



HAL
open science

Algorithmique et programmation dans l'enseignement des mathématiques à l'aide de la calculatrice : étude didactique pour la création d'un site Internet de formation des enseignants

Annie Bessot, Alain Birebent, Thanh Nguyen Chi

► To cite this version:

Annie Bessot, Alain Birebent, Thanh Nguyen Chi. Algorithmique et programmation dans l'enseignement des mathématiques à l'aide de la calculatrice : étude didactique pour la création d'un site Internet de formation des enseignants. [Rapport de recherche] Laboratoire Leibniz. 2006. hal-01528254

HAL Id: hal-01528254

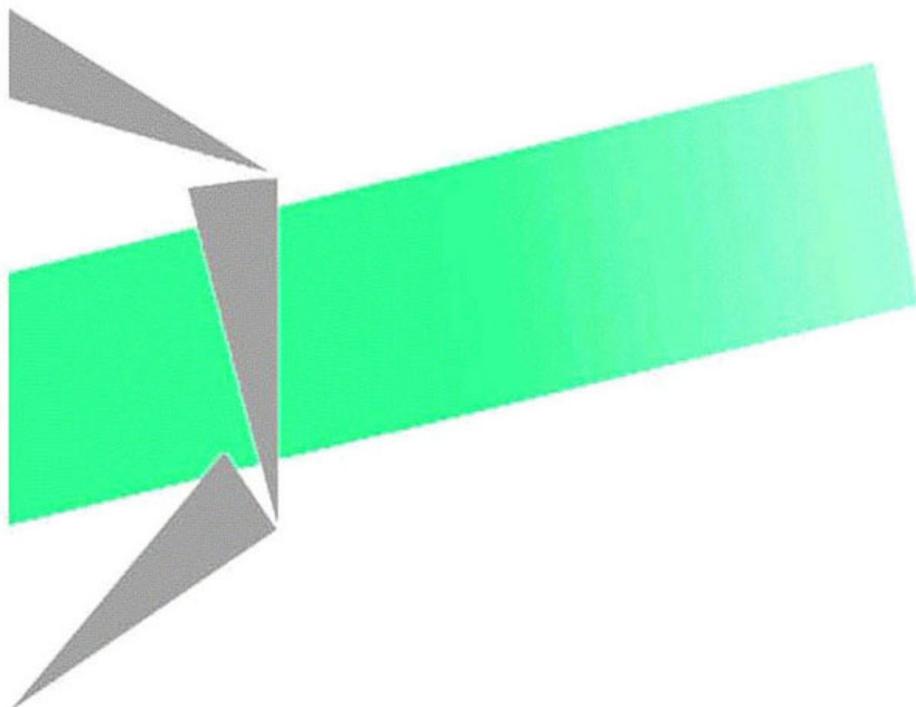
<https://hal.science/hal-01528254>

Submitted on 1 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les cahiers Leibniz



Algorithmique et programmation dans l'enseignement des
mathématiques à l'aide de la calculatrice : étude didactique
pour la création d'un site Internet de formation des
enseignants

Annie Bessot

Laboratoire Leibniz-IMAG, 46 av. Félix Viallet, 38000 GRENOBLE, France -
ISSN : 1298-020X

n° 155
Dec. 2006

Site internet : <http://www-leibniz.imag.fr>

Équipe de Didactique Des Mathématiques
Laboratoire Leibniz
Centre National de la Recherche Scientifique
Institut National Polytechnique de Grenoble
Université Joseph Fourier, Grenoble 1
France

Département de Mathématiques
Université Pédagogique d'Ho Chi Minh ville

Viêt-Nam

**Algorithmique et programmation dans
l'enseignement des mathématiques
à l'aide de la calculatrice :
étude didactique pour la création d'un site Internet
de formation des enseignants**

par

Annie Bessot

Avec la collaboration de

Alain Birebent

Nguyen Chi Thanh

Recherche ayant reçu le soutien du Programme MIRA 2003

Responsable de la recherche : Annie Bessot

Référence : 03 031089 01 (I)

Référence : 03 031089 02 (F)

Ont participé à ce travail

1. De l'équipe de Didactique Des Mathématiques (DDM), Laboratoire Leibniz, Centre National de la Recherche Scientifique / Institut National Polytechnique de Grenoble / Université Joseph Fourier

Annie Bessot, Responsable de l'équipe DDM, Maître de Conférence à l'UJF
Alain Birebent, PRAG à l'Université Pierre Mendès-France, Grenoble 2
Nguyen Chi Thanh, durant son doctorat en co-tutelle au sein de l'équipe DDM
Lê Thai Bao Tien Trung, doctorat en co-tutelle au sein de l'équipe DDM

2. Du Département de Mathématiques de l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh ville, Viêt-Nam

Lê Thi Hoai Chau, Maître de conférence à l'UPHCM, Responsable du Thac Sy de didactique des mathématiques (Master 2)
Lê Van Tiên, Maître de conférence à l'UPHCM, directeur adjoint de la formation à l'UPHCM
Doan Huu Hai, Maître de conférence à l'UPHCM, Directeur de la formation à l'UPHCM

TABLE DES MATIERES

Introduction	p. 7
Partie I	
Étude de deux systèmes d'enseignements, l'enseignement des mathématiques au Lycée en France et au Viêt-Nam	p. 11
I. Introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement secondaire (EMS) en France et au Viêt-Nam	p. 13
II. Une enquête épistémologique sur l'algorithmique et la programmation	p. 14
III. Place et rôle de la calculatrice à mémoires dans EMS en France et au Viêt-Nam	p. 17
Partie II	
Une réalisation, la calculatrice Alpro	p. 21
I. Principaux objectifs du projet Alpro	p. 23
II. La première version d'Alpro réalisée	p. 24
III. Les développements envisagés	p. 28
Partie III	
Élaboration de scénarios expérimentaux sur des notions de base de l'algorithmique et de la programmation	p. 29
I. Les choix macro-didactiques faits pour l'ingénierie didactique	p. 31
II. Les conditions de l'expérimentation et du recueil des données	p. 34
III. L'expérimentations et ses analyses	p. 36
Partie IV	
Principaux résultats de l'étude didactique sur l'enseignement d'objets propres à l'algorithmique et la programmation à l'aide de la calculatrice	p. 49
Partie V	
Création d'un site Internet dédié à la formation des enseignants de mathématiques du secondaire, par la formation à la didactique des mathématiques	p. 55
I. Le cahier des charges du site	p. 57
II. Le développement informatique du site	p. 60
Conclusion et perspectives	p. 61
Bibliographie	p. 65

Introduction

Cette recherche collaborative entre l'Université Joseph Fourier (UJF) et l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh (UPHCM) a débuté janvier 2004 et doit s'achever en décembre 2006.

Cette recherche s'articule à deux thèses précédemment réalisés au sein de l'équipe DDM :

Lê Van T. (2001) *Étude didactique des liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viêt-nam*, Thèse en cotutelle, UPHCM et UJF.

Birebent A. (2001) *Articulation entre la calculatrice et l'approximation décimale dans les calculs numériques de l'enseignement secondaire français – Choix des calculs trigonométriques pour une ingénierie didactique en classe de Première scientifique*.

Elle a été à l'origine de mémoires de recherche de master 2 de l'UPHCM :

Nguyen Thi N. H. (2004) *La calculatrice de poche dans l'enseignement – apprentissage des mathématiques au Viêt-nam – Le cas du système d'équations du premier degré à deux inconnues en classe de 10^e*.

Nguyen Phuong T. (2004) *Une étude didactique sur l'enseignement – apprentissage de la racine carrée en classe 9*.

Et du choix des sujets de thèses en cotutelle Viêt-nam – France de :

Nguyen C.T. (2005) *Étude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice*.

Lê Thai Bao T.T. (en cours) *Étude didactique des relations entre l'enseignement de la notion de limite au lycée et décimalisations des nombres réels dans un environnement « calculatrice »*.

Rappelons trois aspects originaux de ce projet :

- une approche contrôlée par les outils théoriques de la didactique des mathématiques de questions vives sur l'enseignement des mathématiques dans les deux pays ;
- des regards croisés de chercheurs vietnamiens et français, pour prendre en considération des aspects sociaux et culturels ;
- une contribution au développement éducatif du Viêt-Nam, en s'appuyant sur une étude comparative, entre deux pays de niveau technologique différent, du problème de l'introduction d'éléments d'informatique dans l'enseignement des mathématiques.

Ce projet qui débouche sur la création d'un site Internet permet à la région Rhône-Alpes de soutenir sur le long terme la formation des enseignants et une recherche collaborative avec la Région d'Ho Chi Minh Ville (Viêt-nam), dans le domaine de la didactique. Il renforce donc, dans ce domaine, la position de partenaire privilégié qu'a la Région Rhône-Alpes avec cette région d'un pays en voie de développement économique et technologique.

Rappelons aussi que l'hypothèse de recherche fondamentale de ce projet est que les calculatrices (présentes en permanence dans les classes de mathématiques) offrent d'intéressantes et réelles possibilités pour construire des actions d'enseignement et de formation d'enseignants sur les problèmes liés à l'introduction d'éléments d'informatique dans l'enseignement des mathématiques.

Dans la rédaction de ce rapport, nous faisons le choix d'explicitier le travail scientifique d'ingénierie didactique qui a permis de fabriquer le scénario central du projet issu de notre

hypothèse de recherche. Ce travail a été effectué dans le cadre de la thèse en cotutelle de Nguyen C.T. (2005).

Partie I

Étude des deux systèmes d'enseignement L'enseignement des mathématiques au Lycée en France et au Viêt-Nam

Dans le domaine du calcul numérique, transversal aux mathématiques, nous avons cherché à :

- caractériser les spécificités et les ressemblances dans les formes et les organisations des objets de savoirs concernés par l'utilisation de la calculatrice ;
- déterminer des types de tâches existantes dans ces systèmes dans lesquelles les interrelations entre mathématiques et informatique (par l'intermédiaire de la calculatrice) interviennent ;
- repérer les pratiques professionnelles des enseignants concernant l'intégration de la calculatrice dans les activités de calcul numérique.

I. Introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement secondaire en France et au Viêt-Nam

Il y a bien volonté d'introduire des éléments d'informatique dans les deux institutions, l'enseignement des mathématiques dans le secondaire (EMS) en France et au Viêt-Nam, mais avec deux points de vue différents.

Au Viêt-Nam, l'organisation de l'enseignement proposée est d'introduire d'abord la notion d'algorithme en tant qu'objet de savoir avec définition, propriétés, exemples, puis d'évoquer le fonctionnement d'un ordinateur absent.

En France, l'enseignement veut attacher des notions de base de l'informatique (comme boucle, test, structure de données) à des domaines des mathématiques, comme l'analyse, la statistique et récemment l'arithmétique, sans que la notion d'algorithme soit objet d'enseignement.

Dans les deux cas, le topos de l'élève est très réduit comme le montre l'analyse des exercices proposés aux élèves dans les manuels : peu ou pas d'exercices sur ces notions.

Dans les deux institutions, on peut faire un constat d'échec de ces tentatives mais à des degrés différents.

Au Viêt-Nam, on a assisté à la suppression totale du chapitre informatique dans EMS et une deuxième tentative (introduction de l'informatique en tant que discipline) a, elle aussi, été éphémère. En France, si les notions de base en informatique sont maintenues dans les programmes, elles vivent mal : cela se traduit dans les manuels par le refus de construire des types de tâches relatifs à la programmation des algorithmes et dans les classes par le recours à des logiciels de calcul pour instrumenter sans programmation les techniques associées à ces tâches.

On peut avancer certaines raisons explicatives de cet échec.

Au Viêt-Nam, le chapitre concerné est un « isolat » dans EMS (pour reprendre des termes de Lê Van 2001), puisque les algorithmes itératifs nécessaires à cette partie sont peu présents dans les mathématiques enseignées. De plus, l'absence ou la non prise en compte des instruments de calcul (calculatrice, ordinateur) font que les algorithmes itératifs de calcul ne sont jamais effectifs au-delà des calculs des premiers termes de l'itération (calculs à la main).

En France, il existe dans EMS des habitats possibles pour les algorithmes itératifs de calcul en analyse, en statistique et en arithmétique. Leur présence a été voulue par les promoteurs de la contre-réforme¹ pour introduire l'activité expérimentale dans l'enseignement des

¹ C'est ainsi que l'on nomme souvent la période qui a suivi dans l'enseignement français la période dite des mathématiques modernes.

mathématiques. Pour ces noosphériens, une condition pour faire vivre ces algorithmes de calcul, et l'activité expérimentale, est la présence des instruments de calcul. Mais les logiciels comme le tableur (de la calculatrice et de l'ordinateur) qui sont préconisés, prennent en charge les calculs itératifs et une part de l'élaboration de ces algorithmes.

Au-delà des différences relevées dans les motivations institutionnelles, les conditions matérielles (équipements informatiques disponibles dans les classes) et les organisations mathématiques et didactiques, nous pensons qu'une analyse de nature épistémologique sur les savoirs visés, notamment les notions de variable et de boucle, peut nous permettre d'approfondir les raisons de cet échec.

C'est pourquoi, nous présentons dans la partie suivante les résultats d'une enquête épistémologique qui nous a permis de dégager les conditions d'un enseignement d'algorithmique et de programmation mises en place par les pionniers de cet enseignement et les choix possibles d'organisation des savoirs de base de cet enseignement : les stratégies d'enseignement.

Ces stratégies possibles conduisent à interroger les notions de machine et de langage du point de vue épistémologique. Pour cela, nous cherchons à repérer les ruptures et les filiations dans la co-génèse de la notion de machine ordinateur et de la programmation des algorithmes puis les raisons du passage d'un langage machine aux langages évolués.

II. Une enquête épistémologique sur l'algorithmique et la programmation

Notre enquête épistémologique a permis d'identifier dans l'histoire de l'informatique et de son enseignement un certain nombre de conditions favorables à la genèse des notions de variable et de boucle.

Ces conditions repérées nous conduisent à faire des choix pour la conception d'une ingénierie didactique d'introduction non seulement des objets de base de l'algorithmique et de la programmation mais aussi des notions de machine et de langage à la machine. Ces conditions sont des hypothèses qui seront mises à l'épreuve de la réalisation d'une ingénierie didactique (scénario 1) et de son analyse.

Une stratégie d'enseignement de notions d'algorithmique et de programmation

L'analyse de traités d'informatique (Kuntzmann 1957, Knuth 1968, Horowitz et Sahni 1978) met en évidence deux stratégies d'enseignement :

- *présence d'une machine de référence, réelle ou fictive.* Ces machines fictives peuvent être virtuelles (c'est-à-dire non construites comme la machine de Babage, 1842), ou idéales (c'est-à-dire non construites mais représentantes d'une classe de machines réelles comme la machine MIX de Knuth, 1968). L'enseignement de l'algorithmique est alors lié à la compréhension de l'architecture de la machine et à la conception d'un langage approprié à cette machine.
- *absence de machine de référence :* on vise un langage de programmation représentatif d'une classe de langages existants (comme le langage SPARKS de Horowitz, 1978), ce qui suppose la connaissance préalable à l'enseignement de l'algorithmique d'un langage de programmation.

L'absence institutionnelle de tout langage de programmation au niveau secondaire (aussi bien en France qu'au Viêt-Nam) et l'analyse faite de ces deux stratégies d'enseignement nous conduisent à formuler une première condition.

Condition 1

En l'absence de langage de programmation, un enseignement d'algorithmique et de programmation doit prendre comme enjeu didactique l'architecture d'une machine et ses relations avec un langage de programmation (comme dans la première stratégie d'enseignement).

Un message à une machine à mémoire effaçable

Nous avons ramené les ruptures et filiations dans la genèse de la notion de machine ordinateur à trois étapes « Machine Arithmétique » (Pascaline de Pascal, machine à différence finie de Babbage par exemple), « Machine Analytique » (de Babbage) et « Machine Ordinateur » (selon le principe de Von Neumann).

Du point de vue de l'architecture de la machine, ces étapes sont marquées d'une part par l'accroissement des possibilités de stockage dans une « mémoire » et d'autre part par la propriété fondamentale d'effaçabilité de la mémoire qui, conjointement, accroissent les possibilités de calcul de la machine.

L'évolution de la mémoire vers le stockage et l'effaçabilité de résultats intermédiaires (machine analytique de Babbage) est l'un des facteurs qui rend possible l'exécution mécanique de calculs répétitifs, c'est-à-dire d'un algorithme itératif de calcul.

L'idée qu'un programme dit enregistré et des données puissent partager une mémoire commune (machine de Von Neumann) permet de traiter un programme comme des données de calculs. Un programme, une fois exécuté, peut devenir une instruction pour un autre programme.

L'exécution du programme d'un algorithme itératif, avec boucle, nécessite aussi de coordonner un calcul (unité de calcul) et les résultats intermédiaires (unité de mémoire). Un second facteur, celui de l'existence d'une unité de commande comme dans les machines de Babbage et de Von Neumann, permet de déléguer à la machine la décision de commencer, d'arrêter un calcul ou de l'articuler à d'autres. Cela a pour conséquence fondamentale de permettre l'écriture d'un programme à une machine.

Nous schématisons cette évolution dans la figure 1 ci-après :

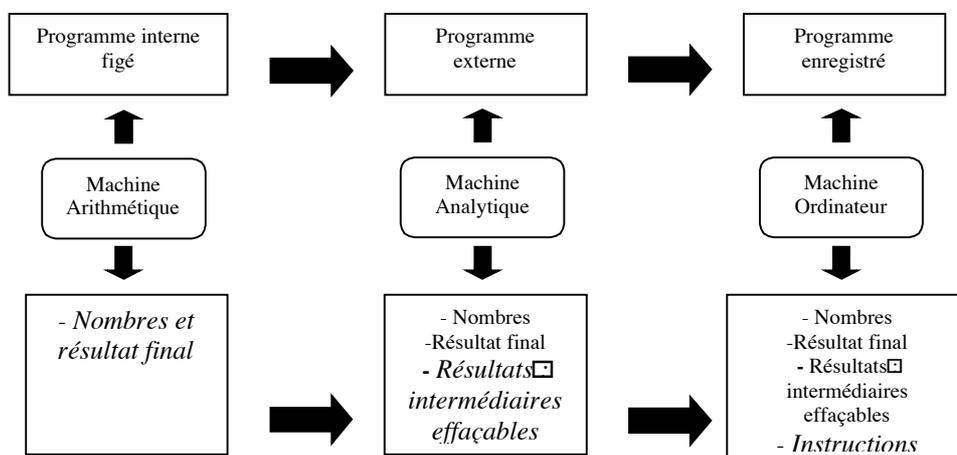


Figure 1. Évolution des mémoires et de la programmation selon les étapes de la genèse de la machine ordinateur

Écriture d'un message à une machine ordinateur de Von Neumann

La machine ordinateur de Von Neumann avec le concept de programme enregistré a permis la traduction de tout langage proche sémantiquement du langage naturel en un langage codé exécutable par la machine. Rappelons qu'un tel langage s'appelle communément *langage évolué*.

Il en a résulté un éloignement progressif des langages du langage machine, pour se rapprocher de la signification de l'algorithme à programmer pris en charge par trois structures fondamentales : séquentialité, branchement et itération.

Condition 2

L'écriture d'un message à une machine ordinateur de Von Neumann pour obtenir l'exécution d'un algorithme itératif de calcul est une condition favorable à l'émergence en actes d'éléments d'un langage évolué : séquentialité, branchement et itération.

Signification de la notion de variable informatique

Un langage codé (comme le langage machine) en restant trop proche des caractéristiques technologiques de la machine masque, dans l'écriture du programme, la signification de l'algorithme programmé. En langage évolué, l'écriture d'une boucle pour un algorithme itératif, nécessite d'affecter successivement des valeurs à une mémoire effaçable. La notion d'affectation permet donc de rendre pleinement compte de la signification de la notion de variable informatique : *une variable informatique est une mémoire effaçable désignée pour recevoir des valeurs successives*.

Condition 3

L'écriture d'un programme de calculs répétitifs (algorithme itératif) en un langage proche du fonctionnement de la machine est une condition favorable à l'émergence de la notion de variable comme mémoire effaçable.

En particulier, la distinction sémiotique entre l'égalité et l'affectation peut renforcer la distinction sémantique entre l'égalité mathématique et l'opération d'affectation.

Un travail mathématique nécessaire

L'exemple historique du premier programme informatique écrit par Ada (1842) montre qu'un travail mathématique est nécessaire entre une solution mathématique connue d'un problème et sa programmation.

Ce travail mathématique de nature algorithmique doit permettre à la fois d'identifier un invariant de boucle et la formulation d'une condition d'arrêt.

Condition 4

La formulation de la condition d'arrêt et de l'invariant de la répétition, nécessaire à l'écriture d'un message à une machine à mémoire effaçable, oblige à un travail réflexif sur les objets mathématiques présents dans la solution mathématique d'un problème.

La machine minimum choisie est une calculatrice, mais quelles calculatrices sont présentes dans EMS ?

Quels types de tâches mathématiques sont instrumentés par la calculatrice ? En particulier, la tabulation d'une fonction numérique² présentes dans les deux EMS (France et Viêt-Nam) l'est-elle ? Comment ?

Quelles caractéristiques de la calculatrice peuvent permettre de poser le problème de l'écriture d'un algorithme itératif ?

Le chapitre suivant va chercher à répondre à ces questions.

III. Place et rôle de la calculatrice à mémoires dans EMS en France et au Viêt-Nam

III.1 Au Viêt-Nam

a. Absence institutionnelle de la calculatrice

Dans l'institution scolaire au Viêt-Nam, les fonctions de la CDP [*calculatrice de poche*] sont les suivantes : vérification du résultat des opérations et aide aux calculs. La première fonction est plus marquée que la seconde qui, malgré son existence, semble être plutôt cachée. (Nguyen T.N.H 2004, p. 55).

Cependant une analyse des exercices des manuels sur le collège et le début du lycée (classe 9) montre la quasi absence de type de tâches de calcul instrumentées par la calculatrice au profit de l'usage des tables :

En classe 6 : [...] la CDP est considérée comme un instrument pour trouver les résultats des opérations arithmétiques. Toutefois, il n'y a qu'une présentation de ce rôle et non l'entraînement à l'emploi de la CDP.

En classe 7 : [...] on ne demande pas aux élèves de se servir de la CDP pour les calculs.

En classe 8 : [...] l'accent est toujours mis sur les tables trigonométriques, et la question de la CDP n'est pas abordée.

En classe 9 : [...] Elle n'est présente que dans cette leçon [« Nombre réels – Racine carrée »], et son rôle n'est qu'accessoire auprès des tables. (Nguyen T.N.H 2004, pp. 10-14)

L'examen des récents sujets de Brevet (2004) atteste de l'absence complète de calculs instrumentés, tous les calculs étant exacts et à mener algébriquement.

À partir de 2001 le programme cadre, écrit par le Ministère de l'Éducation et de la Formation (MEF), réserve 3 séances à la fin de chaque année des classes du lycée à la rubrique intitulée « Pratique du calcul avec la calculatrice de poche fx-500A » avec la recommandation :

Il faut utiliser la calculatrice tout au long du programme, l'enseignement doit profiter des moments pertinents pour expliquer à l'élève l'emploi de la calculatrice (Programme 2000)

Cette recommandation n'est accompagnée d'aucune suggestion d'activité. Comment les auteurs des manuels l'interprètent-ils ? Le souci du manque de matériel sert de prétexte aux

² La tabulation d'une fonction numérique consiste pour nous à réaliser une table de valeurs d'une fonction à pas constant □ par exemple une table trigonométrique est le résultat de la tabulation d'une fonction trigonométrique. Ce problème mathématique et technologique est à l'origine de la machine analytique de Babbage

auteurs pour renvoyer à une autre discipline, la physique, l'usage de la calculatrice dans EMS :

L'emploi de la CDP pour résoudre les opérations concernant les erreurs, les équations et les inéquations comportant des coefficients décimaux est très répandu dans le monde. Toutefois, comme les élèves vietnamiens n'ont pas toujours les moyens pour s'en procurer, ils doivent s'entraîner durant les séances de physique. (Tr_n V.H et V_n N.C 2000, rédacteurs en chef des manuels du Lycée)

Dans les manuels du lycée, aucun exercice ne concerne le calcul instrumenté par la calculatrice comme le confirme Nguyen T. N. H :

En classes 11 et 12, il n'y a pas non plus mention de la CDP. Ce point de vue a conduit les auteurs de manuel à « éviter » de se référer explicitement à la CDP dans les objets d'enseignement concrets. (Nguyen T.N.H 2004, p. 14)

L'examen des sujets du Baccalauréat et du concours d'entrée à l'université de ces dernières années (2004, 2005) montre qu'aucune question ne porte sur le calcul instrumenté. Ceci ne peut que renforcer l'absence des tâches concernant la calculatrice dans EMS.

Comme nous l'avons déjà dit, la calculatrice est aussi absente des tentatives d'introduction de l'informatique dans l'enseignement secondaire (en tant que discipline « informatique » ou au sein des mathématiques).

Ces analyses nous permettent de conclure à l'absence de la calculatrice dans les types de tâches présentes dans EMS du Viêt-nam.

b. Mais présence dans les pratiques des élèves et des enseignants sans enjeu didactique

Cependant ce n'est pas pour autant que la calculatrice est absente des pratiques des enseignants et des élèves.

Une pré-expérimentation que nous avons menée dans des classes 10 et 11 de deux lycées de Hanoi³ montre que la plupart des élèves (130/152 soit 85,5%) possèdent et utilisent des calculatrices de la marque Casio (fx 500A, fx 500 MS et fx 570 MS). Une enquête menée par Lê Thái Bao (2004) auprès d'enseignants d'Ho Chi Minh ville le confirme :

- La plupart des enseignants de collèges autorisent leurs élèves à utiliser la calculatrice pour calculer les rapports trigonométriques et extraire les racines carrées et les racines cubiques. Par contre, les tables numériques (trigonométrie, racines carrées et cubiques) sont rarement utilisées.
- Au début de la classe 10, beaucoup d'élèves possèdent et savent utiliser la calculatrice Casio fx 500A [...] (Lê Thái Bao 2004, p. 34)

La calculatrice existe bien comme instrument de calcul chez l'élève et pour les enseignants dans un cours des mathématiques, au moins dans les deux grandes villes du pays.

Cette présence est prise en compte par le MEF. Dans un arrêté récent (2005), le MEF autorise l'usage des calculatrices au baccalauréat et au concours d'entrée à l'université et précise les types de calculatrices permis :

Le candidat est autorisé à amener dans la salle d'examen :

- Stylo, règle, crayon noir, compas, équerre, outils pour la construction géométrique.
 - Calculatrice ne possédant pas la fonctionnalité de traitement de texte et la carte mémoire.
- Plus précisément, sont autorisées les calculatrices ne pouvant réaliser que les quatre opérations arithmétiques, la racine carrée, et la puissance ; sont autorisées les calculatrices de

³ En mai 2003, dans les Lycées Chu V_n An et Kim Liên

la marque Casio fx95, fx200, fx 500A, fx 500MS, fx 570MS et les calculatrices équivalentes (avec les touches trigonométriques, logarithmes, exponentielles) (MEF, décret n° 3343/KT&KD 29/04/2005)

Ces constats conduisent à questionner les pratiques : comment la calculatrice est-elle utilisée ? En particulier, les touches mémoires sont-elles prises en compte dans l'usage de cet instrument de calcul ? Lesquelles ? Comment sont-elles instrumentalisées ?

III.2 En France

a. Présence institutionnelle forte de la calculatrice

Depuis la contre réforme des années 80, on peut attester de la place importante accordée à la calculatrice par le programme afin de promouvoir le caractère expérimental des mathématiques. La présence du nouvel instrument de calcul, la calculatrice, a fait disparaître les anciens instruments de calcul (tables de logarithme, règle à calcul) :

L'utilisation systématique des calculatrices, qui dispense naturellement d'avoir recours aux instruments antérieurs (table de logarithmes, règle à calcul,...) constitue une nouveauté du programme de mathématiques. [...] Dès le début de l'année, il sera bon de vérifier que chacun sait utiliser son propre instrument, et ce sera une occasion de préciser l'usage des parenthèses et de réviser les propriétés de R (programme 1982)

Dans les années 90, les calculatrices, programmables et graphiques, occupent une place importante dans EMS avec deux fonctions, produire des calculs effectifs et vérifier des résultats, qui figurent clairement dans les recommandations du programme :

Les problèmes et les méthodes numériques doivent eux aussi tenir une large place. L'emploi systématique des calculatrices scientifiques renforce les possibilités d'étude de ces questions, aussi bien pour effectuer des calculs que pour vérifier des résultats ou alimenter le travail de recherche (programme 1989)

Voici quelques recommandations du programme 2000 à propos de la place de calculatrice en analyse :

- Utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques ; calculatrice et grand nombre ; organiser un calcul à la main ou à la machine ; (classe Seconde) ;
- Calcul des termes d'une suite sur calculatrice ou tableur (classe Première) ;
- On pourra approcher la solution de l'équation $f(x) = k$ par dichotomie ou balayage avec la calculatrice ou au tableur (classe de Terminale) (programme 2000)

Ainsi l'incitation à recourir à la calculatrice pour produire des résultats effectifs pour deux types de calcul, non itératifs et itératifs, est explicitée par le programme. A noter la présence du tableur (de calculatrice ou d'ordinateur) dans les activités de calcul numérique elle aussi recommandée par le programme.

Avec la présence dominante des calculatrices programmables au lycée, une nouvelle niche apparaît pour la calculatrice, celle de « mettre en œuvre les notions de boucle et de test ».

Ainsi les programmes des années 70, 80, 90 et 2000 en France attribuent un certain nombre de fonctions à la calculatrice dans EMS en France : vérifier le résultat d'un calcul, réaliser des calculs effectifs, alimenter le travail de recherche et quant à l'aspect d'algorithmique et de programmation : favoriser la mise en œuvre des notions de base : boucle et test. Ceci concerne particulièrement les calculs itératifs.

b. Place faible accordée à l'usage de mémoires A, B, C et Ans dans le calcul

Que se passe-t-il dans les manuels ? Nous limitons notre analyse aux manuels des programmes des années 2000. Celle-ci montre que le travail de l'élève en ce qui concerne la programmation des calculs itératifs sur la calculatrice se réduit essentiellement à l'exécution de programmes tout faits sur la calculatrice.

Cependant, certains manuels, comme Déclic 1er S, Belin 1er S, recommandent l'usage de la touche mémoire Ans dans le calcul des termes d'une suite définie par récurrence.

En ce qui concerne les calculs non itératifs - calcul exact, calcul approché - une place importante est occupée par des exercices qui font appel à la calculatrice.

Dans ces exercices, quelle place occupe la touche mémoire variable comme A, B, C et Ans ? Quel usage en est attendu ?

L'examen de trois collections de manuels du lycée - Bréal, Belin et Déclic du programme 2000 (cf. annexe C2) – fait découvrir la forte présence du type de tâche C, « calculer pour un nombre donné la valeur numérique d'une expression à l'aide de la calculatrice » essentiellement en Seconde. Nous n'examinerons en détail que ce niveau.

Trois types de tâches proches de C sont en relation explicite avec les touches mémoires de la calculatrice.

M1 (mémoire variable) : « Calculer pour plusieurs nombres la valeur numérique d'une même expression en utilisant les mémoires A, B, C » Ce type de tâche relève d'un problème de tabulation d'une fonction, l'expression étant considérée comme la formule d'une fonction.

M2 (mémoire Ans) : « Afficher les chiffres cachés dans la mémoire d'une calculatrice en utilisant la mémoire Ans »

La différence de statut entre les touches mémoires A, B, C - mémoire variable - et celui de touche mémoire Ans - mémoire du dernier résultat- n'est mentionnée par aucun manuel.

Pour cette dernière, les manuels ne font pas la différence entre ce qui est à taper (la touche mémoire Ans) et ce qui apparaît sur l'écran (le symbole « Ans » apparaît sur l'écran).

Le travail mathématique nécessaire à la transformation de l'expression algébrique donnée dans l'énoncé pour l'entrée « écran » de la calculatrice est rendu présent par le type de tâche M3 suivant ; ce travail doit bien sûr tenir compte du langage de la machine.

M3 (mémoire parenthèse) : « écrire une expression mathématique en une suite de touches de la calculatrice en utilisant les touches parenthèses »

La touche mémoire « parenthèse » doit dans M3 outiller le travail de transformation.

Ce type de tâche donne lieu à d'autres sous-types de tâche comme « comparer l'écriture conventionnelle des calculs en l'écriture à l'écran d'une calculatrice » (Déclic).

Nous présentons, dans le tableau 1, le nombre d'exercices concernant les types de tâches M1 (mémoires variables), M2 (mémoire Ans) et M3 (mémoire parenthèse) selon les manuels de seconde étudiés.

Manuels	M1	M2	M3	Total
Belin	2	4	0	6
Bréal	0	0	0	0
Déclic	4	0	5	9
Total	6	4	5	15

Tableau 1. Nombre d'exercices de type Mi selon les manuels de seconde

Alors que le nombre d'exercices de type C « calculer la valeur numérique d'une expression en utilisant la calculatrice » est très important, on constate le faible nombre d'exercices de ce type qui demande explicitement l'usage des touches mémoires. Un indicateur du caractère facultatif de ces exercices est pour nous le fait que le manuel Bréal ne propose aucun exercice se rattachant à ces types de tâche.

III.2 En conclusion sur la place et le rôle de la calculatrice et sur le statut de la mémoire dans les deux institutions, EMS au Viêt-Nam et en France

Bien que notre étude dévoile un paysage contrasté en ce qui concerne la place et le rôle de la calculatrice dans les deux institutions (lycée en France et au Viêt-Nam), elle met en évidence un usage restrictif des mémoires dans les pratiques des calculs à l'aide de la calculatrice. Ce constat nous conduit à formuler l'hypothèse de recherche suivante.

Hypothèse de recherche sur le fonctionnement de la calculatrice dans EMS

Dans EMS des deux pays, France et Viêt-Nam, la calculatrice fonctionne comme une machine arithmétique dans les tâches de calcul, c'est-à-dire comme une machine sans mémoire effaçable.

Les calculatrices à mémoire sont bien présentes dans EMS. Mais comment sont-elles utilisées dans les classes ? En particulier, les touches mémoires sont-elles prises en compte dans l'usage de cet instrument de calcul ? Lesquelles ? Comment sont-elles instrumentalisées ? Comment peut-on avoir accès aux pratiques avec la calculatrice qui restent le plus souvent privées ? Comment peut-on rendre publiques ces pratiques ?

Pour avancer dans l'étude de ces questions et mettre à l'épreuve notre hypothèse de recherche sur le fonctionnement de la calculatrice dans EMS, nous avons décidé de définir un cahier des charges pour un projet, nommé Alpro (abréviation d'Algorithme et Programmation), que nous allons maintenant présenter.

Partie II

Une réalisation, la calculatrice Alpro

Notre analyse de l'architecture des calculatrices montre qu'une calculatrice non programmable ne fonctionne ni sur le principe d'une machine analytique de Babbage, ni sur celui d'une machine de Von Neumann. Elle n'est pas non plus une machine arithmétique puisqu'elle possède des mémoires effaçables.

Les touches mémoires A, B, C sont associées à des mémoires visibles et effaçables, candidates à être le support de variables informatiques. La touche mémoire Ans est aussi associée à une mémoire visible et effaçable, mais son effaçabilité est très contrainte puisque tout nouveau résultat d'un calcul remplace automatiquement le contenu de Ans ce qui la rend impropre pour supporter la notion de variable informatique. La mémoire Ans est pour nous la mémoire du dernier résultat.

I. Principaux objectifs du projet Alpro

Notre cahier des charges désigne quatre objectifs au projet Alpro.

Objectif 1. Un émulateur d'une calculatrice générique

La calculatrice possède potentiellement les mêmes fonctionnalités que les modèles scientifiques non graphiques et non programmables actuellement présents dans l'enseignement secondaire.

Objectif 2. Une interface simplifiée

Les touches des calculatrices scientifiques non graphiques et non programmables sont généralement hiérarchisées en touches 1^{ère}, 2^{nde} et alpha. Cette hiérarchie correspond à, et même induit, une hiérarchie des usages et des fonctionnalités mathématiques.

C'est pour cela que nous proposons une interface où les fonctionnalités soient regroupées en pavés distincts et à accès non hiérarchisé : toutes les touches donnent accès directement à une commande

Une telle interface est rendue possible par la taille de l'écran de l'ordinateur.

Les touches de l'émulateur se répartissent en au moins six pavés :

- Touches de fonctionnement : C/OFF, AC/ON, SHIFT ;
- Touches d'écriture des nombres : les chiffres 0..9, le signe « - », la virgule « . » ;
- Touches d'opérations : +, -, *, ÷, =
- Touches de fonctions : $\frac{\square}{\square}$, x2, x^y , x^{-1} , ln, e^x , cos, \cos^{-1} , sin, \sin^{-1} , tan, \tan^{-1} , $x^{\frac{\square}{\square}}$, LOGx, x! ;
- Touches de mémoire : les parenthèses et trois types de mémoire à savoir, « mémoire du dernier résultat » Ans, « mémoires variables » A, B, C et mémoire M, ainsi que les touches qui y sont liées Sto et Rcl.
- Touches de statistique

Objectif 3. Un historique des touches actionnées

Le logiciel de l'émulateur a la capacité d'enregistrer des séances dans un fichier externe destiné à subir des traitements statistiques sur son contenu. Le processus enregistre entre autres les touches actionnées (touches d'opérations, touches de fonctions, touches mémoires, etc.), les calculs intermédiaires et les messages d'erreurs.

Objectif 4. Une boîte à outils à la disposition de l'enseignant

L'interface d'Alpro a la particularité d'être configurable par l'enseignant au sens où l'enseignant peut en modifier l'aspect fonctionnel ou visuel. La boîte à outils contrôle deux aspects fondamentaux de cette configurabilité :

Aspect graphique : Activation ou non des touches.

Aspect fonctionnel : contrôle du fonctionnement global de la calculatrice : par exemple la précision du calcul (nombre de chiffres du résultat d'un calcul) et du stockage (nombre de chiffres du résultat d'un calcul stocké en mémoire), ainsi que des paramètres de génération du fichier historique.

II. La première version d'Alpro réalisée

À partir de ce cahier des charges, une première version du logiciel a été développée en coopération avec Léhatem, étudiant en Master informatique de l'Université Joseph Fourier (Grenoble 1), lors de son stage de recherche effectué au sein de l'équipe DDM (2004).

D'après lui, les émulateurs existant sur ordinateur à l'heure actuelle peuvent être classés en deux catégories relativement au noyau de calculs :

- Émulateurs avec noyau de l'ordinateur qui utilise les primitives disponibles du système de l'ordinateur sur lequel il est installé.
- Émulateurs avec noyau chargé qui recourt à un noyau externe issu d'une calculatrice physique.

Nous avons décidé de :

- développer un émulateur avec noyau de l'ordinateur : il peut profiter des fonctionnalités du noyau de l'ordinateur sur lequel est installé l'émulateur.
- définir des fonctionnalités supplémentaires en adéquation avec le cahier des charges.
- développer cet émulateur en langage Java script car Java est conçu pour être un langage multi plate-forme :

Ce logiciel pourra être installé sur n'importe quel ordinateur (PC et Mac) à condition qu'il soit doté d'une Machine Virtuelle Java (JVM). Les techniques XML et XPATH pour la formation des fichiers historiques ont aussi été utilisées. (Léhatem 2004, p. 32).

L'émulateur d'Alpro

Examinons la version actuelle du point de vue des deux aspects graphique et fonctionnel.

Aspect graphique

L'émulateur présente une interface graphique avec laquelle l'utilisateur, enseignant ou élève, peut interagir. Il dispose d'un ensemble de touches regroupées par pavés et d'un écran pour visualiser les expressions construites et le résultat correspondant.

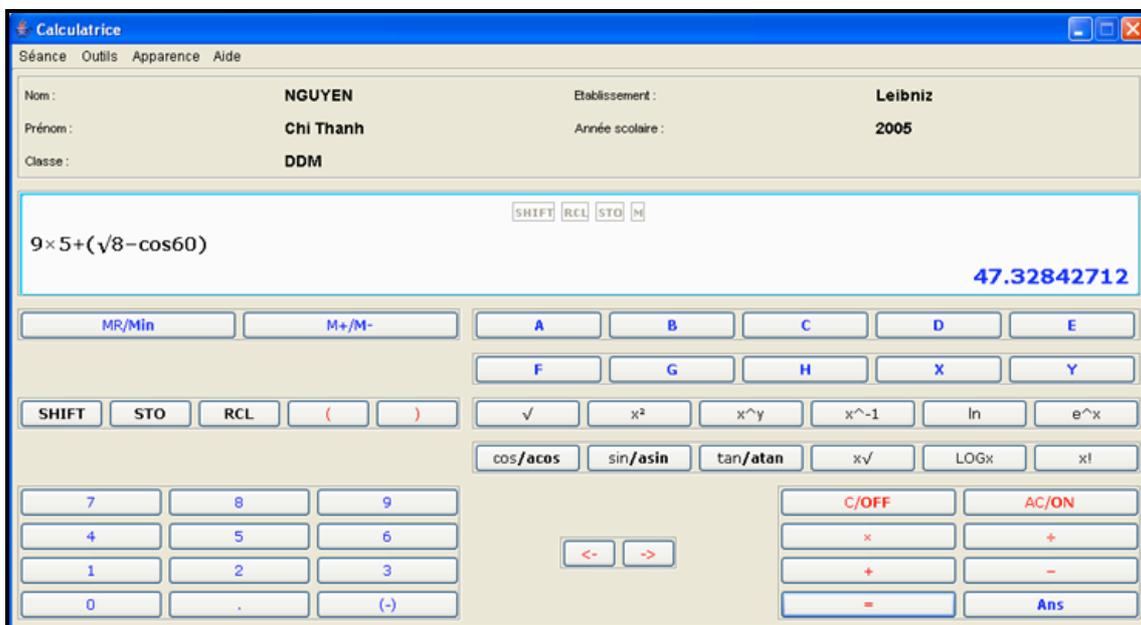


Figure 2. Aperçu global de l'aspect graphique de l'émulateur (version non bloquée)

Les touches de l'émulateur se répartissent en quatre pavés :

- Touches de fonctionnement : C/OFF, AC/ON, SHIFT ;
- Touches de formation de nombres : les chiffres 0..9, le signe « - », la virgule « . » ;
- Touches de fonctions : ÷, x², x^y, x⁻¹, ln, e^x, cos/acos, sin/asin, tan/atan, x^v, LOGx, x! ;
- Touches de mémoire : les parenthèses et trois type de mémoire à savoir, « mémoire du dernier résultat » Ans, « mémoires variables » A, B, C et mémoire M, ainsi que les touches qui y sont liées Sto et Rcl.

L'écran de l'émulateur comporte trois lignes : ligne d'état, ligne d'expression et ligne de résultats.

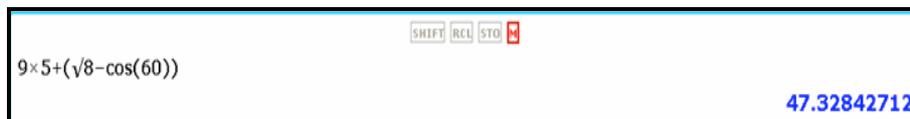


Figure 3. Écran de l'émulateur actuellement développé

Aspect fonctionnel

L'émulateur respecte toutes les normes auxquelles les calculatrices dites scientifiques se soumettent comme la précision des calculs, les longueurs maximales des nombres à l'affichage ou dans le stockage, les règles d'arrondis des chiffres en virgule flottante, les priorités entre les différentes fonctions et opérations, etc.

Les nombres sont affichés à 10 chiffres sur l'écran et sont enregistrés à 14 chiffres dans les mémoires. L'arrondi des nombres se fait donc sur le 15^{ème} chiffre lors de stockage, et sur le 11^{ème} chiffre lors de l'affichage.

La règle d'arrondi des chiffres en virgule flottante est d'incrémenter le chiffre dans la position « i », si le chiffre qui se trouve à la position « i + 1 » est supérieur ou égale à 5.

Le niveau d'imbrication des parenthèses est fixé à 18 dans une expression mathématique à évaluer.

Les types de mémoire choisis pour cet émulateur sont : Ans, M+, A, B, C (mémoires visibles) et parenthèses (mémoire invisible). Nous avons laissé de côté les touches mémoires comme mémoire constante, mémoire d'expression, car secondaires pour notre étude.

Une différence avec les calculatrices ordinaires tient dans notre décision d'obliger l'utilisateur à initialiser les mémoires A, B, C avant tout usage ce qui rend observable la prise en compte de l'existence d'une mémoire variable dans un programme de calcul. En cela notre calculatrice ressemble aux calculatrices de calcul formel ou programmables).

En ce qui concerne les contraintes d'organisation des touches mémoires, nous avons décidé de donner un accès direct aux touches mémoires A, B, C, Ans et aux touches de fonctionnement qui les concernent : Sto, Shift, Rcl., ceci afin de simplifier l'écriture des programmes de calcul.

L'historique des touches actionnées d'Alpro

Avant toute utilisation de l'émulateur, l'utilisateur doit s'identifier pour accéder à la calculatrice ; cette identification déclenche l'enregistrement.

Le nom du fichier d'enregistrement de ses actions est du type « nom_prénom_numéro.xml ».

L'historique mémorise dans un ordre chronologique les touches actionnées, le contenu des mémoires, l'état de chacune des trois lignes de l'écran, dont l'expression mathématique écrite, le résultat du calcul ou l'éventuel message d'erreurs.

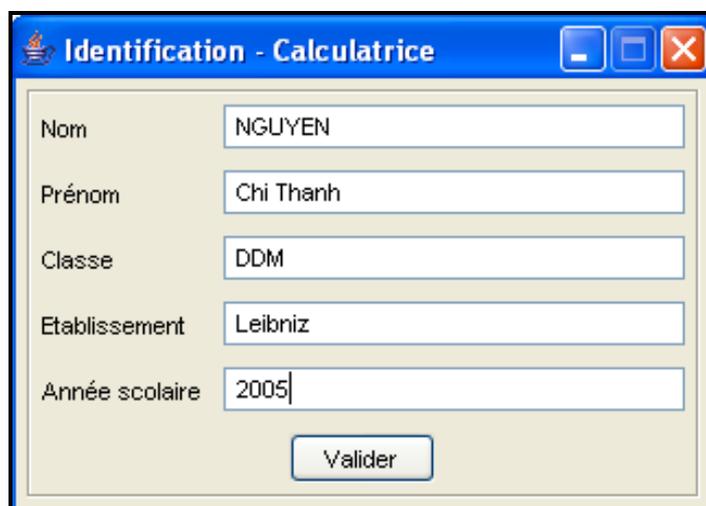


Figure 4. Fenêtre d'identification de l'utilisateur

On peut lire ce fichier avec un navigateur d'Internet comme IE. Les critères d'enregistrement sont le temps et les calculs intermédiaires.

Le temps montre la progression et l'avancement de l'élève dans le travail, et puisque l'historique est basé sur l'enregistrement successif des touches actionnées, l'élève peut marquer un temps d'arrêt entre deux touches appuyées, ce temps d'arrêt est fixé à 15 secondes [...] Si la durée entre deux touches actionnées est supérieure au seuil établi, on marque un nouvel enregistrement dans l'historique, sinon on actualise le dernier enregistrement. (Léhatem 2004, p. 12)

L'organisation des fichiers historiques est illustrée dans le schéma suivant (Léhatem 2004, p. 19) :

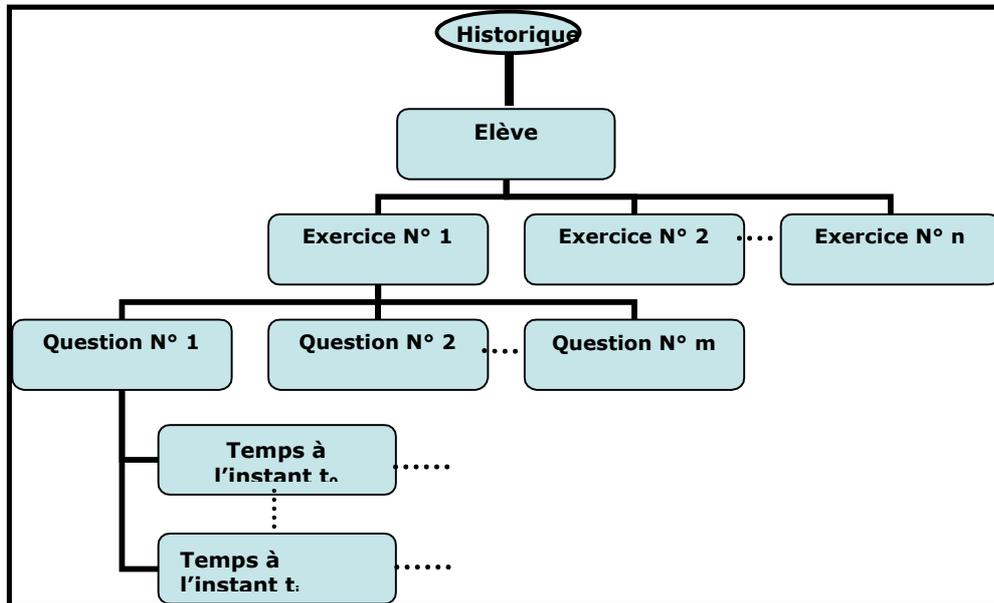


Figure 5. Organisation du fichier historique en arborescence XML

Nous donnons ci-après un extrait d'un fichier historique enregistré correspondant à la suite de touches tapée pour l'exécution du calcul $5 \div 9$:

```

- <Historique Date="11 juin 2004" Heure="17:26:53 CEST">
- <Elève Nom="NGUYEN" prénom="Chi Thanh" Classe="2e D" Etablissement="GMD">
- <Exercice Numéro="1" Date="11 juin 2004" Heure="17:27:02 CEST">
- <Question Numéro="1" Date="11 juin 2004" Heure="17:27:07 CEST">
- <Temps Date="11 juin 2004" Heure="17:27:32 CEST">
  <Etat_Calculatrice Etat="allumée" />
- <Touches_Actionnées>
  <Touche Type_Touche="Touche Spéciale">AC/ON</Touche>
  <Touche Type_Touche="Touche opérande">5</Touche>
  <Touche Type_Touche="Touche Opération">÷</Touche>
  <Touche Type_Touche="Touche opérande">9</Touche>
  <Touche Type_Touche="Touche Opération">=</Touche>
- <Calcul_Intermédiaire>
  <Ligne_Expression>5÷9</Ligne_Expression>
  <Ligne_Résultat>0.555555556</Ligne_Résultat>
  <Ligne_Indicateurs />
- <Etat_Mémoires>
- <Type_Mémoire Type="Mémoire Indépendante">
  <Mémoire Nom="Ans">0.555555555555556</Mémoire>
  </Type_Mémoire>
- <Type_Mémoire Type="Mémoire Variable">
  <Mémoire Nom="A" />
  <Mémoire Nom="B" />
  <Mémoire Nom="C" />
  </Type_Mémoire>
  
```

Figure 6. Un fichier historique

L'état de la boîte à outil d'Alpro

L'émulateur se présente actuellement sous deux modes séparés : un mode non bloqué et un mode bloqué. Dans le premier mode, toutes les touches sont disponibles alors que dans le second, certaines touches apparaissant en grisé sur l'interface sont indisponibles :

- en ce qui concerne les touches mémoires : certaines touches mémoires variables : D, E, F, G, H, X, Y ; toutes les touches mémoires M+ ; toutes les touches mémoires parenthèses ;
- toutes les touches fonctions : x^2 , \div , x^y , x^{-1} , \ln , e^x , \cos/acos , \sin/asin , \tan/atant , $x\pm$, $\text{LOG}x$, $x!$.

III. Les développements envisagés

L'émulateur au stade actuel de son développement ne remplit que partiellement chacun des quatre objectifs du projet Alpro.

Voici les développements ultérieurs envisagés :

- un pavé statistique et un pavé « listes ».
- des outils de traitement des fichiers de l'historique.
- une véritable boîte à outils sous la forme d'un panneau de configuration à la disposition de l'enseignant.

Dans ce but, nous prolongeons les relations avec l'entreprise CASIO au Viêt-nam que nous avons initiées lors des expérimentations.

Cette entreprise envisage, à partir de l'émulateur en cours de réalisation de la calculatrice CASIO FX500MS, de contractualiser avec nous les développements nécessaires au projet Alpro.

Partie III

Élaboration de scénarios expérimentaux sur des notions de base de l'algorithmique et de la programmation

Nous avons conçu quatre scénarios expérimentaux⁴ sur des notions de base de l'algorithmique (formalisation de répétitions et de leur arrêt) présentes dans la conduite et l'effectuation des calculs numériques dans un environnement calculatrice.

- Scénario 1 : Introduction des notions de variable, de boucle et de machine dans un problème de tabulation d'une fonction polynomiale ;
- Scénario 2 : Introduction d'un point de vue analytique et algorithmique dans problème de tabulation d'une fonction trigonométrique ;
- Scénario 3 : Introduction d'un point de vue algorithmique dans les calculs financiers au début de l'université ;
- Scénario 4 : Introduction d'un point de vue algorithmique et analytique dans des calculs numériques liés à la notion de limite.

Ces scénarios ont été expérimentés en fin de lycée ou au début de l'université en France et au Viêt-Nam. Ces expérimentations ont donné lieu à des enregistrements audio et vidéo, matériaux pour le site Internet dédié à la formation des enseignants de mathématiques que nous présentons dans la partie IV de ce rapport.

Chaque scénario a été conçu avec une double finalité:

- comme une perturbation du système d'enseignement actuel en respectant les potentialités du des programmes
- comme la base d'une formation des enseignants du secondaire sur les enjeux et les possibilités d'enseignement d'éléments d'algorithmique et de programmation.

Dans ce rapport, nous présentons en détail le scénario 1 en nous appuyant sur le travail de thèse en cotutelle de Nguyen C. T ; (2005). C'est le scénario central au sens où il vise frontalement l'enseignement d'objets propres à l'algorithmique et à la programmation. Dans les trois autres scénarios, ces objets sont des outils au service d'un domaine mathématique comme l'analyse ou les mathématiques financières.

I. Les choix macro-didactiques faits pour l'ingénierie didactique

Ce sont les suivants :

Une situation fondamentale de l'algorithmique et de la programmation

Rappelons que cette situation articule un problème mathématique de tabulation : « Soit f une fonction polynomiale de degré n . Calculer les images par cette fonction de m nombres $x_0, x_1 \dots x_k \dots$ espacées d'un pas p et appartenant à l'intervalle $[a, b]$ avec $x_0 = a$ » et le problème informatique de l'écriture d'un message à une machine à mémoire effaçable pour une exécution effective d'une solution du problème mathématique.

Une genèse expérimentale

La situation fondamentale a permis de concevoir l'ingénierie didactique comme une genèse expérimentale de la machine de Von Neumann et de la programmation à travers l'écriture des messages successifs (programmes) à des machines dotées de caractéristiques différentes.

⁴ Annie Bessot et Alain Birebent ont participé à la conception et à l'analyse de ces 4 scénarios.

Nous schématisons dans la figure 7 ci-après les différentes machines de l'ingénierie didactique.

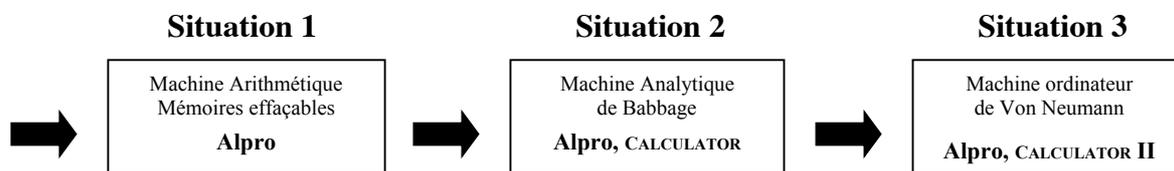


Figure 7. Les différentes machines dans les trois situations de l'ingénierie didactique

Un artefact commun aux trois machines est la calculatrice Alpro.

Le problème mathématique choisi, celui de la tabulation d'une fonction numérique, cherche à déclencher la fabrication de répétitions au travers de l'itération ou de la récursivité. Mais le nombre limité de mémoires d'Alpro privilégie l'algorithme itératif au détriment de l'algorithme récursif.

L'enjeu de la situation 1 est la familiarisation avec Alpro et ses différentes mémoires.

L'enjeu de la situation 2 est la formulation de l'invariant opératoire de l'algorithme de calcul répétitif, dans l'écriture d'un message à une machine proche de celle de Babbage. Cette formulation est une condition nécessaire, à la conceptualisation de la notion de variable informatique.

L'enjeu de la situation 3 est l'écriture d'un programme itératif à la machine de Von Neumann. Cette écriture met jeu la formulation des conditions d'arrêt, l'opération d'affectation des variables informatiques ainsi que des éléments d'un langage évolué à la machine ordinateur.

Dans ces trois situations, l'élève a deux positions :

- Une position algorithmique : il travaille sur des algorithmes, solution du problème mathématique de tabulation
- Une position de programmation : il écrit des programmes à des machines successivement différentes.

Dans ces deux positions, il reçoit des informations et des rétroactions résultant de l'exécution de son programme sur des machines réelles ou partiellement fictives.

Nous schématisons ces deux positions dans la figure 8 ci-après.

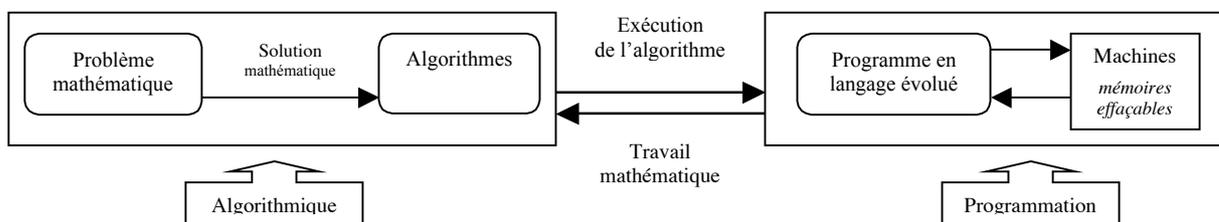


Figure 8. Les deux positions « algorithmique » et « programmation »

Les choix sur les nombres et la calculatrice Alpro

a. Les nombres dont on doit calculer les images sont des décimaux

Nous notons par la suite D_i l'ensemble des décimaux à i chiffres après la virgule. L'écriture décimale des nombres est celle de l'affichage des résultats d'un calcul à l'aide d'une calculatrice ordinaire. Ce choix installe le calcul dans une problématique du calcul effectif à l'aide de la calculatrice tel qu'il existe dans les deux institutions.

b. Une calculatrice non programmable Alpro, machine de base de l'ingénierie didactique

Pour le besoin de notre recherche, rappelons que nous avons conçu l'émulateur de la calculatrice Alpro sur le modèle des calculatrices existantes dans les deux institutions et ayant la capacité supplémentaire d'enregistrer l'historique des suites des touches appuyées lors d'un calcul.

Dans notre ingénierie, nous avons rendu indisponibles certaines touches de la calculatrice Alpro. Nous présentons ci-après l'interface graphique de cette version, appelée Alpro bloquée.

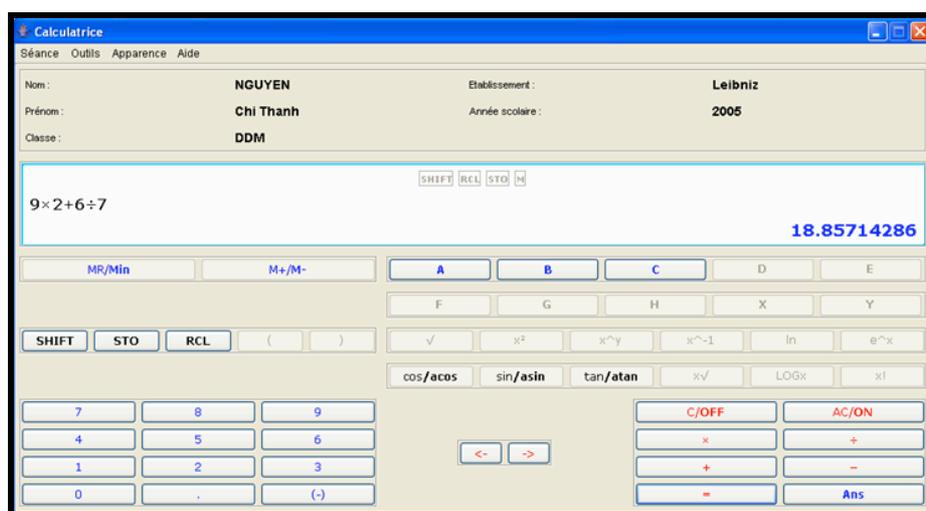


Figure 9. Aperçu global de l'émulateur Alpro, version bloquée

Les touches grisées sont indisponibles.

Précisons les principaux choix opérés sur la machine Alpro bloquée et les raisons de ces choix.

c. Les principales touches disponibles et indisponibles de la calculatrice Alpro bloquée

La mémoire Ans et la restriction à trois mémoires variables

Nous avons mis en évidence l'existence dans les calculatrices non programmables existantes de deux types de touches mémoires visibles : touches mémoires variables A, B, C et touche mémoire du dernier résultat Ans. Par commodité, nous les appelons mémoires variables et mémoire Ans.

Ces deux types de mémoires ont des degrés de visibilité et d'effaçabilité différents. Elles sont destinées à recevoir des nombres pour un calcul effectif et sont « réutilisables » tout au long du calcul. Dans une mémoire variable, le stockage d'un nombre doit être intentionnel alors qu'un nombre est automatiquement stocké dans la mémoire Ans dès que la touche « = » (ou « Sto ») est pressée. Le nombre stocké intentionnellement dans une mémoire variable n'est effacé que quand l'opérateur décide d'y stocker un autre nombre ; alors qu'un nombre dans la mémoire Ans est effacé dès que la touche « = » (ou « Sto ») est pressée.

La calculatrice Alpro, à l'image des calculatrices non programmables, dispose des deux types de mémoires variable et Ans, mais à la différence de ces mêmes calculatrices, elle ne dispose que de trois mémoires variables A, B et C pour favoriser l'usage répété d'une même mémoire variable et ainsi l'émergence de la notion de variable informatique. Les touches liées aux mémoires variables, « Sto » et « Rcl », sont disponibles ; on peut les taper directement sans devoir passer par la touche Shift.

Indisponibilité des touches parenthèses

La version utilisée rend indisponibles les touches parenthèses (mémoire invisible) pour favoriser ou rendre nécessaire l'usage des mémoires (variables ou Ans) lors de l'exécution ou de la programmation des calculs des images de nombres par une fonction.

Seules les touches des quatre opérations arithmétiques élémentaires sont disponibles

Nous avons choisi de ne conserver que les quatre opérations arithmétiques : « + », « - », « \square », « \div ». Ce choix augmente, pour les multiplications en particulier, le coût des calculs puisque pour tout calcul, sans mémoire, de v^n il faut entrer le nombre v , n fois. L'augmentation du nombre de touches d'appuis accroît les risques d'erreurs et justifie l'usage des mémoires, Par exemple, si on veut calculer v^4 avec $v = 3,141759682$, un calcul sans mémoire coûte 48 touches ($3,141759682 \square 3,141759682 \square 3,141759682 \square 3,141759682 =$), un calcul avec mémoire Ans coûte 20 touches ($3,141759682 = \text{Ans} \square \text{Ans} \square \text{Ans} \square \text{Ans} =$)⁵.

Accès aux informations sur les touches mémoires

L'émulateur donne accès à une information concernant les touches mémoires quand le curseur se place à proximité de ces touches sur l'interface graphique.

Par exemple, le déplacement du curseur sur la touche « A » donne l'information suivante « A : Stocker une valeur dans la mémoire variable A. ». De même, le déplacement du curseur sur la touche « Ans » donne l'information « Ans : Rappeler le dernier résultat calculé. ».

Ces informations peuvent permettre d'amorcer l'instrumentation d'une touche mémoire variable ou mémoire Ans.

II. Les conditions de l'expérimentation et du recueil des données

⁵ Dans certaines calculatrices, Casio par exemple, on peut taper « \square ,141759682 = Ans Ans Ans Ans = \square ». Ce qui donne 17 touches. Ce n'est pas le cas d'Alpro.

L'expérimentation a été conduite dans cinq classes pour la situation 1 et dans deux classes pour les situations 2 et (en italique les deux classes ayant suivi les trois situations de l'ingénierie) :

- Deux classes de 2^{nde} (mai 2004, Lycée Moyen Grésivaudan de Villard-Bonnot, région grenobloise) et *une classe de 1^{er} S (janvier 2005, Lycée français Alexandre Yersin, Hanoi)*
- Une classe 10 (janvier 2005, Lycée d'application de l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh) et *une classe 11 (janvier 2005, Lycée Chu Van An, Hanoi)*⁶

Pour simplifier, nous notons par la suite ces classes 2nd F1, 2nd F2 et 1^{er} F pour les classes de Lycées Français ; 2nd V, 1^{er} V pour les classes de Lycées vietnamiens.

L'effectif de chaque classe est donné dans le tableau 2 suivant :

Classes	2 nd F1	2 nd F2	2 nd V	1 ^{er} F	1 ^{er} V	Total France	Total Viêt-nam	Total
Effectifs	33	33	42	20	18	86	60	146

Tableau 2. Effectifs des classes dans l'expérimentation

Nous avons expérimenté l'ensemble de l'ingénierie didactique dans les deux classes de 1^{er} F et de 1^{er} V, indiquées en grisé dans le tableau 1 : Alain Birebent est l'enseignant de la classe 1^{er} F et Nguyen Chi Thanh est celui de la classe de 1^{er} V. Annie Bessot est observatrice dans les deux classes.

Les analyses s'appuient sur les données suivantes :

- Les notes des observateurs⁷ ;
- Les fiches de réponses des élèves et leurs brouillons ;
- Les enregistrements audios des élèves : 16 élèves de seconde en France ; deux élèves dans la classe de 1^{er} S du Lycée français Alexandre Yersin et deux élèves dans la classe 11 du Lycée Chu Van An.
- L'enregistrement vidéo des enseignants : dans toutes les classes sauf dans le Lycée d'application de l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh ;
- Les fichiers historiques : dans toutes les classes pour les élèves travaillant avec Alpro. Un incident technique n'a permis de recueillir que 10 fichiers historiques de la classe 10 du Lycée d'application de l'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh.

Pour la situation 1, dans les trois classes 1^{er} F, 2nd V et 1^{er} V, faute d'un nombre suffisant d'ordinateurs, la moitié des élèves ont du travailler avec leur calculatrice personnelle pour les calculs 1 et 2, avec la consigne : « Avec la calculatrice personnelle, utiliser les mêmes touches autorisées qu'Alpro ». Les touches interdites ont été notées au tableau par l'enseignant.

L'autre moitié a travaillé avec Alpro et nous n'avons pu recueillir les fichiers des historiques de touches appuyées que pour ces élèves.

⁶ Nous remercions ici Christophe Daudin enseignant des classes de 2nd F1, 2nd F2, Olivier Tawin enseignant de la classe 1^{er} F, Le Thanh Thai enseignant de la classe de 2nd V, Nguyen Thi Thuy enseignante de la classe de 1^{er} V et leurs élèves de nous avoir accueillis.

⁷ Annie Bessot pour toutes les classes et Alain Birebent pour toutes sauf celle où il enseigne.

La majorité des calculatrices utilisées par les élèves de 1^{er} V sont de marques Casio : Fx500MS ou Fx500A non programmables. Toutes les calculatrices utilisées par les élèves de 1^{er} F sont programmables de marques Casio Graph ou TI.

Les classes 2nd F1, 2nd F2 ont été partagées en deux groupes pour pouvoir travailler sur Alpro en salle d'ordinateurs du Lycée du Moyen Grésivaudan (Isère-France).

Nous allons maintenant entrer dans les situations construites de l'ingénierie didactiques en justifiant les choix issus du travail de conception et les conséquences prévues de ces choix sur les réponses (analyse *a priori*).

Puis nous examinons ce qui s'est passé dans les classes observées dans les deux pays (2nd et 1^{ère}) dans une analyse *a posteriori*.

Dans la confrontation des analyses *a priori* et *a posteriori*, nous avons respecté le découpage en trois situations didactiques, qui n'est pas le découpage en séances de classe, ce dernier découpage obéissant à des contraintes institutionnelles de temps et d'organisation.

Une séance dans un lycée français dure 55 minutes alors qu'elle ne dure que 45 minutes dans un lycée vietnamien.

Dans la classe de 1^e V, ceci nous a contraint à découper les trois situations didactiques en 4 séances. Mais l'organisation des séances a permis que deux séances de 45 minutes aient lieu un même jour en étant séparées par une pause de 10 minutes.

Le temps imparti à l'expérimentation de l'ingénierie didactique dans la classe de 1^e F (165 minutes) a donc été plus court de 15 minutes par rapport à celui dans la classe de la 1^e V (180 minutes).

Le tableau 3 présente les deux découpages (situations didactiques et séances) et les décalages pour la classe de 1^e V.

	Situation didactique 1 (S1)		Situation didactique 2 (S2)		Situation didactique 3 (S3)	
1 ^e F	Séance 1		Séance 2		Séance 3	
1 ^e V	Séance 1 - phases 1, 2&3	<i>pause</i>	Séance 2 - synthèse S1 - phases 1&2 (S2)	Séance 3 - phases 3, 4 (S2) - phase 1 (S3)	<i>pause</i>	Séance 4 Fin S3

Tableau 3. Découpages en situations didactiques et en séances selon la classe 1^e F ou 1^e V

III. L'expérimentation et ses analyses

III.1 Situation 1

A. Présentation des calculs de la situation 1 et des raisons des choix (analyse *a priori*)

L'enjeu de cette situation est d'organiser une première rencontre des élèves et de l'enseignant avec la machine calculatrice Alpro bloquée (*appelée Alpro par la suite*), d'observer (en particulier à l'aide des fichiers historiques d'Alpro) et de favoriser l'usage des mémoires variable et Ans.

Cette situation doit permettre de mettre à l'épreuve l'hypothèse de recherche :

Dans EMS, la calculatrice fonctionne comme une machine arithmétique, c'est-à-dire une machine sans mémoire effaçable

Notre objectif, en jouant sur les valeurs des variables didactiques de la situation fondamentale, est ensuite de faire évoluer le rapport instrumental à la calculatrice, en particulier en permettant l'identification des touches mémoires effaçables et la différenciation de la mémoire du dernier résultat Ans d'avec les mémoires variables.

Elle doit aussi permettre la première rencontre avec un type de tâche rarement présent institutionnellement dans EMS (France et Viêt-nam) : « écrire à autrui un message de calcul pour que cet autrui l'exécute sur une machine »

A.1 Calculs 1 et 2 (Exercice 1)

La situation 1 débute par un premier exercice composé de deux questions. Ces deux questions résultent de choix sur les valeurs de variables didactiques de la situation fondamentale.

Énoncé des calculs 1 et 2 de la situation 1

Exercice 1 (10 minutes). Travail individuel avec la calculatrice Alpro ou la calculatrice personnelle. Avec la calculatrice personnelle, utiliser les mêmes touches autorisées qu'Alpro.

Question 1. Calculer $2x^2 + x + 1$ avec $x = 3,141$

Réponse 1 :

Question 2. Calculer $8x^3 + 6x^2 - 3x - 1$ avec $x = 3,141759682$

Réponse 2 :

Combien de fois en tout devez-vous appuyer sur les touches de la calculatrice Alpro pour réaliser le calcul complet de la question 2 ?

Nombre de fois :

Nous avons joué essentiellement sur deux variables didactiques du problème mathématique, le degré de la fonction polynomiale et la valeur du nombre v .

- *Le degré n* prend d'abord la valeur 2 (question 1) pour rendre possible l'exécution des algorithmes de calcul à la main d'une image de la fonction puis la valeur 3 pour augmenter le coût de ce calcul (question 2).
- *Le nombre v* appartient respectivement à D_3 (question 1) et D_9 (question 2). L'appartenance à D_3 est choisie pour permettre d'observer les pratiques routinières de calcul chez les élèves. Le choix d'un nombre appartenant à D_9 augmente considérablement le coût du calcul à la main, et devrait favoriser l'usage des mémoires, si elles sont disponibles.
- Un choix secondaire est celui des coefficients de la fonction polynomiale de la question 2 tous différents de 0 et 1 afin d'accroître le coût du calcul.

Le passage entre les deux calculs (question 1 et question 2) organise un saut informationnel visant à changer le rapport aux touches mémoires de la calculatrice :

Le saut informationnel consiste, après avoir trouvé une situation fondamentale faisant « fonctionner » une notion, à choisir d'abord les valeurs de ses variables de telle manière que les connaissances antérieures

des élèves permettent d'élaborer des stratégies efficaces ... puis, sans modifier les règles du jeu, à changer les valeurs des variables de façon à rendre beaucoup plus grande la complexité de la tâche à accomplir. De nouvelles stratégies doivent être établies qui demandent la construction de nouvelles connaissances. (Brousseau 1986, p. 23)

En effet, les choix portant sur la valeur du degré n et sur le type de nombre décimal v dont on doit calculer l'image, en augmentant le coût du calcul, changent sa complexité dans le passage de la question 1 à la question 2 ; la stratégie optimale dans la question 2 est alors une stratégie utilisant le stockage du nombre v dans une mémoire pour permettre le calcul le plus économique.

La demande du nombre de touches appuyées permet :

- d'ajouter un enjeu à ce deuxième calcul : celui d'utiliser le moins de touches possibles.
- de rendre formulable le coût des stratégies de calcul
- de préparer la comparaison publique des algorithmes de calcul du point de vue de ce coût dans une phase d'institutionnalisation des mémoires.

A.2 Calcul 3 (exercice 2)

Ce calcul a pour objectif l'écriture d'un message de calcul à un autre binôme et sa validation par son exécution sur Alpro.

Ce message doit être le plus court possible et ne contenir qu'une suite de touches d'Alpro. On peut considérer que ce message est un programme informatique dans le langage évolué destiné à Alpro.

Nous voulons ainsi :

- rendre nécessaire, en raison de l'absence des mémoires parenthèses, l'usage des mémoires et la distinction entre deux types mémoires, la mémoire Ans comme mémoire du dernier résultat et la mémoire variable comme mémoire de stockage volontaire d'un nombre ;
- organiser la première rencontre avec le type de tâche : « écrire à autrui un message de calcul pour qu'il l'exécute sur une machine ».

Énoncé du calcul 3 de la situation 1

Exercice 2 (25 minutes). Travail en binôme avec la calculatrice Alpro

Feuille de consigne du binôme :

Phase 1 (10 minutes) : Vous disposez d'un stylo et de la calculatrice Alpro

Sur la feuille navette (phase 1), écrivez un message le plus court possible à un autre binôme qui ne possède ni papier ni stylo. Il dispose seulement de la même calculatrice que vous. Dans le message n'indiquez que les touches de la calculatrice. En suivant vos instructions, ce binôme doit obtenir la valeur numérique de z à l'écran de la calculatrice.

Variante 1 : $z = y^2 - 7y + 9$ où $y = \frac{4x^3 \square 9x + 21}{31,2x \square 26,7184}$ avec $x = 1,257$

Variante 2 : $z = y^2 - 5y + 7$ où $y = \frac{2x^3 + 15x \square 5}{32,1x \square 27,7534}$ avec $x = 1,254$

Phase 2 (5 minutes) : Rangez votre stylo. Vous n'avez plus que la calculatrice Alpro

Exécutez, avec la calculatrice Alpro, toutes les instructions du message reçu, tant que c'est possible. Reprenez alors votre stylo pour recopier sur la feuille navette (phase 2) le dernier écran de la calculatrice.

Phase 3 (10 minutes) : Vous disposez d'un stylo et de la calculatrice Alpro

Sur votre fiche navette qui vient de vous être rendue, proposez si nécessaire, un nouveau message.

L'un des binômes sera choisi au hasard et les instructions de son message seront exécutées publiquement sur la calculatrice Alpro.

Les variantes 1 et 2 du calcul 3 ont été rendues nécessaires par la situation de communication : en effet celle-ci est basée sur l'échange de messages entre deux binômes (phase 2) qui ne doivent pas avoir le même calcul à résoudre.

Ces variantes ont été construites pour être équivalentes du point de vue de l'écriture du message.

Variables didactiques du problème mathématique et saut informationnel entre le calcul 2 et le calcul 3 de la situation 1

Le calcul de l'image d'une fonction est le problème mathématique central de notre ingénierie. Ici il concerne le calcul de l'image d'une fonction composée $f \circ g$.

Dans un tel calcul et en l'absence de parenthèses, il faut calculer d'abord l'image d'un nombre v par g , mémoriser le nombre $g(v)$, puis calculer l'image de $g(v)$ par f .

Pour rendre nécessaire l'usage des mémoires, nous avons choisi la fonction g de telle sorte que le remplacement direct de $g(v)$ dans l'expression de $f(x)$ ne soit pas possible ou trop coûteux. C'est pour cela que nous avons choisi g tel que $g(x) = \frac{N(x)}{M(x)}$ où N et M sont des fonctions polynomiales.

$g(x) = \frac{N(x)}{M(x)}$ n'est pas réductible et la simplification de $f \circ g(x)$, possible algébriquement⁸ est très improbable dans le contrat du calcul effectif et de toute façon très coûteuse voire impossible dans le temps imparti.

Contrairement au calcul 2 où c'est l'appartenance de v à D_9 qui favorise l'usage des mémoires dans le calcul 3 c'est le fait que f soit une fonction composée $f \circ g$ combiné au blocage des parenthèses qui exige l'usage des mémoires.

Nous nous sommes contentés de prendre un nombre appartenant à D_3 ; mais nous l'avons choisi de telle façon que l'image de v par g soit un nombre décimal ayant un zéro comme troisième chiffre après la virgule (1,42030961 ou 1,41051891). Y aura-t-il troncature du résultat pour éviter l'usage d'une mémoire ?

Les calculs 2 et 3 se distinguent par l'usage des mémoires.

Dans le calcul 2, l'usage des mémoires est favorisé par la recherche d'un nombre minimum d'appuis des touches de la calculatrice, mais cet usage n'est pas obligatoire. De plus, dans le cas de l'algorithme de calcul direct (le plus probable), les mémoires variables et la mémoire Ans ont le même statut du fait qu'il y a un seul appui sur la touche « = » durant le calcul.

Dans le calcul 3, le calcul de l'image du nombre v par une fonction composée et le blocage des parenthèses, rendent obligatoire l'usage des mémoires et la différenciation des deux types de mémoires du fait qu'il y a plus d'un appui sur la touche « = » durant le calcul.

B. Analyse a posteriori de la situation 1

B.1 Résultats globaux

Les résultats de l'analyse des calculs routiniers 1 et 2 valident notre hypothèse de recherche selon laquelle, dans les calculs instrumentés, le rapport à la calculatrice dans EMS est essentiellement celui d'une machine arithmétique.

L'examen des fichiers historiques d'Alpro récupérés permet de reconstituer les programmes en actes des élèves (*suite de touches appuyées reconstituée grâce à l'historique d'Alpro*). Ces programmes permettent de rendre visibles d'autres résultats concernant les calculs instrumentés.

Tous d'abord le calcul instrumenté *dans l'institution française* a deux caractéristiques propres :

- Une règle du contrat didactique du calcul instrumenté, rendant acceptable comme résultat du calcul la valeur approchée, arrondie ou tronquée, du nombre affiché à l'écran de la calculatrice.
- Une pratique privée (~~AnsSto~~) de découpage du calcul en sous calculs, découpage permis par le stockage *non intentionnel* du dernier résultat dans la mémoire Ans.

⁸ $f \circ g(x) = 0,0164365549x^4 + 0,281511826x^3 - 0,9352391177x^2 - 0,6813344014x + \frac{3,552439741}{x - 0,8563589744}$
 $+ \frac{0,25607677}{(x - 0,8563589744)^2} + 10,62136543$

Dans *l'institution vietnamienne*, le vide didactique concernant les calculs instrumentés semble effacer les quelques connaissances instrumentales acquises au collège.

Rappelons que l'objectif de cette situation est aussi de faire évoluer le rapport instrumental à la calculatrice, en particulier en permettant l'identification des touches mémoires variables et Ans et leur différenciation.

La situation portant sur un calcul non routinier (calcul 3) permet non seulement de mettre en évidence cette évolution mais aussi d'initier une situation d'écriture, dans le langage évolué Alpro, d'un programme informatique à une machine à mémoire.

L'entrée dans cette nouvelle situation a permis à presque tous les élèves d'accéder aux deux types de mémoires. Seules trois élèves restent en échec.

Les programmes en actes font apparaître, chez certains élèves, une phase expérimentale, durant laquelle ils explorent les touches mémoires et débouchent sur leur usage pertinent.

L'exécution du programme écrit par autrui ainsi que les premières rencontres avec les mémoires dans les phases exploratoires des calculs 1 et 2 semblent avoir contribué de façon cruciale au processus d'instrumentation des touches mémoires d'Alpro

Le stockage des nombres dans les mémoires (Ans et mémoires variables) devient intentionnel. C'est le résultat le plus probant concernant l'instrumentation des touches mémoires. De ce fait la touche Ans, mémoire la plus utilisée, devient une mémoire visible.

Mais les touches mémoires, que ce soit Ans ou les mémoires variables, ont, dans l'écriture des programmes, un statut de « variable mathématique » : une mémoire contient un seul nombre durant tout le calcul.

La caractéristique d'effaçabilité n'est pas encore mise en place pour la majorité des élèves, quelque soit leur niveau : Alpro n'est pas encore une machine à mémoire effaçable. Ce sera l'un des enjeux des situations suivantes de l'ingénierie didactique.

Nous allons maintenant dans des études de cas examiner de façon qualitative des processus d'instrumentation des mémoires plus ou moins aboutis.

B.2 Études du cas de trois binômes

Les études de cas confirment que le processus d'instrumentation des mémoires variables A, B, C s'avère problématique. L'intervention didactique de l'enseignant (qui peut être l'observateur) et l'exécution du programme à mémoire variable écrit par autrui semblent des conditions nécessaires pour initier un processus d'apprentissage de ces mémoires.

L'instrumentation de la touche mémoire Ans se montre moins problématique, l'usage de la mémoire Ans, pratique « privée » chez des élèves sortant du collège en France, permet la rencontre du symbole « Ans » (message envoyé par Alpro à l'écran), élément déclencheur du processus.

Mais l'usage de la mémoire AnsSto peut aussi s'opposer à ce processus comme nous l'avons observé chez le premier binôme. En effet, l'appui sur la touche « = » pour avoir le résultat d'un sous calcul, efface le nombre stocké intentionnellement dans le mémoire Ans.

Ces études permettent de mettre en évidence trois usages de la mémoire « Ans » :

- En tant que mémoire AnsSto : le symbole « Ans » est visible dans l'expression sans que la touche « Ans » soit tapée ;
- En tant que mémoire du dernier résultat : le symbole « Ans » est réutilisée (donc la touche est retapée), une *seule fois* dans un calcul ;
- En tant que mémoire variable mathématique : le symbole « Ans » est réutilisée (donc la touche est retapée), *plusieurs fois* dans un calcul

D'autres touches doivent être instrumentées corrélativement aux touches mémoires, en particulier les touches de correction AC/ON, C/OFF et les touches d'initialisation des mémoires comme les touches « = » pour Ans et Sto pour les mémoires variables.

Les calculs proposés et les difficultés à les programmer avec Alpro, peuvent limiter le processus d'instrumentation aux seules touches AC/ON et C/OFF : par exemple, le premier binôme a appris à les différencier.

L'instrumentation des touches de correction, en particulier de AC/ON, peut surajouter une signification non prévue par les constructeurs à l'usage des mémoires : l'appui sur la touche « = », à la suite de l'entrée d'un nombre v , initialise la mémoire Ans, l'appui sur AC/ON conserve le nombre v , une fois devenu invisible, dans cette mémoire.

III.2 Situation 2

A. Présentation des problèmes de tabulation d'une fonction et des raisons des choix (analyse *a priori*)

L'enjeu de cette situation est la formulation de l'invariant opératoire d'un calcul répétitif (*tabulation d'une fonction*) dans un message à une machine Alpro bloquée seule, puis associée à un robot CALCULATOR, le couple (Alpro, CALCULATOR) ayant un fonctionnement proche de la machine analytique de Babbage.

Cette formulation d'un calcul répétitif à une machine est une condition nécessaire, d'après nos hypothèses, à la conceptualisation des notions de variable informatique et de boucles.

Rappelons deux hypothèses que nous avons explicitées à la fin de la partie B de notre travail et qui fondent la conception de la situation 2 :

Hypothèse

L'écriture d'un programme de calculs répétitifs (algorithme itératif) en un langage proche du fonctionnement de la machine est une condition favorable à l'émergence de la notion de variable comme mémoire effaçable.

Hypothèse

La formulation de la condition d'arrêt et de l'invariant de la répétition, nécessaire à l'écriture d'un message à une machine à mémoire effaçable, oblige à un travail réflexif sur les objets mathématiques présents dans la solution mathématique d'un problème.

Dans les situations 2 et 3, le problème mathématique de tabulation est le suivant :

Soit f la fonction $x \mapsto f(x) = x^2 + 1$.

Calculer les images par cette fonction de m nombres $x_0, x_1 \dots x_k \dots$ espacées d'un pas p et appartenant à l'intervalle $[-3, 2]$ avec $x_0 = -3$

Nous avons choisi :

- une fonction non problématique et présente dans les chapitres sur les fonctions des manuels à partir de la classe de Seconde dans les deux institutions française et vietnamienne.
- l'intervalle $[-3, 2]$ est tel que les bornes sont des entiers « petits », l'un négatif, l'autre positif en conformité avec la donnée des intervalles de définition d'une fonction dans les deux institutions.
- l'intervalle $[-3, 2]$ est non symétrique par rapport à 0 pour éviter la réduction de la répétition par l'utilisation d'une propriété mathématique : f étant une fonction paire, si $[a, b]$ est symétrique par rapport à 0, le nombre de calculs des images peut être réduit de moitié par symétrie.

Nous avons joué sur *la taille du pas relativement à la longueur de l'intervalle* pour organiser un saut informationnel entre la phase 1 et la phase 2 de la situation 2.

Nous allons maintenant rentrer plus dans le détail des phases de la situation 2.

A.1 Un premier problème de tabulation

La phase 1 de la situation 2 a pour objectif de faire la dévolution du problème mathématique de tabulation d'une fonction. L'observable de cette dévolution est le résultat (individuelle) du calcul des élèves.

Énoncé du premier problème de tabulation

Exercice 1 (10 minutes). Travail individuel avec la calculatrice Alpro ou la calculatrice personnelle. Avec la calculatrice personnelle, utiliser les mêmes touches autorisées qu'Alpro

Soit la fonction : $x \mapsto f(x) = x^2 + 1$.

On veut calculer les images, par la fonction f , de plusieurs valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-3, 2]$. Pour cela, on prend un écart⁹ fixe entre deux valeurs successives de x , en commençant par -3. Les premiers calculs se présentent ainsi :

$$f(-3) = 10 ;$$

$$f(-2,8) = 8,84 ;$$

$$f(-2,6) = 7,76 ;$$

a) Quel est l'écart choisi entre deux valeurs successives de x ?

⁹ Dans l'énoncé nous avons choisi le mot « écart » au lieu de « pas » pour désigner le nombre p car le mot « pas » n'est pas connu dans l'institution vietnamienne. Dans l'analyse, nous utilisons le mot « pas ».

A.2 Un deuxième problème de tabulation et écriture d'un programme de calcul répétitif à une machine

L'enjeu est d'écrire un programme de calcul répétitif à une machine et donc de rencontrer, à propos d'un problème de tabulation, un problème informatique. Le langage pour l'écriture de ce programme est le *langage Alpro*¹⁰ (déjà initié lors du calcul 3 de la situation 1).

Énoncés du deuxième problème de tabulation et du problème informatique

Travail en binôme avec papier, stylo et Alpro (10 minutes)

On veut maintenant réduire l'écart entre deux valeurs successives de x en le prenant égal à 0,03. On commence les calculs avec la calculatrice Alpro :

$$f(-3) = 10 ;$$

$$f(-2,97) = 9,8209 ;$$

Il y a beaucoup de calculs à répéter !

On fait alors appel au robot CALCULATOR qui sait faire deux actions :

- Appuyer sur les touches de la calculatrice Alpro à condition qu'on lui indique ces touches par écrit ;
- Imprimer automatiquement ce qui est affiché sur la ligne de résultat de la calculatrice Alpro après l'appui sur la touche \square ;

CALCULATOR ne sait faire que ces deux actions et ne possède ni papier ni stylo

On décide d'écrire un message au robot CALCULATOR en lui indiquant les touches de la calculatrice Alpro sur lesquelles appuyer.

CALCULATOR, en exécutant ce message, doit *imprimer toutes les images par la fonction f des valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-3 ; 2]$ et seulement ces images*, l'écart entre deux valeurs successives de x étant égal à 0,03.

$$\text{Rappel } f : x \mapsto f(x) = x^2 + 1$$

Écrivez ce message :

Calculez les images par la fonction f de la sixième, la onzième et la treizième valeur de x .

A.3 Coût d'un programme écrit en langage Alpro à la machine (Alpro, CALCULATOR)

Cette phase a pour objectifs de permettre :

- l'identification de l'invariant de la répétition du calcul dans le deuxième problème de tabulation. L'élève n'a pas à le formuler, ni l'enseignant à l'institutionnaliser.
- l'émergence en actes d'éléments sur la complexité des programmes utilisés : nombre d'opérations, nombre de mémoires. Ce travail sur le coût d'un message prépare la situation suivante qui vise la formulation d'une condition d'arrêt d'une itération et, pour se faire, un retour réflexif sur les notions mathématiques, comme fonction et intervalle.

Énoncé

Travail en binôme avec papier, stylo et Alpro (15 minutes)

La longueur du message à CALCULATOR est égale au nombre d'appuis de CALCULATOR sur Alpro.

Combien de fois en tout CALCULATOR appuie-t-il sur les touches de la calculatrice Alpro ?

Nombre de fois :

Expliquez comment vous avez calculé ce nombre :

¹⁰ Suite de touches d'Alpro.

A.4 Amélioration du Robot CALCULATOR ?

Le processus de conception d'un nouveau Robot, CALCULATOR II est initié pour permettre à la machine (Alpro, CALCULATOR) de prendre en charge la répétition d'un problème de tabulation. L'amélioration de la machine (Alpro, CALCULATOR) sera l'enjeu de la situation 3. Comment faire pour que la longueur du message soit très inférieure au nombre d'appuis de CALCULATOR sur les touches Alpro ? Comment faire pour rendre possible, dans un temps limité, l'écriture d'un message à la machine ?

Énoncé

Travail en binôme avec papier, stylo et Alpro (10 minutes)

On va essayer dans la séance suivante d'améliorer le robot CALCULATOR pour rendre la longueur du message inférieure au nombre d'appuis de CALCULATOR sur Alpro. Cela nous permettra non seulement d'écrire tout le message mais aussi de le rendre considérablement plus court.

Pour améliorer le robot CALCULATOR, que proposez-vous ? Écrire vos propositions :

Nous résumons les quatre phases de la situation 2 dans la figure 10 ci-dessous.

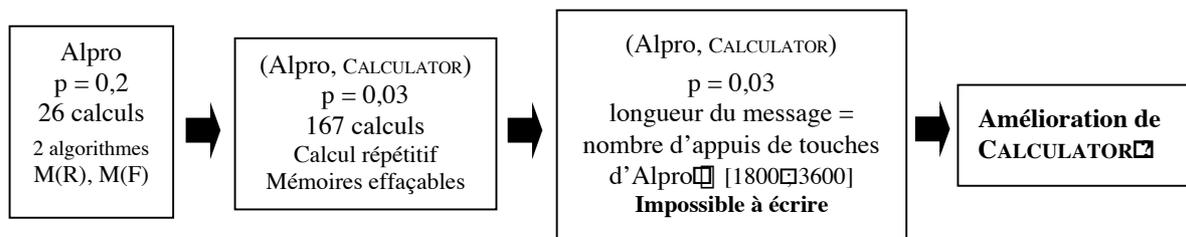


Figure 10. Les quatre phases de la situation 2 de l'ingénierie didactique

Que s'est-il passé ?

Nous allons maintenant analyser les réalisations de la situation 2 dans EMS en France et au Viêt-nam pour répondre à cette question.

B. Analyse *a posteriori* de la situation 2

Les résultats de l'analyse de cette situation montrent que dans les premiers programmes écrits de calcul répétitifs, la majorité des élèves délèguent au robot CALCULATOR la prise en charge de la répétition et de l'arrêt des calculs : ils ont donc pour la plupart écrit un programme « impossible » au robot CALCULATOR qui ne sait ni répéter ni arrêter des calculs.

L'enseignant a du intervenir pour rappeler les capacités et les limitations du robot CALCULATOR.

Quand les mémoires variables A, B, C sont utilisées, elles sont initialisées au début de l'itération. Ce résultat infirme des études précédentes qui montraient que cette opération fondamentale était problématique « *même pour des élèves d'un plus haut niveau de connaissance dans la construction des boucles* » (Samurçay 1985, cité dans Méjias 1985, p. 97). La maîtrise de cette opération, observable de l'instrumentation des touches mémoires variables A, B et C, continue à se forger dans cette situation et dans le prolongement des calculs mis en place dans la situation 1.

Les résultats de l'expérimentation valident une partie de notre hypothèse : l'écriture d'un programme de calcul répétitif à une machine à mémoire effaçable est une condition favorable à l'émergence de la notion variable comme mémoire effaçable. Presque la moitié des élèves effectue la mise à jour des variables, observable de l'effaçabilité d'une mémoire déjà initialisée.

Cependant un nombre quasi équivalent d'élèves continue à concevoir les mémoires variables A, B, C comme des variables mathématiques. Ce statut des mémoires variables A, B, C présent dès la situation 1, résiste aux conditions mises en place, en particulier à la répétition importante des calculs. Ils ont recours à des palliatifs comme la mémoire papier ou des symboles ou mots habituels de la répétition.

Le dénombrement du nombre d'appuis de touches exige d'identifier l'invariant de la répétition du calcul puis de calculer le nombre de répétition de cet invariant, préalable à la formulation d'une condition d'arrêt. Ce dénombrement est une tâche problématique puisque un seul binôme donne un résultat correct.

Les deux algorithmes de calcul sont disponibles, l'algorithme de proche en proche M(R) et l'algorithme utilisant un modèle fonctionnel M(F) comme le montrent les calculs dans le premier problème de tabulation.

Le travail d'écriture d'un programme en langage Alpro est un travail de transformation des algorithmes : cette transformation est plus coûteuse en mémoires et en nombre d'opérations pour l'algorithme M(F) que pour l'algorithme M(R). Ce coût apporte une explication à la prédominance de l'algorithme M(R) dans l'écriture des programmes observés. Mais même dans le cas de l'algorithme M(R), le travail d'écriture d'un programme reste difficile puisque seul un binôme réussit l'écriture de l'invariant en langage Alpro.

Pour l'algorithme M(F), une difficulté supplémentaire s'ajoute au coût, celle de la formulation de la « variable compteur », variable à construire car absente de l'énoncé du problème : elle n'est explicitée dans aucun des programmes M(F), les élèves utilisant la mémoire papier pour noter les premières valeurs de cette variable et attribuant au robot CALCULATOR la capacité de continuer le calcul de ces valeurs.

La situation 2 s'achève sur le besoin d'améliorer le robot CALCULATOR puisque la longueur du programme est égale au nombre d'appuis de touches, calculé dans la phase 3 : l'écriture du programme dans un temps limité est donc impossible !

L'institutionnalisation de l'enseignant à la fin de la situation 2 est nécessaire pour que l'enjeu soit bien l'amélioration du robot CALCULATOR et non de la calculatrice que les élèves cherchent à rapprocher des calculatrices qu'ils connaissent.

L'amélioration du robot revient à concevoir une unité de commande dans la machine (Alpro, CALCULATOR) sans changer l'unité de calcul.

La situation 3 continue le processus initié à la fin de la situation 2 (phase 4) : l'amélioration du Robot CALCULATOR qui elle-même fait évoluer le langage et la machine.

III.3 Situation 3

A. Passage de la machine (Alpro, CALCULATOR) à la machine (Alpro, CALCULATOR II)

Nous avons choisi d'améliorer le Robot CALCULATOR en lui donnant la capacité de « comprendre » *un nombre limité de mots* exprimant la répétition. Et donc nous avons éliminé l'autre amélioration (compréhension d'expressions logiques) beaucoup trop complexe à mettre en place dans le cadre de notre projet d'une ingénierie à durée limitée.

La capacité de pouvoir répéter l'exécution d'un calcul sont liées intrinsèquement à la fonction de traduction d'un programme : le Robot CALCULATOR II peut traduire un programme écrit comportant des touches d'Alpro et des *mots* exprimant la répétition. Il le traduit en un langage qu'il peut exécuter directement sur Alpro. Dans ce sens, le Robot CALCULATOR II est un compilateur qui enregistre le programme écrit (« programme enregistré » de la machine ordinateur) et le traduit pour l'exécuter. Dans la situation 3, la machine (Alpro, CALCULATOR II) est une machine ordinateur suivant l'architecture de Von Neumann (cf. chapitre B2).

Ce travail sur le Robot CALCULATOR fait donc participer les élèves à la fabrication d'une nouvelle machine

L'évolution de la machine va de pair avec une évolution du langage de la programmation compris par la machine : le langage évolué à la machine améliorée (Alpro, CALCULATOR II) comprend une suite de touches d'Alpro et *quelques mots*.

Cette situation permet ainsi l'émergence en actes d'éléments fondamentaux d'un langage évolué comme :

- la séquentialité : déjà présente dans le langage Alpro
- l'itération : nouvelle structure du langage destiné à (Alpro, CALCULATOR II)

Rappelons l'hypothèse qui fonde la conception de cette situation.

Hypothèse

L'écriture d'un message à une machine de Von Neumann pour obtenir l'exécution d'un algorithme itératif de calcul est une condition favorable à l'émergence en actes d'éléments d'un langage évolué : séquentialité, branchement et itération.

A.1 Explicitation de l'invariant de boucle

L'enjeu de cette phase est la formulation de l'invariant de la répétition des calculs *en langage Alpro*, c'est-à-dire un groupe de touches sur lesquelles le Robot CALCULATOR aura à appuyer de manière répétitive pour exécuter le calcul. Cet invariant du calcul a déjà été travaillé implicitement dans la situation 2, au cours de la phase 3 du dénombrement des touches d'appuis d'Alpro par le Robot CALCULATOR.

Énoncé

Travail en binôme avec papier, stylo et Alpro (15 minutes)

Pour rendre la longueur du message inférieure au nombre d'appuis de CALCULATOR sur Alpro, on décide d'augmenter les capacités de CALCULATOR.

En plus des capacités de CALCULATOR, le robot amélioré, CALCULATOR II doit pouvoir répéter l'exécution d'un groupe de touches d'Alpro.

Écrire un groupe de touche à répéter, en vous assurant sur Alpro que la répétition fournit bien les nombres attendus.

Groupe de touches à répéter :

A.2 Institutionnalisation des groupes de touches

À la fin du temps imparti, l'enseignant récapitule les groupes de touches proposés dans la classe (groupe avec mémoires Ans, groupe avec mémoires variables).

Pour chaque proposition différente, l'enseignant joue le rôle du robot fictif CALCULATOR II en exécutant « à la main » les groupes de touches proposés sur Alpro publique : rétro-projection au tableau.

Cette validation effective à partir de certaines réponses des binômes, oblige à débiter l'exécution d'un groupe de touches sur Alpro, et donc débouche sur l'initialisation explicite de la variable informatique (mémoires A, B, C) et sur l'arrêt effectif et implicite de l'exécution.

Cette exécution fournit des éléments de validation du groupe de touches produit par l'élève.

Cette phase débouche sur l'institutionnalisation de deux groupes de touches liés aux algorithmes M(R) et M(F) : ces deux groupes restant écrits au tableau pour la phase qui suit.

Ce sont les groupes suivants :

Algorithme M(R)	Algorithme M(F)
A x A + 1 =	- 3 + A x 0 0 3 STO B
A + 0 0 3 STO A	B x B + 1 =
	A + 1 STO A

Tableau 4. Groupes de touches en relation avec les deux algorithmes M(R) et M(F) laissés au tableau

A.3 Comment « écrire » à CALCULATOR II la répétition ?

L'enjeu de cette phase est de faire évoluer le langage Alpro en un langage (Alpro, CALCULATOR II) comprenant une suite de touches d'Alpro et *quelques mots* que CALCULATOR II « comprend » et qui permet d'écrire un message le plus court possible à la machine

Enoncé

Travail individuel (15 minutes)

Le robot amélioré, CALCULATOR II, en plus des capacités de CALCULATOR II, doit pouvoir répéter l'exécution du groupe de touches d'Alpro écrit au tableau.

Comment le lui dire ?

On imagine que CALCULATOR II peut comprendre au maximum cinq mots de la langue française qui aident à contrôler la répétition de l'exécution d'un groupe de touches d'Alpro.

Vous devez choisir ces mots et écrire un message le plus court possible à CALCULATOR II

CALCULATOR II, en exécutant ce message, doit imprimer toutes les images par la fonction f des valeurs de x appartenant à l'intervalle $[-3 ; 2]$ et seulement ces images, l'écart entre deux valeurs successives de x étant égal à $0,03$.

$$\text{Rappel : } f : x \mapsto f(x) = x^2 + 1$$

Message :

Longueur du message :

Pour calculer la longueur du message, les mots seront comptés comme les touches.

Liste de mots :

B. Analyse a posteriori de la situation 3

Les programmes écrits des binômes à la fin de cette situation pour l'exécution des algorithmes itératifs M(R) et M(F) sur la machine (Alpro, CALCULATOR II) attestent la présence dans la majorité de ces programmes

- d'une part, des notions de variable informatique et de boucle, un observable étant la mise à jour des mémoires variables,
- et d'autre part, d'éléments d'un langage évolué (Alpro, CALCULATOR II), un observable étant des mots et des signes exprimant la séquentialité et la répétition.

Ces résultats valident donc en partie l'une de nos hypothèses selon laquelle l'écriture d'un programme de calcul répétitif en langage proche de la machine est une condition favorable à l'émergence de la notion variable informatique.

Cependant, du fait que la machine est en partie fictive, le recours à la validation pragmatique d'Alpro ainsi que le travail coopératif d'institutionnalisation entre l'enseignant et les élèves ont joué un rôle prépondérant dans l'évolution des notions informatiques.

Ce recours et ce travail coopératif a permis :

- de valider ou d'invalider des programmes proposés par l'exécution des premières itérations d'un corps de boucle sur Alpro ou « à la main » ;
- de rendre publics et d'officialiser des objets informatiques comme « mise à jour » ; « initialisation », « condition d'arrêt » et « corps de la boucle ».

La présence des corps de boucles, laissés au tableau suite aux interactions entre enseignant et élèves a permis de diffuser les découvertes de certains binômes, à d'autres binômes de s'en emparer, d'autant plus facilement que ces propositions répondaient à un problème de réécriture informatique.

La situation 3 a permis d'observer la difficulté de la mise en place d'une variable compteur.

Partie IV

Principaux résultats de l'étude didactique sur l'enseignement d'objets propres à l'algorithmique et la programmation à l'aide de la calculatrice

Nous articulons dans cette partie l'enquête épistémologique, les analyses institutionnelles et les analyses du produit de l'ingénierie qu'est le scénario central (scénario 1). La machine de base du scénario 1 (mais aussi des autres scénarios) est la calculatrice ordinaire, le plus souvent représentée par l'émulateur Alpro.

Un des résultats de l'enquête épistémologique est que les notions de boucle et de variable se construisent en même temps que l'architecture de la machine se transforme. Tel est le fil conducteur de l'ingénierie didactique du scénario 1 basée sur les résultats des analyses institutionnelles et épistémologiques et que nous pouvons intituler « d'Alpro machine arithmétique à Alpro unité de calcul dans une machine de Von Neumann ».

L'effaçabilité de la mémoire et la notion de variable

La notion de *variable informatique* ne prend son sens qu'à partir du moment où une mémoire est conçue comme une mémoire effaçable, au delà de son rôle de conserver une donnée (ici un nombre). Cette affirmation se nourrit à la fois de l'analyse que nous avons faite de la genèse historique de la machine ordinateur et de celle de la genèse expérimentale que nous avons mis en place dans deux institutions d'enseignement (scénario 1). Mais cette notion de variable pour exister a besoin d'une matérialisation en tant que *mémoire d'une machine*, c'est-à-dire un emplacement réservé à l'avance pour conserver une donnée.

Le statut prédominant des mémoires, au début de la situation 1 du scénario 1, est celui de *variable mathématique* : une mémoire contient un et un seul nombre durant tout le calcul. Une mémoire n'est donc pas encore conçue comme effaçable et n'est donc pas une variable informatique. L'exécution sur Alpro du programme écrit par autrui ainsi que les premières rencontres avec les mémoires dans les phases exploratoires de calculs routiniers semblent avoir contribué de façon cruciale au processus d'instrumentalisation des touches mémoires d'Alpro.

Le stockage des nombres dans les mémoires ne devient *intentionnel* qu'à la fin de la situation 1 du scénario 1. C'est le résultat le plus probant concernant l'instrumentalisation des touches mémoires.

Il faut attendre la fin du scénario 1 pour que la majorité des programmes finaux et écrits des élèves pour l'exécution d'algorithmes itératifs sur la machine (Alpro, CALCULATOR II) atteste de la présence de *l'effaçabilité intentionnelle des mémoires par l'opération de mise à jour*. Ces mémoires ont alors acquis pleinement le statut de variable informatique.

Le fonctionnement de la calculatrice comme une machine arithmétique

Les calculatrices à la disposition des élèves dans EMS (France ou Viêt-nam) sont toutes munies de touches mémoires associées à des mémoires effaçables. Or les analyses institutionnelles et l'analyse *a posteriori* de la situation 1 du scénario 1 mettent en lumière un fonctionnement largement majoritaire de la calculatrice comme une machine arithmétique : les touches mémoires peuvent être utilisées sans donner intentionnellement à la mémoire le caractère d'effaçabilité.

C'est un résultat de l'enquête épistémologique d'avoir distingué machine arithmétique et machine à mémoire effaçable. L'invention de cette dernière (machine analytique de Babbage) a permis l'écriture du premier programme informatique (Adda 1842).

Les calculatrices qui sont entre les mains des élèves de EMS disposent principalement de deux types de mémoires : Ans mémoire du dernier résultat et les mémoires variables, ces dernières étant les seules candidates à permettre la conceptualisation de la notion de variable informatique.

Nous pouvons même affirmer que la genèse instrumentale de la calculatrice dans EMS en tant que machine arithmétique, que ce soit en France ou au Viêt-nam, est inachevée. En effet, l'instrumentation des touches mémoires variables A, B, C et Ans, dépend de celle d'un complexe de touches, comme AC/ON, C/OFF, « = », Sto, Rcl, dont toutes les fonctionnalités sont loin d'être maîtrisées.

L'économie de la communication homme - machine et la notion de boucle

La présence de calculs répétitifs installent dans EMS des algorithmes itératifs. Cela a été l'une des justifications de notre intérêt pour la notion de boucle. L'autre a été l'apparition de boucles dans l'écriture du premier programme à une machine à mémoire effaçable (machine analytique de Babbage) pour l'exécution d'un algorithme itératif par Adda (1842).

Nous avons donc fait l'hypothèse que l'intention d'exécuter des calculs répétitifs et le *repérage d'un invariant opératoire* est une nécessité pour concevoir et élaborer une communication à la machine qui économise la répétition de tous les calculs à lui faire exécutés. La notion de boucle est une réponse à cette recherche d'économie.

C'est cette hypothèse qui fonde le passage de la situation 2 à la situation 3 (scénario 1), du robot CALCULATOR au robot amélioré CALCULATOR II, qui enregistre le programme communiqué : de ce fait la machine (Alpro, CALCULATOR II) est une machine à *programme enregistré*, donc une machine de Von Neumann (machine ordinateur).

C'est aussi un résultat de l'analyse épistémologique d'avoir distingué machine à programme enregistré (machine de Von Neumann) et machine à *mémoire effaçable* (machine analytique de Babbage).

L'évolution du langage Alpro vers un langage à une machine de Von Neumann

La machine de Von Neumann, intégrant un programme compilateur enregistré autorise la traduction de tout langage sémantiquement proche du langage naturel en un langage exécutable directement par la machine (langage machine). C'est ce qui a permis les évolutions des langages depuis le langage machine vers les langages les plus évolués.

En même temps que l'émergence de la notion de boucle, nous avons conçu le passage de la situation 2 à la situation 3, (de la programmation d'un algorithme itératif à la machine à mémoire effaçable à celle du même algorithme à la machine de Von Neumann) comme nécessitant la *participation des élèves à l'évolution d'un langage* : aux instructions de séquentialité, présentes dès la situation 1, s'ajoutent des instructions d'itération et de sortie de boucle.

Notamment, la mise à jour des variables par une notation d'affectation en langage Alpro, étroitement associée au processus d'instrumentation des touches mémoires effaçables A, B, C, doit s'articuler à leur initialisation, dans l'économie de l'écriture de la répétition.

Le travail mathématique nécessaire à la programmation d'un algorithme

L'analyse épistémologique a montré qu'Ada a dû transformer un algorithme mathématique infini en un algorithme itératif fini pour pouvoir écrire un programme à la machine analytique de Babbage.

Les élèves (étude de cas) se sont, eux aussi, engagés dans un travail sur l'algorithme de tabulation pour établir et écrire, en langage Alpro puis en un langage plus évolué, l'invariant et la condition d'arrêt de la répétition. Ces écritures ont nécessité un retour réflexif sur les objets mathématiques présents dans le problème de tabulation d'une fonction numérique : variation de la fonction, discrétisation de l'intervalle de définition, etc.

Un nouveau type de tâche

L'ingénierie didactique a introduit un nouveau type de tâche informatique « *Écrire un programme informatique pour produire des résultats effectifs à partir d'un algorithme itératif connu* (comme solution d'un problème mathématique) » dont notre analyse institutionnelle a montré l'absence dans EMS.

L'analyse *a posteriori* atteste qu'il est possible d'en faire la dévolution aux élèves et de mettre en place un travail coopératif d'institutionnalisation pour l'écriture en langage évolué d'objets informatiques élémentaires (comme boucle, variable, opérations sur les variables), travail nourri par une validation de nature syntaxique.

La double nature des machines de l'ingénierie didactique

L'absence institutionnelle de tout langage de programmation au niveau secondaire (aussi bien en France qu'au Viêt-nam) et la possibilité de choisir entre les deux stratégies d'enseignement mises en évidence dans l'analyse des traités (Horowitz 1978, Kuntzmann 1957 et Knuth 1968), nous a fait prendre la décision de nous appuyer sur le recours à des machines dans le scénario 1 (stratégie d'enseignement du traité de Knuth).

Les machines présentes dans le scénario 1 ont une double nature : matérielle pour la calculatrice Alpro et fictive pour le robot CALCULATOR.

Or, l'évolution du robot joue un rôle crucial : d'unité de commande ne pouvant pas répéter un calcul dans la machine (Alpro, CALCULATOR) il devient unité de commande pouvant enregistrer un programme (compilateur) dans une machine de Von Neumann (Alpro, CALCULATOR II).

Cette double nature des machines choisies permet un jeu de la validation syntaxique : validation pragmatique par l'exécution des programmes de calcul sur Alpro (situation 1), validation conceptuelle selon des critères de validités avec les programmes à boucle sur la machine de Von Neumann. Ces critères de validités résultent d'un travail coopératif (entre les élèves et entre les élèves et l'enseignant) d'écriture d'un programme dans un langage évolué (situations 2 et 3 du scénario 1).

Partie V

Création d'un site Internet dédié à la formation des enseignants de mathématique du secondaire par la formation à la didactique des mathématiques

L'Université Pédagogique d'Ho Chi Minh ville (UPHCM) est une Université de formation des enseignants du Lycée, en particulier de mathématiques.

Nous prenons appui pour la création de notre site sur ce qu'écrit Comiti (2005) au sujet de la formation des enseignants de mathématiques. La formation doit être

« (...) pensée en interrelation avec trois pôles fondamentaux : le système éducatif, la profession, les recherches sur ce système et sur l'enseignement. Un de ses rôles est de permettre l'intégration dans le système éducatif des résultats de ces recherches, tout en prenant en compte les contraintes de la profession.

Les hypothèses qui la sous-tendent :

- . Les pratiques professionnelles des enseignants ont des composantes spécifiques de la discipline enseignée, ici des mathématiques, qui se construisent au travers d'allers et retours entre réflexions issues de savoirs théoriques et réflexions issues de l'action. Les modes d'acquisition de ces pratiques sont complexes et ne peuvent être réduits à une juxtaposition de connaissances diverses.
- . Une formation professionnelle ne peut se réduire à une formation théorique, ni être seulement le fait du terrain : les connaissances didactiques du futur professeur (formation initiale) ou de l'enseignant en fonction (formation continue) se construisent au travers des interactions entre la pratique de classe et les éléments de sa formation. »

Dans ce contexte, la création d'un site Internet dédié à la formation des enseignants doit viser tout à la fois une formation d'enseignants de mathématiques et une formation de formateurs et prendre appui sur des ingénieries didactiques issues de la recherche en didactique des mathématiques comme le scénario 1, présenté dans ce rapport.

« L'ingénierie didactique est à la fois une *réalisation didactique* en classe et une pratique de recherche. 'Poser le problème de l'ingénierie didactique, c'est poser [...] le problème de l'action et des moyens de l'action, sur le système d'enseignement.' (Chevallard 1982, p.28) La didactique affirme la possibilité d'une *action rationnelle* sur le système d'enseignement (basée sur des connaissances didactiques préétablies) et elle met à l'épreuve de la réalité des constructions théoriques élaborées au préalable. Ce travail ressemble au travail de l'ingénieur qui, pour réaliser un projet précis (ici d'enseignement) s'appuie sur les connaissances de son domaine scientifique (ici la didactique des mathématiques), et accepte de se soumettre à un contrôle de sa communauté scientifique. Dans le même temps, cette démarche conduit à rencontrer les objets complexes de la réalité (de l'enseignement) et donc à s'attaquer pragmatiquement, avec tous les moyens dont on dispose, à des 'problèmes que la science ne veut ou ne peut pas encore prendre en charge' (Artigue 1990). » (Bessot et Nguyen 2005)

Ce site doit disposer d'une structuration qui permette tout à la fois :

- le regroupement et le développement de ressources pédagogique et documentaire, sous la forme d'espaces ouverts aux établissements du Viêt-Nam et de l'Asie francophone ;
- un travail interactif et en continu entre formateurs et chercheurs des deux pays, France et Viêt-Nam, pour la conception d'autres ingénieries (que les quatre mentionnées ici), sous la forme d'une plate-forme collaborative.

Ainsi ce site permettra aussi de faire connaître et de développer, au Viêt-Nam et au-delà du Viêt-Nam la coopération franco-vietnamienne et ses résultats dans le domaine de la didactique des mathématiques.

I. Le cahier des charges du site

Nous prévoyons un découpage du site en cinq « espaces » notés E0, E1, E2, E3 et E4 et organisé de la façon suivante.

E0. Page d'accueil

Le logo et le nom du site apparaîtront, ainsi que les logos de l'UPHCM et de l'UJF.
Dans cette page figureront les rubriques suivantes :

- *Choix de la langue* : vietnamien, français
Deux interfaces indépendantes sont prévues, pour permettre d'avancer à des rythmes différents de construction.
- *Bandeau de renvoi donnant accès à l'un des cinq espaces*
- *Comité scientifique* (lien avec l'espace E1)
- *Actualité* : informations sur les formations, les séminaires et les recherches de didactique des mathématiques à l'UPHCM et à l'UJF.

E1. Présentation

Dans cette page figureront les rubriques suivantes :

- *Bandeau de renvoi donnant accès à l'un des cinq espaces*
- *Liste des membres du comité scientifique du site*
- *Les formations d'enseignants et de formateurs d'enseignants* (lien pour une description dans E1)
- *Les recherches sur l'enseignement des mathématiques* (lien pour une description dans E1)
- *Bandeau de renvoi donnant accès aux descriptions des formations, des recherches*

E2. Documentations

Dans cette page figureront les rubriques suivantes :

- *Bandeau de renvoi donnant accès à l'un des cinq espaces*
- *Textes présentant des résultats de recherches sur l'enseignement des mathématiques*
Ces textes pourront être classés selon des domaines (algèbre, analyse, géométrie, algorithmique...) et selon les niveaux scolaires (primaire, collège, lycée, université).
- *Répertoire des publications concernant l'enseignement des mathématiques, la formation des enseignants et des formateurs et la recherche en didactique des mathématiques*

Ce répertoire pourra être organisé selon des domaines (algèbre, analyse, géométrie, algorithmique...) et selon les niveaux scolaires (primaire, collège, lycée, université).

- *Bandeau de renvoi donnant accès aux textes, au répertoire, aux liens avec d'autres sites*

E3. Espace Formation – Recherche pour les enseignants, les formateurs et les chercheurs

Cet espace est spécifiquement dédié à la formation *interactive* des enseignants et des formateurs d'enseignants « *par la recherche* ».

Sa conception est basée sur l'idée suivante : dans un parcours d'enseignement, il y a des passages obligés ; une mauvaise ou une absence de négociation de ces passages peut compromettre gravement les acquisitions ultérieures. On appellera ces passages des *moments cruciaux*. Les différentes informations s'articuleront autour de ces moments.

Il est alors important que l'enseignant ou le formateur ait conscience de ces moments cruciaux, connaisse la façon dont les élèves du niveau en question apprennent dans ces moments, quelles décisions il peut prendre et pourquoi. À partir de quelles connaissances les élèves vont-ils apprendre ? Quelles connaissances initiales risquent de créer des difficultés ? Quelles sont les questions qui les motivent et leur permettent de comprendre le problème ?

Cet espace proposera, pour les tâches correspondant à ces moments cruciaux, des exemples analysés de ce qui se passe effectivement pendant l'enseignement. Ces exemples seront sélectionnés à partir d'une analyse fine et argumentée des données de l'observation des scénarios (vidéo, productions d'élèves). Ainsi cet espace *offrira des « zooms » sur les moments qui sont cruciaux pour l'apprentissage visé par la séquence*, et éclairera l'enseignant sur l'activité des élèves et les décisions qu'il peut ou doit prendre.

Le but de ces « zooms » présentant l'activité dans une classe où la séquence a déjà été réalisée est :

- de permettre une réflexion des enseignants sur les conditions mises en place pour l'enseignement d'un savoir dans les séquences présentées. Ces conditions ont en effet des conséquences sur l'activité de l'enseignant et de l'élève et sur leurs interactions possibles, conditions présentées ici *comme des choix contre d'autres choix possibles (notion de variable didactique)*.
- de fournir *aux enseignants une information sur ce qui peut se passer et sur ce qui se passe réellement entre les élèves pendant l'enseignement* et qu'en général le professeur ne peut pas observer. En effet, en particulier dans tous les travaux où il y a interaction en petits groupes, ou avec l'ensemble de la classe, le professeur n'a pas accès à la façon dont les élèves ont construit leur réponse, seule leur réponse finale lui est accessible.

Résumons en termes de niveaux l'espace E3, chaque niveau étant lui-même un espace :

Niveau 1 – description de la séquence avec indication des moments cruciaux, des objectifs de chacune des situations, des conditions mises en place et de leurs raisons d'être.

Niveau 2 – vidéo de moments cruciaux de classe (procédures d'élèves, interaction d'élèves, interactions enseignant avec les élèves, institutionnalisation de l'enseignant, exemples de comptes rendus écrits d'élèves ou extrait de copies

Niveau 3 – Analyses faites avec les outils de la recherche en didactique des mathématiques des observations précédentes.

Dans l'espace E3, on doit pouvoir envisager des parcours divers selon les différents publics. Par exemple, passage ascendant d'un niveau à un autre ou bien descendant d'un niveau à un autre, etc...

La présence d'un moteur de recherche, fonctionnant sur les deux espaces E2 et E3 doit permettre la recherche par auteurs, sujets, termes mathématiques et didactiques.

E4. Espace Forum

Cet espace sera :

- associé intimement à l'espace E3
- et régulé par un modérateur.

Il permettra d'initier et d'organiser les discussions sur les ingénieries et leurs analyses.

II. Le développement informatique du site

Le responsable du Département de Mathématiques – Informatique de l'UPHCM, M. Nguyen Thai Son, appuie la création d'un tel site. De ce fait, ce site bénéficie d'ores et déjà de l'aide d'informaticiens de l'UPHCM.

Décision a été prise d'implanter ce site sur le serveur de l'UPHCM. Nous espérons donc qu'il sera en phase d'achèvement d'ici la fin décembre 2006.

Conclusion et perspectives

Nous avons donné dans la partie IV les principaux résultats de l'étude didactique. Ces résultats, associés aux protocoles des scénarios expérimentaux, représentent pour nous les fondements d'une formation des enseignants de mathématiques et de leurs formateurs sur le thème de l'algorithmique et de la programmation dans l'enseignement des mathématiques.

Nous avons montré :

- que les tentatives de réformes d'enseignement (qu'elles soient française ou vietnamienne) pour introduire des objets d'informatiques dans l'enseignement des mathématiques échouent car elles sous-estiment l'intensité des résistances dans les pratiques réelles des enseignants et ignorent leurs nature ;
- qu'il existe des enjeux d'enseignement mathématique favorables à l'enseignement d'objets d'algorithmique et de programmation car ces savoirs mathématiques (tabulation d'une fonction numérique par exemple) ont participé à l'émergence des objets informatiques ;
- qu'un enseignement viable d'algorithmique et de programmation ne peut s'envisager sans une genèse commune des notions de machine et de langage ;
- qu'un environnement organisé autour d'une calculatrice ordinaire rend possible une telle genèse dans les contraintes actuelles des systèmes d'enseignements des mathématiques en France et au Viêt-nam et qu'il présente l'avantage de réduire le coût technologique.

Nous faisons l'hypothèse que les résistances du système ne peuvent être dépassées que par une formation des enseignants de mathématiques et de leur formateurs qui articule l'entrée dans un processus d'enseignement de mathématiques répondant aux contraintes du système d'enseignement actuel et la réflexion sur des objets qui sont les enjeux de cet enseignement. Notre recherche peut permettre cette articulation pour l'enseignement des objets de base de l'algorithmique et de la programmation.

La création du site Internet est motivée par la volonté de rendre effective cette articulation, soit pour appuyer directement des formations d'enseignants de mathématiques, soit pour accompagner individuellement tout enseignant conscient de difficultés d'enseignement et désireux de les surmonter.

Nous avons donné dans la partie V les éléments structuraux du cahier des charges de ce site Internet.

Conçue dans le cadre d'une coopération ancienne (datant de 1989) et constamment soutenue par la région Rhône-Alpes, ce travail de recherche a provoqué de nouveaux développements :

- la tenue à l'UPHCM du premier séminaire de recherche franco-vietnamien de didactique des mathématiques à Ho Chi Minh Ville le 17 et 18 juin 2005, portant sur « Didactique, Méthodologie, et Enseignement / Apprentissage des Mathématiques »
- le soutien à la création d'une école doctorale de didactique des mathématiques à l'UPHCM

- la décision de conduire ensemble (UMHCM et UJF) en mars 2007 une école de didactique des mathématiques ouverte en particulier aux formateurs d'enseignants de mathématiques et s'appuyant en partie sur le travail de ce projet.

Bibliographie

Ada L. (1842) *Notes of « Sketch of the Analytical Engine invented by Charles Babbage »*, Bibliothèque de Genève, sur <http://www.fourmilab.ch/babbage/sketch.html>.

Artigue M. (1988) Ingénierie didactique, *RDM 9.3*. La Pensée Sauvage : Grenoble. 281-308.

Bessot A. et Nguyen C. T. (2005) Ingénierie didactique, l'exemple d'une recherche coopérative Franco-vietnamienne, in Actes du Premier Séminaire Franco-Vietnamien « *didactique, méthodologie et enseignement - apprentissage des mathématiques* », Ho Chi Minh, 17-18 juin 2005.

Birebent A. (2001) *Articulation entre la calculatrice et l'approximation décimale dans les calculs numériques de l'enseignement secondaire français – Choix des calculs trigonométriques pour une ingénierie didactique en classe de Première scientifique*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Chevallard Y. (1982) *Sur l'ingénierie didactique*, Document Interne, IREM d'Aix-Marseille.

Comiti C. (2005) Comment la didactique des mathématiques répond aux besoins des enseignants, in Actes du Premier Séminaire Franco-Vietnamien « *didactique, méthodologie et enseignement - apprentissage des mathématiques* », Ho Chi Minh, 17-18 juin 2005.

Horowitz E. et Sahni S. (1978) *Fundamentals of Computer Algorithms*, Pitman Editions.

Knuth D-E. (1968) *Algorithmes fondamentaux, l'art de la programmation d'ordinateur*, Addison-Wesley Publishing Company.

Kuntzmann J. (1957) *Formation des calculateurs – Moyens de Calcul – L'atelier arithmétique*, 2^o édition, Université de Grenoble, Année 1957 – 1958.

Lehatem S. (2004) *Algorithmique et programmation dans l'enseignement des mathématiques à l'aide de la calculatrice*, Rapport de stage de Master 1 Informatique, équipe DDM, Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier.

Lê Thi Bao T. T. (2004) *Étude sur la notion de limite de fonction dans l'enseignement des mathématiques : ingénierie didactique dans un environnement calculatrice*, Mémoire de master 2 en didactique des mathématiques, Université Pédagogique d'Ho Chi Minh, Viêt-nam.

Lê Van T. (2001) *Étude didactique des liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Viêt-nam*, Thèse en cotutelle, Université Pédagogique d'Ho Chi Minh et Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Méjias B. (1985), *Difficultés conceptuelles dans l'écriture d'algorithmes itératifs chez des élèves de collège*, Thèse en Mathématiques appliquées – option Didactique, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Nguyen C.T. (2002) *La notion d'algorithme dans l'enseignement des mathématiques au Lycée. Comment l'émergence de boucles et de variables s'articule à des connaissances mathématiques ?* Mémoire de master 2 EIAH-D, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Nguyen C.T. (2005) *Étude didactique de l'introduction d'éléments d'algorithmique et de programmation dans l'enseignement mathématique secondaire à l'aide de la calculatrice*, Thèse en cotutelle, École Normale Supérieure de Hanoi et Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Nguyen Thi N. H. (2004) *La calculatrice de poche dans l'enseignement – apprentissage des mathématiques au Viêt-nam – Le cas du système d'équations du premier degré à deux inconnues en classe de 10^e*, Mémoire de master 2 en didactique des mathématiques, Université Pédagogique d'Ho Chi Minh, Viêt-nam.

Samurçay R. (1985), Signification et fonctionnement du concept de variable informatique chez des élèves débutants, in *Educational Studies in Mathematic* N° 16-2 (pp. 143-161)

Résumé du projet de recherche MIRA 2003

Ce projet a reçu le soutien financier de la région Rhône-Alpes pour initier une recherche collaborative avec la Région d'Ho Chi Minh Ville (Viêt-nam), dans le domaine de la didactique des mathématiques. Il débouche sur la création d'un site Internet dédié à la formation des enseignants de mathématiques et de leurs formateurs. Il renforce ainsi la position de partenaire privilégié qu'a la Région Rhône-Alpes avec cette région d'un pays en voie de développement économique et technologique.

La recherche a développé des outils théoriques permettant de concevoir des actions de formation de formateurs sur les problèmes liés aux relations entre savoirs mathématiques enseignés dans le domaine du calcul sur les nombres et savoirs informatiques (boucle et variables en particulier) dans un environnement informatique centré sur la calculatrice.

À partir d'une étude comparative de deux systèmes d'enseignement (France et Viêt-nam) et d'une enquête épistémologique sur l'émergence de savoirs informatiques et de leur enseignement, cette recherche a produit 4 scénarios expérimentaux ; seul un scénario dit « central » visant frontalement l'enseignement d'objets propres à l'algorithmique et à la programmation est présenté et analysé ici.

La mise en place de ce scénario central et son analyse ont rendu nécessaires la conception et la réalisation d'une première version d'un émulateur générique d'une calculatrice, « Alpro » (sous deux options « complète » et « bridé »), transportable et installable sur PC, avec possibilité de récupération des fichiers d'enregistrements des touches actionnées (historique) et possibilité d'être installé sur Internet. Des relations avec l'entreprise CASIO au Viêt-nam ont été établies et permettent d'envisager la poursuite du développement de cet émulateur en particulier de sa configurabilité à la disposition de l'enseignant.

Le site Internet, dédié à la formation « par la recherche » des enseignants de mathématiques et de leurs formateurs, sera structuré en 5 espaces. Il articulera des espaces d'informations et de documentations à un espace basé sur les scénarios expérimentaux produits par la recherche (Ingénierie didactique).

Ce dernier espace offrira (à l'enseignant, au formateur ou au chercheur) des « zooms » sur des moments des scénarios expérimentaux considérés comme cruciaux pour l'apprentissage visé. Ces « zooms », allant de la description d'un enseignement jusqu'à une analyse fine et argumentée des données de l'observation des scénarios (vidéos, productions d'élèves), visent à éclairer l'enseignant sur l'activité des élèves et sur les décisions qu'il peut ou doit prendre dans un enseignement.

Mots clés

Didactique des mathématiques, Ingénierie didactique, Situation fondamentale, Genèse expérimentale, Calcul instrumenté par la calculatrice, Machines arithmétique / analytique / ordinateur, Algorithmique, Programmation, Langage machine, Langage évolué, Variable informatique, Mémoire effaçable, Boucle, Moments cruciaux d'un parcours d'enseignement.

Ce rapport d'activité n'a aucun caractère confidentiel. Il pourra être proposé pour publication.

Le laboratoire Leibniz est fortement pluridisciplinaire. Son activité scientifique couvre un large domaine qui comprend aussi bien des thèmes fondamentaux que des thèmes très liés aux applications, aussi bien en mathématiques qu'en informatique.

Les recherches sur les Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain et la didactique des mathématiques ouvrent cette pluridisciplinarité sur les sciences humaines, elles jouent un rôle particulier en favorisant les coopérations entre différentes composantes du laboratoire.

- * mathématiques discrètes et recherche opérationnelle
- * logique et mathématique pour l'informatique
- * informatique de la connaissance
- * EIAH et didactique des mathématiques

Les cahiers du laboratoire Leibniz ont pour vocation la diffusion des rapports de recherche, des séminaires ou des projets de publication réalisés par des membres du laboratoire. Au-delà, Les cahiers peuvent accueillir des textes de chercheurs qui ne sont pas membres du laboratoire Leibniz mais qui travaillent sur des thèmes proches et ne disposent pas de tels supports de publication. Dans ce dernier cas, les textes proposés sont l'objet d'une évaluation par deux membres du Comité de Rédaction.

Comité de rédaction : Nicolas Balacheff, Mirta Gordon, Denise Grenier, Yves Demazeau, Andras Sebo

Contact Gestion & Réalisation : Jacky Coutin
Directeur de la publication : Nicolas Balacheff
ISSN : 1298-020X - © laboratoire Leibniz