Courbe-R). De plus, la lecture de la courbe-R permet de mettre en avant le processus d'évolution de la FPZ. Une courbe-R caractérise la variation de la résistance à la propagation de la fissure G_R [1], i.e., la valeur du taux de restitution d'énergie lors de la propagation d'une fissure d'un incrément $\Delta a_{eq} (= a_{eq} - a_0)$. Dans la littérature, il est dit que la longueur de la FPZ est approximativement égale à 2 fois Δa_{eq} . Pour tracer une courbe-R, il est nécessaire de déterminer la

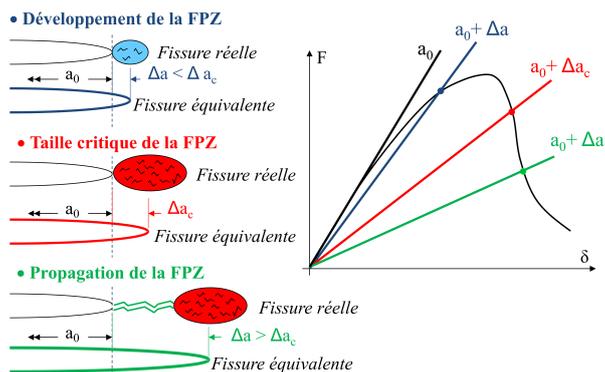


Figure 1. Principe de la MLReq.

fonction polynomiale de complaisance numérique $\lambda(\alpha)$ (où $\alpha = a_{eq}/Ds$ est la longueur relative de la fissure et Ds la hauteur caractéristique du spécimen). Cette fonction, dépendante de la géométrie, est déterminée à la suite d'une simulation aux éléments-finis en utilisant un modèle élastique linéaire. Par comparaison des complaisances numériques et expérimentales, la méthode de la dichotomie est utilisée pour déterminer la longueur de fissure élastique équivalente (du point de vue de la MLReq). Cette longueur déterminée, il est possible de calculer la résistance à la propagation de la fissure :

$$G(a) = \frac{F_{sp}^2}{2b} \frac{\delta\lambda}{\delta a} = \frac{F_{sp}^2}{2bDs} \lambda'_{num}{}^{cor}(\alpha) = G_R(\alpha) \quad [1]$$

où b est l'épaisseur du spécimen et $\lambda'_{num}{}^{cor}(\alpha)$ est la dérivée de la fonction de la complaisance numérique corrigée, i.e. ajustée par un coefficient de correction *cor* défini comme étant le rapport entre la complaisance initiale expérimentale et la complaisance numérique avant propagation (lorsque $a_{eq} = a_0$). En théorie, pour les matériaux quasi-fragiles, la courbe-R présente une partie croissante suivant une loi puissance [2] décrivant la phase de développement de la FPZ, suivi d'un régime plateau correspondant à la propagation auto-similaire de la fissure [MOR 07] où une résistance à la propagation de fissure critique (G_{Rc}) est atteinte. Toutefois, il est à souligner qu'une courbe-R n'est pas intrinsèque au matériau car elle dépend de la géométrie de l'échantillon considéré.

$$G_R(\Delta a) = \frac{G_{Rc}}{\Delta a_c^\beta} \Delta a^\beta \quad \text{si } \Delta a < \Delta a_c \quad [2]$$

où G_{Rc} et Δa_c sont respectivement le taux de restitution critique et l'incrément de fissure critique (ou la longueur interne) correspondants au moment où une propagation auto-similaire de la fissure est observée. L'exposant β fixe d'une certaine manière la vitesse de restitution d'énergie lors du développement. Dans cette étude, les courbes-R issues des essais et des simulations numériques sont réalisées et utilisées dans la compréhension du processus de fissuration.

2.3. Modèle d'endommagement isotrope Fichant-Laborderie

Dans la section précédente, une approche avec une discontinuité cinématique permettant d'obtenir des propriétés de rupture et de surcroît des informations sur la zone d'élaboration de la fissure équivalente a été présentée. Une approche continue sur la rupture du béton peut être utilisée à l'aide des modèles d'endommagement. Ces modèles sont basés sur la thermodynamique des processus irréversibles où chaque point de matériau peut être considéré comme un sous-système thermodynamique en équilibre (théorie de l'état local). Un modèle d'endommagement isotrope, basé sur le modèle de Fichant [FIC 96] qui est une extension du modèle de Mazars [MAZ 86], est utilisé. Ce modèle prend en compte l'effet unilatéral et la plasticité du béton, cette dernière a été désactivée dans cette étude. L'endommagement est explicité par une variable scalaire d'état interne D (variant de 0 pour un matériau sain à 1 pour un matériau complètement endommagé). La notion d'endommagement conduit au concept de la contrainte effective $\tilde{\sigma}$ [3] représentant la contrainte à appliquer à un élément de matière non-endommagé pour qu'il se déforme de la même quantité qu'un élément endommagé sous une contrainte σ :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^0 : \varepsilon_{kl}^e, \quad [3]$$

où ε_{kl}^e représente le tenseur des déformations élastiques et C_{ijkl}^0 le tenseur de rigidité isotrope élastique initiale du matériau. Une relation entre la contrainte totale et effective est établie [4] :

$$\sigma_{ij} = (1 - D)\langle \tilde{\sigma} \rangle_{ij}^+ + (1 - D^{\alpha_c})\langle \tilde{\sigma} \rangle_{ij}^-, \quad [4]$$

où $\langle \tilde{\sigma} \rangle_{ij}^+$ et $\langle \tilde{\sigma} \rangle_{ij}^-$ désignent les parties positives et négatives du tenseur des contraintes effectives et α_c un paramètre de pondération de l'endommagement lors d'un état de compression. La loi de comportement est basée sur le comportement en traction du béton : linéarité élastique jusqu'à la résistance en traction f_t du matériau puis un comportement adoucissant en post-pic régit par une loi exponentielle où la contrainte tend vers 0 lorsque la déformation tend vers ∞ [5]. La dépendance au maillage due au phénomène de localisation des déformations est partiellement contrôlée par une méthode de régularisation énergétique.

$$\sigma(\varepsilon) = f_t \exp \left[\left(\frac{f_t h}{G_f^*} \right) (\varepsilon_{d0} - \varepsilon) \right] = E(1 - D)\varepsilon \quad \text{si } \varepsilon > \varepsilon_{d0} \quad [5]$$

où ε_{d0} ($= f_t/E$) étant le seuil d'endommagement, E le module d'élasticité initial du matériau, h la taille de l'élément et G_f^* correspondant à la différence entre l'énergie de rupture du matériau G_f et son énergie de déformation élastique lorsque la contrainte est maximale ($0.5h f_t \varepsilon_{d0}$).

L'équation 5 permet d'établir la loi d'évolution de l'endommagement comme étant :

$$D(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\varepsilon} \exp \left[\left(\frac{f_t h}{G_f^*} \right) (\varepsilon_{d0} - \varepsilon) \right]. \quad [6]$$

3. Étude expérimentale et numérique

3.1. Modélisation numérique

Le modèle d'endommagement Fichant-Laborderie est appliqué dans la présente étude à l'échelle de la FPZ, soit à l'échelle mésoscopique et en 2D (hypothèse de contrainte plane). Le matériau est considéré comme biphasique, i.e., les granulats sont compris dans une matrice à pâte cimentaire. Préalablement, un tirage aléatoire des granulats est réalisé suivant un algorithme stochastique-heuristique. La granulométrie du béton doit être respectée, i.e. nulle suppression de classe(s) par une quelconque méthode d'homogénéisation : une précédente étude a montré que lors d'une homogénéisation numérique (petits granulats et mortier), on n'injecte pas les mêmes mécanismes induits par une (ou des) classe(s) de granulats seule(s) avec la pâte [GAN 15]. Les granulats sont idéalisés par des disques [LAB 07]. Un maillage diffus est utilisé : les propriétés de chaque composant (Tableau 1) sont directement projetées sur le champ par éléments associé à une grille de maille régulière, où, chaque point de Gauss suit la loi d'endommagement précédemment énoncée. L'utilisation d'un maillage diffus (Figure 2) rend possible la représentation des différentes classes granulaires et ainsi de respecter au mieux la compacité granulaire ; et cela dépend de la modélisation d'une interface de transition (ITZ) dont les paramètres mécaniques sont difficilement identifiable et dont l'épaisseur est de l'ordre du μm . Néanmoins, le maillage diffus provoque naturellement un fort gradient de propriétés au niveau de l'interface pâte/granulats, autrement dit, l'endommagement risque fort de s'initier au niveau des éléments d' « interface ».

	Propriétés	Granulats	Matrice cimentaire
Propriété élastique	$E(GPa)$	45	25
	ν	0.3	0.2
Propriété de rupture	$f_t(MPa)$	6	3
	$G_f(J/m^2)$	60	40

Tableau 1. Paramètres des composants utilisés dans le modèle

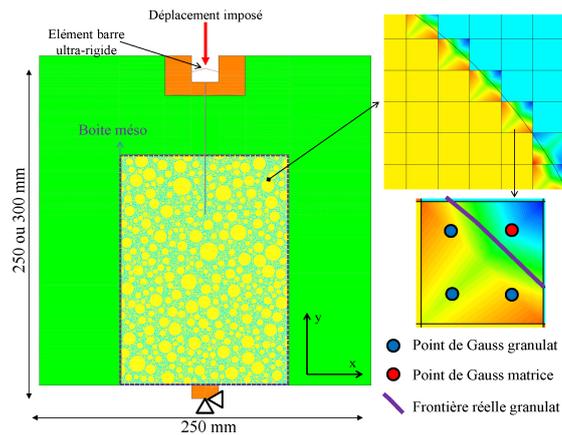


Figure 2. Maillage diffus sur l'éprouvette WST - Echelle macro/méso .

3.2. Résultats et Analyses

Deux tirages par dimension sont simulés via le modèle d'endommagement à l'échelle mésoscopique. Par comparaison, le modèle numérique mis en place est capable de retranscrire le comportement mécanique global du béton étudié et cela même en 2 dimensions (Figure 3(a)). Il est à noter que pour une granulométrie donnée, la position des granulats influence le comportement à rupture (force au pic et énergie de fissuration). D'un point de vue dissipation de l'énergie, il y a très peu, voire, aucune propagation auto-similaire présente sur les courbes-R (Figure 3(b)) . Il a été, tout de même, constatée un minima de propagation pour les éprouvettes WST 300 sur 14mm. Ce manque de propagation auto-similaire est dû à un confinement non-négligeable de la FPZ : la zone endommagée ne cesse de changer de forme (ce phénomène rend compliqué toute étude par des modèles de zone cohésive par exemple). Le phénomène de confinement provient généralement d'un ligament trop court ou de propriétés peu fragiles des composants.

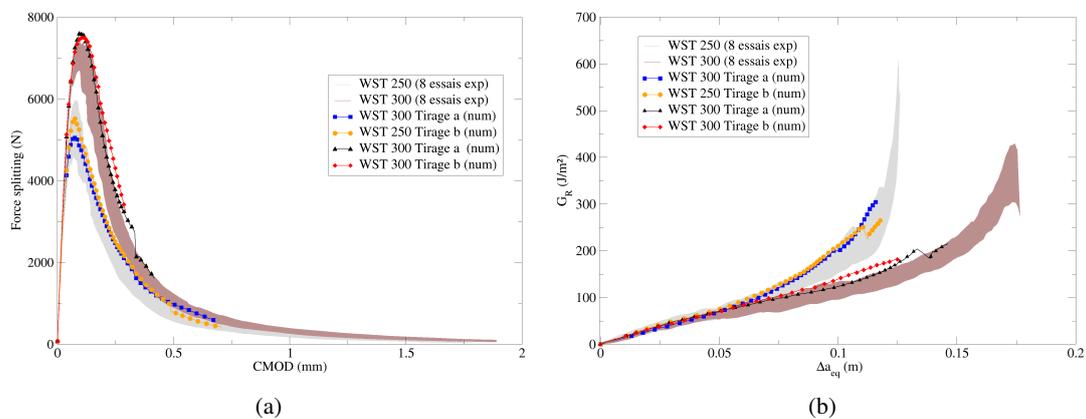


Figure 3. Comparaison des résultats numériques-expérimentaux, (a) courbes force-déplacement, (b) courbes-R

3.3. Point sur le confinement de la FPZ dans les éprouvettes WS

Nous proposons une illustration du problème de confinement dans la zone d'élaboration de la fissure au travers d'une étude aux éléments-finis en élasticité linéaire sur les deux géométries WS pour une force unitaire. La distribution des contraintes le long du ligament pour chaque longueur de fissure élastique équivalente indique une forte présence d'une zone de compression non-loin de la supposée zone d'élaboration de la fissure. Effectivement, l'essai WS présente une zone comprimée pouvant être à l'origine de ce confinement [LÖF 07]. En considérant que l'incrément de longueur de fissure élastique équivalente est sensiblement égale à 2 fois la longueur de la FPZ, le

développement "libre" de la FPZ se retrouve très vite limité : dès que la fissure élastique équivalente atteint environ 30% du ligament, le risque de confinement devient important (Figure 4).

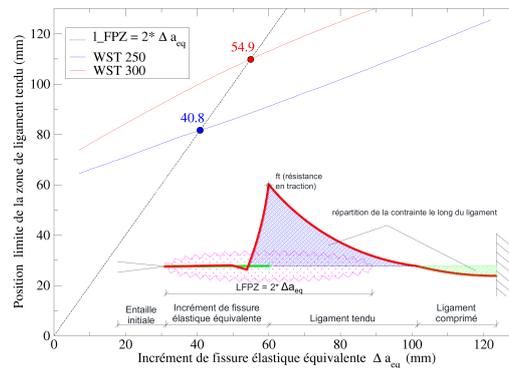


Figure 4. Position de la fin du ligament tendu pour les deux géométries WS en fonction de l'incrément de longueur élastique équivalente .

4. Mise en évidence de la zone d'élaboration de la fissure via le modèle numérique

Considérant les mêmes dimensions d'éprouvette WS, il est proposé de repousser le risque de confinement en utilisant une matrice cimentaire plus « fragile ». Il est maintenant proposé une étude numérique en divisant par 2 la valeur de l'énergie de rupture de la pâte de ciment : pour la suite de l'étude il est considéré $G_{fciment} = 20 J/m^2$.

4.1. Existence d'une longueur interne donnée par le modèle

Pour chaque dimension, un régime plateau est observé (Figure 5) : le modèle est capable de rendre compte d'une longueur interne. Notons que le rôle de la longueur du ligament est également mis en évidence, le confinement de la FPZ est prépondérante lors de l'utilisation d'une WST 250 (ce point à été mis en lumière sur la Figure 4). Les résultats montrent, pour le choix d'une géométrie WS adéquate à un matériau donné, que le modèle mésoscopique est capable d'estimer numériquement une longueur interne à contrario des modèles d'endommagement non-local où cette dernière, difficilement quantifiable, est un paramètre d'entrée inhérent à la formulation de l'endommagement non-local. Connaissant la courbe-R pour une simulation donnée, les différents stades d'évolution de la FPZ peuvent être identifiées et sur la base de cette identification nous proposons des techniques de post-traitements permettant de mettre en exergue le processus de fissuration. Notons également que plus le ligament est grand, plus la longueur interne et le taux de restitution critique sont faibles.

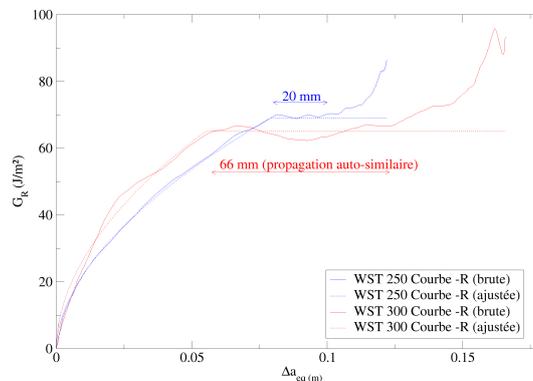


Figure 5. Courbes-R issues de simulations numériques WST

4.2. Étude sur les sites à endommagement actifs

Par définition la courbe de Résistance est caractérisée par la variation de l'énergie dissipée par unité de surface créée à un instant t . Dans cette section, il est proposé une étude sur le champ d'énergie restituée volumique W_r (en J/m^3). Ce champ est numériquement calculé à partir du produit tensoriel du champ de déformations totales et de contraintes totales entre deux instants de calcul (t et $t - 1$)[7].

$$W_r = 0.5 (\sigma^{t-1} * \varepsilon^t - \sigma^t * \varepsilon^{t-1}) \tag{7}$$

où σ et ε sont respectivement les champs par éléments contenant les valeurs des contraintes et des déformations suivant les différentes directions. L'étude de l'évolution de l'énergie dissipée (en se basant sur le postulat que cette dernière est uniquement due à l'endommagement) apporte une première piste d'investigation sur le processus de fissuration, après le pic il semblerait qu'une largeur de la zone endommagée soit fixée (Figure 6(a)). De plus la figure 6(b) met en exergue la propagation de la fissure en post-pic, i.e., les points de Gauss en arrière de la zone endommagée ne semble plus dissiper de l'énergie.

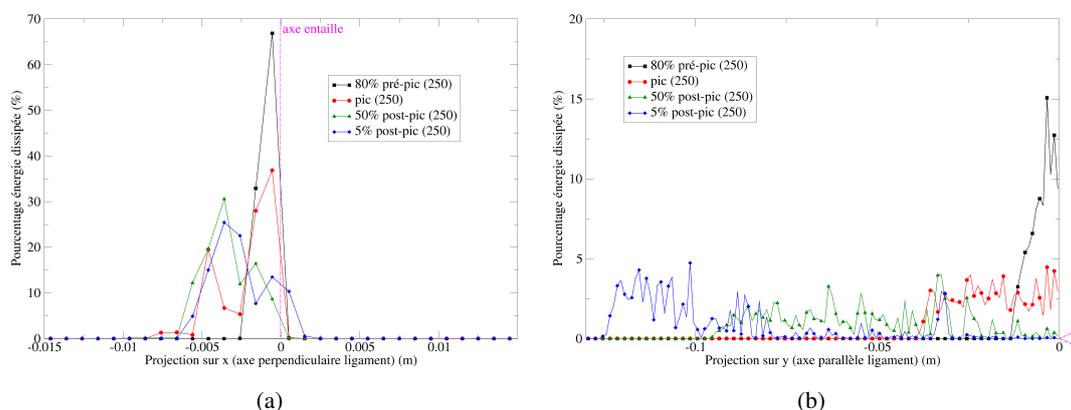


Figure 6. Distribution de l'énergie dissipée à différentes instants de la simulation, (a) projection perpendiculaire au ligament, (b) projection parallèle au ligament

La cinématique du processus de fissuration peut être également mise en évidence en suivant l'évolution du barycentre (pondéré par l'énergie dissipée) et l'évolution des distances moyennes entre sites. Lors de la propagation la position latérale du barycentre semble est constante (Figure 7(a)) suivie d'une nouvelle évolution lors de la phase de confinement. Ces derniers phénomènes sont également visibles lors de l'étude de la distance moyenne entre sites actifs : la propagation indique une stabilisation de la distance avant une diminution de cette dernière lors du confinement (Figure 7(b)).

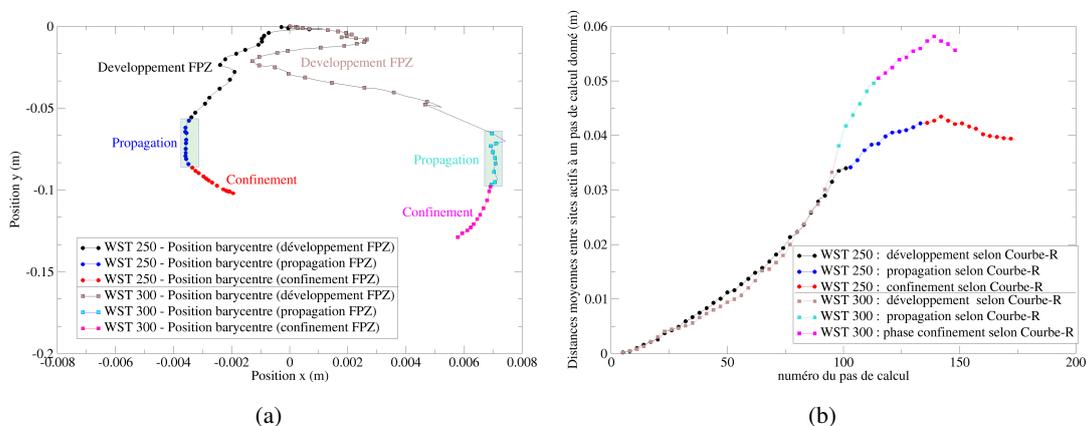


Figure 7. (a) Etude la position du barycentre au cours d'une simulation , (b) Evolution de la distance moyenne entre sites actifs

5. Conclusion et perspectives

Dans cette étude, une analyse à partir d'une approche continue-discontinue est réalisée afin d'étudier le processus de fissuration dans le béton ordinaire. Très vite, le problème de confinement est mis en lumière au travers des essais de rupture : le choix d'un ligament suffisamment grand doit pallier cette difficulté. En effet, il est aisé de produire et de travailler sur des courbes force-déplacement cependant, la lecture et l'analyse seules de ces courbes ne permettent pas la mise en exergue de l'évolution de la FPZ. Ce constat est une mise en garde quant à l'utilisation d'énergie de rupture moyenne G_F au sens du *RILEM-TC-50*. Un raisonnement énergétique au travers de la courbe-R rend compte des différents phénomènes liés à la FPZ. De plus, le modèle d'endommagement isotrope mis en place permet, avec très peu de paramètres, de respecter le comportement à la rupture du béton et par un jeu de post-traitements de mettre en évidence la zone d'élaboration de fissure numérique. De toute évidence, il semblerait au travers de cette étude, que la FPZ soit une zone fine et longue, donc sujette au confinement. Dans le cas d'une WS, l'utilisation d'une éprouvette longue et éventuellement peu rigide pourrait permettre de s'affranchir du confinement. Par la suite une simulation 3D sera apportée afin de déterminer l'influence de la dimension de l'étude ainsi que des simulations où l'hétérogénéité des propriétés des constituants sera considérée (distribution gaussiennes des propriétés). Un traitement d'émission acoustique (par les mêmes méthodes EF) et une corrélation d'images numériques seront réalisés afin de corroborer les résultats numériques sur le processus de fissuration et la géométrie de la zone d'élaboration de la fissure.

Remerciements

L'auteur tient à remercier l'Equipex (ANR-10-EQPX-16) qui a permis, par le financement, la réalisation des essais WS et également le Mésoscentre de Calcul Intensif Aquitain (MCIA) sur lequel l'ensemble des simulations ont été effectuées.

6. Bibliographie

- [BAŽ 90] BAŽANT Z. P., KAZEMI M. T., « Size effect in fracture of ceramics and its use to determine fracture energy and effective process zone length », *Journal of the American Ceramic Society*, vol. 73, n° 7, p. 1841–1853, 1990.
- [BRÜ 90] BRÜHWILER E., WITTMANN F., « The wedge splitting test, a new method of performing stable fracture mechanics tests », *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 35, n° 1-3, p. 117–125, janvier 1990.
- [FIC 96] FICHANT S., Endommagement et anisotropie induite du béton de structures : modélisations approchées, PhD thesis, Cachan, Ecole normale supérieure, 1996.
- [GAN 13] GANGNANT A., MOREL S., « Rupture quasifragile des bétons et mortiers. MLER équivalente et courbe-R », *Congrès Français de la Mécanique*, Bordeaux, 2013.
- [GAN 15] GANGNANT A., MOREL S., LA BORDERIE C., SALIBA J., « Modélisation de la rupture quasifragile du béton à l'échelle mésoscopique », *Rencontres Universitaires de Génie Civil*, 2015.
- [GRÉ 13] GRÉGOIRE D., ROJAS-SOLANO L., PIJAUDIER-CABOT G., « Failure and size effect for notched and unnotched concrete beams », *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 37, n° 10, p. 1434–1452, juillet 2013.
- [HAR 95] HARMUTH H., « Stability of crack propagation associated with fracture energy determined by wedge splitting specimen », *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 23, p. 103–108, 1995.
- [LAB 07] LA BORDERIE C., LAWRENCE C., MENO A., « Approche mésoscopique du comportement du béton : Apport de la représentation géométrique », *Revue européenne de génie civil*, vol. 11, n° 4, p. 407–421, 2007.
- [LÖF 07] LÖFGREN I., STANG H., OLESEN J. F., « The WST method, a fracture mechanics test method for FRC », *Materials and Structures*, vol. 41, n° 1, p. 197–211, mars 2007.
- [MAZ 86] MAZARS J., « A description of micro- and macroscale damage of concrete structures », *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 25, n° 5–6, p. 729–737, 1986.
- [MOR 07] MOREL S., « R-curve and size effect in quasibrittle fractures : Case of notched structures », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, n° 13, p. 4272–4290, juin 2007.
- [ROJ 12] ROJAS SOLANO L. B., Endommagement non-local, interactions et effets d'échelle, PhD thesis, Pau, 2012.
- [SKA 10] SKARŻYŃSKI I., TEJCHMAN J., « Calculations of fracture process zones on meso-scale in notched concrete beams subjected to three-point bending », *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 29, n° 4, p. 746–760, juillet 2010.
- [WU 11] WU Z., RONG H., ZHENG J., XU F., DONG W., « An experimental investigation on the FPZ properties in concrete using digital image correlation technique », *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 78, n° 17, p. 2978–2990, décembre 2011.