



HAL
open science

Des conditions de compatibilité pour l'équation de Navier-Stokes

Jean-Paul Caltagirone

► **To cite this version:**

Jean-Paul Caltagirone. Des conditions de compatibilité pour l'équation de Navier-Stokes. 2017. hal-01527818

HAL Id: hal-01527818

<https://hal.science/hal-01527818>

Preprint submitted on 25 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Des conditions de compatibilité pour l'équation de Navier-Stokes

Jean-Paul Caltagirone

Université de Bordeaux
Institut de Mécanique et d'Ingénierie
Département TREFLE, UMR CNRS n° 5295
16 Avenue Pey-Berland, 33607 Pessac Cedex
calta@ipb.fr

Résumé :

La contrainte associée à l'équation de Navier-Stokes, $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, est nécessaire mais non suffisante pour assurer l'incompressibilité d'un écoulement fluide. L'application de l'opérateur divergence à l'équation du mouvement fait apparaître un terme, le second invariant du tenseur gradient de vitesse, qui ne s'annule pas avec la contrainte d'incompressibilité. Cette quantité apparaît comme une condition de compatibilité à imposer au champ de vitesse pour satisfaire l'incompressibilité de l'écoulement. La prise en considération de cette condition permet de bâtir une méthode pour relever la pression sans artifice numérique de type méthodes de projections.

Mots clés :

Principe d'Equivalence, Décomposition de Hodge-Helmholtz, Conditions de compatibilité, Navier-Stokes, Mécanique Discrète, Méthodes de projection

Compatibility conditions for the Navier-Stokes equations

Abstract :

The constraint associated with the Navier-Stokes equation, $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, is necessary but not sufficient to ensure the incompressibility of a fluid flow. The application of the divergence operator to the equation of motion reveals a term, the second invariant of the velocity gradient tensor, which does not vanish with the incompressibility constraint. This quantity appears as a condition of compatibility to be imposed on the velocity field to satisfy the incompressibility of the flow. Consideration of this condition makes it possible to construct a method for upgrade the pressure without numerical artifice of the type projections methods.

Keywords :

Equivalence Principle, Hodge-Helmholtz Decomposition, Compatibility Conditions, Navier-Stokes, Discrete Mechanics, Projection Methods

1 Aspect physique de l'inertie

La notion d'inertie déjà précisée dans les écrits de G. Galilée a été formalisée par I. Newton dans ses *Principia* avec sa première loi : "Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état". La version moderne fait référence au référentiel galiléen mais la notion de force ou de somme des forces agissant sur le corps persiste.

En mécanique classique la dérivée particulaire ou matérielle de la vitesse fait apparaître, outre la dérivée en temps, le terme $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$; cette dérivée particulaire s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} + \nabla \left(\frac{\|\mathbf{V}\|^2}{2} \right) \quad (1)$$

où le dernier terme du membre de droite est bien un gradient d'une fonction scalaire et où le second terme est un produit vectoriel qui n'est pas pour autant un rotationnel d'un potentiel vectoriel. Quelle que soit la forme du terme d'inertie il convient de vérifier qu'il n'induit aucun *artefact* lorsque des opérateurs différentiels lui sont appliqués.

La forme la plus classique de l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla (\lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla^t \mathbf{V})) + \mathbf{f} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

où \mathbf{f} est une force par unité de volume, ρ est la masse volumique, μ la viscosité dynamique et λ la viscosité de compression qui est fixée par la loi de Stokes, en considérant comme nulle la viscosité de volume, soit $3\lambda + 2\mu = 0$. Cette hypothèse largement discutée [11] est maintenant remise en cause [10], [2]. Même si seul le cas des écoulements incompressibles est envisagé ici il n'est pas possible de supprimer *a priori* le terme en $\nabla \cdot \mathbf{V}$. Toutefois ce problème n'est pas crucial dans le contexte développé ici et la loi de Stokes sera adoptée.

Le second problème important est la présence de la masse volumique au premier membre de l'équation de Navier-Stokes (2). Cette quantité est une propriété physique indépendante de la variable de cette équation du mouvement et se présente comme un vrai scalaire et le produit $\mathbf{q} = \rho \mathbf{V}$ est un vrai vecteur. Cependant la présence de ρ inhibe toute possibilité d'attribuer à chaque terme du second membre un caractère vectoriel particulier (gradient, rotationnel, ...).

L'équation de Navier-Stokes est considérée depuis deux siècles comme le modèle physique incontournable de la mécanique des fluides ; sa représentativité objectivement réelle ne nécessite pas de révision impérative pour les applications courantes. Les mathématiciens en cherchent une solution exacte dans R^3 sans que la question de sa pertinence ne soit à nouveau soulevée. Sans remettre en cause sa validité il convient de revisiter les bases de la mécanique des milieux continus sur laquelle est fondée l'équation de Navier-Stokes.

Dans le cadre de cet exposé nous introduirons deux principes plus récents de la physique mais indiscutables, le Principe d'Equivalence et la décomposition de Hodge-Helmholtz.

2 Deux principes fondamentaux

2.1 Principe d'équivalence

La seconde loi de I. Newton ou principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen exprime que le produit de la masse par l'accélération d'un corps est égal à la somme des forces agissant sur lui $\mathbf{F} = m \boldsymbol{\gamma}$. Hors, depuis G. Galilée l'équivalence entre "masse grave" et "masse inerte" était connue ; il a été reformulé sous la forme du Principe d'Equivalence par A. Einstein dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte. La formulation faible de ce principe (WEP) est maintenant vérifiée avec une très grande précision (à 1 pour 10^{13} actuellement) ce qui lui confère aujourd'hui le statut de Principe.

Dès lors rien n'interdit de supprimer la masse de la formulation de la loi de la dynamique pour en faire une égalité entre accélérations. L'accélération d'un corps est égale à celle que lui imprime la gravité. Rien n'empêche de considérer non plus que les autres actions, toutes les autres actions, soient représentées comme des accélérations, qu'elles soient à distance ou de contact. Dès lors \mathbf{g} fera référence à l'ensemble de ces actions et la loi de la dynamique devient :

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{g} \quad (3)$$

Cette forme de la loi fondamentale de la dynamique se lit comme une évidence mais elle recouvre un sens précis : l'accélération d'un élément de matière est égale à la somme des accélérations imposées par différentes actions physiques. La notion de quantité de mouvement a quelques avantages dans certaines applications mais elle a le défaut de mêler une variable, la masse volumique,

et la vitesse, deux variables secondaires ; la première est une propriété physique indépendante (pour cette équation) et la seconde se présente comme une variable relative dans le cadre d'un référentiel galiléen.

2.2 Décomposition de Hodge-Helmholtz

Un autre résultat extrêmement important de la science du 19ème siècle est dû à H. Helmholtz (1867) qui exprime que tout vecteur peut se décomposer comme la somme d'un gradient d'un potentiel scalaire et d'un rotationnel d'un potentiel vecteur. La généralisation de la théorie de H. Helmholtz au 20ème siècle a été réalisée par W.V.D Hodge (1989) dans le cadre de la géométrie différentielle [8]. Comme tout vecteur l'accélération s'écrit donc comme une somme d'une composante irrotationnelle et d'une autre solénoïdale :

$$\boldsymbol{\gamma} = -\nabla\phi + \nabla_d \times \boldsymbol{\psi} \quad (4)$$

Une attention particulière doit être portée sur l'application des opérateurs à des quantités qui peuvent être des tenseurs ou des pseudo-tenseurs. L'opérateur rotationnel $\nabla_d \times$ est un rotationnel dual sinon le résultat $\nabla \times \boldsymbol{\psi}$ serait un pseudo-vecteur mais ici $\boldsymbol{\psi}$ est un pseudo-vecteur et $\nabla_d \times \boldsymbol{\psi}$ est bien un vrai vecteur. W.V.D. Hodge a complété cette décomposition par un troisième terme harmonique, à la fois à rotationnel nul et à divergence nulle. Plusieurs présentations de cette théorie sont possibles dont celle du calcul extérieur qui généralise le résultat à une dimension quelconque.

Les vecteurs de la physique n'échappent pas à la généralité de la décomposition de Hodge-Helmholtz en un champ irrotationnel et un autre solénoïdal. *A priori* il est donc possible d'écrire l'accélération (4) comme la somme de ces deux champs et de considérer deux potentiels ϕ et $\boldsymbol{\psi}$ comme ayant une signification physique discutée dans [2] ; le potentiel scalaire est directement associé aux effets directionnels longitudinaux tandis que le potentiel vectoriel est attaché aux effets transversaux. Toutes les lois de la physique actuelles ne sont pas écrites sous cette forme. En mécanique l'équation qui s'en approche le plus est celle de Navier-Lamé qui permet de calculer les déplacements dans les milieux déformables.

La forme la plus classique de l'équation de Navier-Stokes en est assez éloignée dans la mesure où elle nécessite un couplage étroit avec la conservation de la masse. Cette contrainte, avec d'autres, masquent en fait des incohérences, des inconsistances et des *artefacts* dans la formulation classique des équations de Navier-Stokes. Certaines des difficultés ont déjà été relevées dans [2] et on ne s'intéressera ici qu'au terme d'inertie introduit par l'expression de la dérivée particulière de la vitesse.

3 Des conditions pour Navier-Stokes incompressible

L'application d'un opérateur différentiel à une quantité a toujours des implications qui réduisent quelquefois l'information initialement contenue dans la quantité initiale ; ainsi la divergence d'un vecteur et de la somme de ce vecteur avec un autre vecteur constant sera la même. L'équation du mouvement fait elle-même abstraction de ces mouvements uniformes dans le cadre de l'utilisation d'un repère galiléen.

Nous allons nous intéresser ici à l'application de l'opérateur divergence à l'accélération $\boldsymbol{\gamma}$. Cette action est très peu fréquente et *a priori* inutile. Elle permet toutefois de faire disparaître le dernier terme de l'équation (4) puisqu'en continu la propriété $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{\psi}$ est vérifiée. La divergence d'un vecteur est un scalaire, un vrai scalaire indépendant de toute transformation, symétrie, rotation, etc. Appliquons dans un premier temps l'opérateur divergence à la seule accélération, on trouve :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\gamma} = \nabla \cdot \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 - 2 I_2 \quad (5)$$

où le terme I_2 est le second invariant du tenseur du second ordre $\nabla\mathbf{V}$:

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}(\nabla\mathbf{V}))^2 - \nabla\mathbf{V} : \nabla\mathbf{V} \right] = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}(\nabla\mathbf{V}))^2 - \text{tr}((\nabla\mathbf{V})^2) \right] \quad (6)$$

I_2 ne contient que des dérivées premières. Dans un système Cartésien orthogonal, on a :

$$-2 I_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (7)$$

En dimension deux on aurait :

$$-2 I_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (8)$$

Le second membre en 2D n'est qu'une partie de $-2 I_2$ associée au plan (x, y) . Ce terme (7) se présente alors comme le produit scalaire d'un certain vecteur \mathbf{I} par la normale $\mathbf{n} = t_i \times t_j$ où t_i, t_j sont les vecteurs unitaires sur chaque axe. Pour les trois plans de cet espace du système de coordonnées cartésiennes on a :

$$\mathbf{I} = \begin{cases} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (9)$$

Le terme $-2 I_2$ s'écrit aussi sous une autre forme :

$$-2 I_2 = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \cdot (t_i \times t_j) \quad (10)$$

ainsi $-2 I_2 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}$. En fait ce terme n'est pas un scalaire mais un pseudo-scalaire issu du produit mixte $I_2 = \mathbf{I} \cdot (\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2)$, c'est une quantité qui change de signe sous parité. En physique, un pseudo scalaire est une grandeur physique représentée par un nombre, qui se présente donc comme un scalaire, mais qui change de signe lorsque le système physique subit une symétrie ou une inversion polaire [4]. Comme la divergence de l'accélération est un vrai scalaire identique pour tous les observateurs, la seule possibilité que le terme I_2 soit invariant sous parité c'est qu'il soit nul. Cette condition vaut pour les trois plans du système de coordonnées Cartésiennes. Dans le cas d'une topologie plus complexe il est nécessaire de l'appliquer pour autant de plans qu'en comporte la topologie primale considérée.

Pour assurer la conformité des différents scalaires de la relation (5) dans toutes les configurations physiques il est nécessaire de fixer la condition $I_2 = 0$. La condition nécessaire et suffisante s'écrit :

$$(\nabla \cdot \mathbf{V})^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (11)$$

Pour que cela soit le cas il faut que les conditions suivantes soient satisfaites :

$$\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (12)$$

Ce résultat rejoint la condition formulée par A. Kozachok [7] qui obtient la divergence de l'accélération sous la forme :

$$\nabla \cdot \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 \quad (13)$$

Indépendamment, la condition $I_2 = 0$ a été obtenue en 2015 par J.P. Caltagirone [2] pour le terme de dissipation de l'équation de conservation de l'énergie dans le cadre de la mécanique discrète.

Les contraintes $\mathbf{I} = 0$ se présentent comme des conditions de compatibilité à satisfaire par composante. Elles sont similaires à celles permettant de définir les déplacements à partir des contraintes en mécanique des milieux continus solides. A notre connaissance seul le travail mathématique de A. Kozachok sur les équations de Navier-Stokes [7] mentionne ces conditions, la littérature scientifique en recherche ou celle relative à l'enseignement de la mécanique en sont exemptes.

Quel est la cause de cette lacune ? En fait il faut la rechercher dans les fondements de la mécanique des milieux continus et dans l'hypothèse de milieu continu elle-même. Des paradoxes, des *artefacts* et des insuffisances de l'équation de Navier-Stokes existent même si ses conséquences sont limitées. En effet les différences observées lorsque ces équations sont résolues sont faibles ; la raison est liée à la surabondance des lois constitutives associées à l'équation du mouvement ce qui permet de masquer les erreurs potentielles. D'autres *artefacts* sont plus évidents comme par exemple la valeur de la viscosité de compression $\lambda \geq -2/3 \mu$ qui peut donc prendre des valeurs négatives. En fait c'est le paradigme de milieu continu et son prolongement mathématique, la dérivation, qui introduisent ces difficultés.

3.1 Divergence de l'accélération et conséquences

La démonstration de la nécessité d'introduire des conditions de compatibilité associées à l'équation de Navier-Stokes est possible si les paramètres physiques sont constants. Dans ce dernier cas l'équation de Navier-Stokes se transforme en effet en une somme d'un gradient et d'un rotationnel similaire à l'équation de Navier-Lamé.

Considérons donc une l'équation du mouvement et appliquons l'opérateur divergence :

$$\nabla \cdot \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \nabla\phi + \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{V}) \right) = \nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (14)$$

Le vecteur \mathbf{h} est la somme d'un gradient d'un scalaire s et d'un rotationnel d'un vecteur \mathbf{v} , $\mathbf{h} = \nabla s + \nabla \times \mathbf{v}$. Introduisons cette décomposition de Hodge-Helmholtz dans l'équation (14) et comparons :

$$\frac{d}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 - 2 I_2 + \nabla^2 \phi + \nabla \cdot (\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{V})) = \nabla^2 s + \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (15)$$

La contrainte $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ permet d'éliminer les deux premiers termes de cette expression ; cette quantité doit en effet rester nulle lorsque l'on suit un élément fluide au cours de son mouvement.

La nature des termes solénoïdaux est la même ce qui permet d'identifier la fonction $\mathbf{v} = \nu \nabla \times \mathbf{V}$ comme un pseudo-vecteur et $\nabla \times \mathbf{v}$ comme un vecteur. Cette identification n'est que formelle car, dans l'équation (14), la divergence de tous les termes étant potentiellement des rotationnels est nulle d'emblée.

Les fonctions s et ϕ sont harmoniques, à la fois à divergence et à rotationnel nuls. Il reste $\nabla^2(\phi - s) = I_2$, le laplacien d'un scalaire est un scalaire mais manifestement le second invariant du tenseur $\nabla\mathbf{V}$ ne peut pas s'écrire comme une fonction harmonique d'un scalaire. La seule possibilité est de fixer la condition :

$$I_2 = 0 \quad (16)$$

Comme nous l'avons vu cette condition n'est applicable que par plans et conduit donc à autant de conditions à imposer que de plans de la topologie primale moins une. Dans un système de

coordonnées cartésiennes il sera nécessaire d'imposer une condition en 2D et deux conditions en 3D.

La condition (16) permet finalement d'écrire la divergence de l'équation du mouvement sous la forme d'une équation de Laplace munie de conditions aux limites sur le potentiel ϕ (ou p).

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \text{conditions aux limites} \end{cases} \quad (17)$$

Le problème réside dans les conditions aux limites à appliquer, elles doivent être tirées de l'équation du mouvement dont on connaît la solution \mathbf{V} que si le potentiel est aussi connu.

Le potentiel scalaire ϕ ne peut donc pas être obtenu à l'aide de la seule équation (17). La solution d'un problème d'écoulement fluide représentée par le couple (ϕ, \mathbf{V}) ou (p, \mathbf{V}) ne peut être obtenue qu'à partir de l'équation du mouvement incluant la contrainte d'incompressibilité ou par une méthode de splitting; dans ce cas une vitesse approchée ne satisfaisant pas à la contrainte d'incompressibilité est d'abord recherchée à l'aide de l'équation du mouvement et ensuite projetée sur un espace à divergence nulle. Le résultat obtenu ici et le cadre classique des méthodes de projection permettent de faire émerger une méthode originale de relèvement de la pression.

3.2 Le relèvement de la pression

En mécanique des fluides la solution d'un problème est représentée par le couple vitesse-pression (\mathbf{V}, p) ; La pression peut être obtenue simultanément avec le champ de vitesse si l'équation du mouvement le permet ou de manière différée en fonction d'une contrainte extérieure. Un grand nombre de méthodologies permet de coupler la vitesse et la pression satisfaisant la conservation de la masse dans un contexte d'écoulement incompressible ou non. Dans le cas incompressible la conservation de la masse peut servir à relever explicitement la pression, c'est le cas de la méthode de compressibilité artificielle [9] qui se présente comme une méthode itérative qui satisfait à convergence la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$. Des techniques permettent de satisfaire celle-ci implicitement, la pression étant vue comme un lagrangien; la méthode du lagrangien augmenté [5] est particulièrement efficace pour obtenir simultanément la pression et la vitesse de manière cohérente.

La mécanique discrète (21) permet de trouver un cadre physique naturel où la pression n'est plus liée, comme celles décrites précédemment, à l'équation de conservation de la masse. Si et seulement si la masse volumique varie pour une raison particulière, variations de la température, de la concentration, d'une compression, ..., alors elle sera résolue de son côté comme une variable à part entière mais celle qui peut apparaître dans l'équation du mouvement doit être considérée comme un simple paramètre. Le potentiel $\phi = p/\rho$ est relevé par le terme en $-dt c^2 \nabla \cdot \mathbf{V}$ où c est communément la célérité du son dans le milieu. Ce dernier terme introduit pour la première fois la notion d'espace-temps dans l'équation du mouvement; notamment on comprend que la physique de l'incompressibilité n'est pas seulement liée au milieu considéré mais fait intervenir la constante de temps du phénomène. Ainsi de l'eau peut être considérée comme un milieu incompressible pour les applications courantes à grandes constantes de temps mais propager des ondes à célérité finie.

Toutefois les méthodologies les plus utilisées pour imposer l'incompressibilité sont les méthodes de type prédiction-correction (SIMPLE, SIMPLER, ...) ou leurs versions plus formelles les méthodes de projection. Les méthodes de projection classiques citées par J.L. Guermond et al. [6] sont bâties sur un splitting des opérateurs discrets qui conduit à une première phase de prédiction de la solution sur \mathbf{V} à divergence non nulle suivie d'une étape de correction par projection du champ sur un espace à divergence nulle; de nombreuses variantes existent. Une

correction de pression calculée comme la solution d'une équation de Poisson à coefficients variables permet ensuite de corriger la vitesse pour la rendre à divergence nulle. Des techniques plus récentes, purement cinématiques, scalaire [3] et vectorielle [1], consistent à d'abord résoudre une équation de Poisson à coefficients constants pour obtenir le champ à divergence nulle et à calculer ensuite la pression à partir de la masse volumique. Dans tous les cas la méthodologie est purement numérique et correspond à une discrétisation temporelle et spatiale qui affecte plus ou moins la précision de ces méthodes. D'une manière ou d'une autre certains termes, notamment les termes d'inertie, sont soit négligés soit évalués à l'instant précédent.

Compte tenu des conditions de compatibilité établies plus haut $I_2 = 0$ il est possible de construire une méthode indépendante de la discrétisation spatiale. Pour cela appelons \mathbf{V}^* la prédiction, la solution de l'équation de Navier-Stokes obtenue avec une pression connue à l'instant n . Considérons ensuite l'équation de Navier-Stokes à propriétés, masse volumique et viscosité, constantes, supprimons le terme en $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V})$ et appliquons l'opérateur divergence à celle-ci ; il vient :

$$\nabla \cdot \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 - 2 I_2 = \nabla^2 \phi \quad (18)$$

avec $\phi = (p^{n+1} - p^n) / \rho$. En appliquant le résultat obtenu précédemment, $I_2 = 0$, et en discrétisant le terme temporel sur un laps de temps Δt :

$$\nabla \cdot \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) \equiv \frac{1}{\Delta t} (\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} - \nabla \cdot \mathbf{V}^*) + \mathbf{V} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1}) + (\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1})^2 = \nabla^2 \phi \quad (19)$$

La divergence de la vitesse doit être nulle à l'instant $(n+1)$ ce qui permet de conclure à l'identité :

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{V}^* \quad (20)$$

La vitesse à divergence nulle est ensuite obtenue à partir de \mathbf{V}^* et du potentiel ϕ , $\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{V}^* + \Delta t \nabla \phi$ et la pression est réactualisée avec $p^{n+1} = p^n - (\rho / \Delta t) \phi$.

Quelques remarques peuvent être formulées à propos de cette équation :

- dans le cadre strict de la formulation Navier-Stokes il est nécessaire de considérer la viscosité et la masse volumique comme des constantes ;
- le terme I_2 , second invariant du tenseur $\nabla \mathbf{V}$ doit être nul, une condition *sine qua non* pour réaliser $\nabla \cdot \mathbf{V}$;
- si les deux conditions précédentes sont satisfaites l'équation (20) n'est plus une méthode numérique de prédiction-corréction approchée mais devient une équation exacte à la discrétisation en temps près.

Cette méthode qui consiste uniquement à appliquer l'opérateur divergence à la dérivée particulière de la vitesse diffère sensiblement des méthodes numériques de prédiction-corréction et des méthodes de projection.

3.3 Solutions ou solutions exactes des équations de Navier-Stokes

Le classement des solutions de Navier-Stokes en solutions exactes, synthétiques, auto-similaires, numériques, ... n'est pas toujours simple. Par exemple une solution synthétique obtenue en cherchant des fonctions satisfaisant terme à terme aux équations de Navier-Stokes sont des solutions exactes mais est-ce pour autant des solutions à un problème physique donné ? La recherche des solutions en dimension deux et trois est un des problèmes posés dans le cadre du millénaire par l'Institut de mathématiques Clay pour montrer l'existence d'une solution régulière de ces équations en incompressible ; c'est un exercice formel très intéressant mais la validité de ces équations dans les mêmes hypothèses l'est au moins autant.

Si les conditions de compatibilité $I_2 = 0$ s'avèrent être indispensables comme le prédisent A. Kozachok [7] et J.P. Caltagirone [2] pour des termes différents alors l'équation de Navier-Stokes (2) n'est pas une forme valide et la recherche de ses solutions exactes devient d'intérêt moindre. Il existe cependant des solutions simples correspondant à des problèmes physiques d'intérêt comme par exemple l'écoulement de Couette ou celui de Poiseuille ; dans ces deux cas la condition $I_2 = 0$ est identiquement vérifiée. Il est alors possible de se fixer un critère pour discerner les solutions exactes des autres solutions mais ceci mérite encore une réflexion approfondie.

Dans le cas général de solutions obtenues à partir de méthodologies numériques la condition $I_2 = 0$ s'avère nécessaire mais il existe deux écueils :

- la forme des équations de Navier-Stokes n'est pas directement adaptée à un traitement numérique, il est nécessaire de réaliser une discrétisation en espace et en temps d'une équation établie pour un milieu continu ;
- la condition $I_2 = 0$ est difficile à réaliser dans le cas général quelle que soit la méthodologie discrète retenue. Le problème est tout aussi difficile que celui posé en mécanique du solide pour obtenir les déplacements au nombre de 3 à partir des contraintes au nombre de 6 ;

Ces difficultés ajoutées à la nécessité d'adjoindre l'équation de conservation de la masse pour redonner de la cohérence à ces équations jettent le trouble sur des concepts datant de plus de deux siècles.

4 Concept de milieu discret

La notion de milieu continu est la raison même des difficultés rencontrées dans la dérivation des équations de la mécanique, l'existence du terme I_2 dans l'expression de la divergence de l'accélération en est l'une des illustrations. Le concept de milieu discret développé depuis 2013 notamment dans [2] correspond à une vision géométrique où l'accélération du milieu sur un segment de droite Γ est égale à la somme des accélérations correspondant aux différentes actions projetées sur ce segment.

Intéressons-nous ici au seul terme d'inertie composant une partie de la dérivée particulière, $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$. Cette forme du terme d'inertie n'est pas représentable en milieu discret comme tout tenseur du second ordre. L'équation du mouvement en milieu discret ne comporte que des opérateurs différentiels simples, gradient, divergence, rotationnel primal et dual. En continu ou en discret ce terme peut être écrit sous la forme $-\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} + \nabla (\|\mathbf{V}\|^2/2)$.

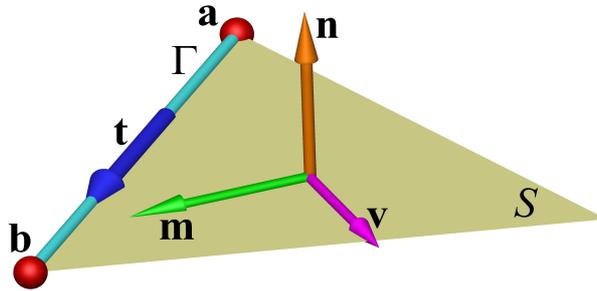


FIGURE 1. Représentation géométrique du terme d'inertie $\nabla \times \nabla \times \mathbf{V}$ sur la topologie primale du milieu discret.

Cette dernière forme du terme inertiel est particulièrement intéressante dans le contexte de la mécanique discrète, elle lui confère une vision physique immédiate. Le terme $\nabla (\|\mathbf{V}\|^2/2)$ s'écrit simplement à partir du théorème de la valeur moyenne intégrale comme une différence de $(\|\mathbf{V}\|^2/2)$ sur la distance du segment Γ . Considérons la quantité $\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$ sur la figure (1) ;

la vitesse \mathbf{V} est portée par le vecteur unitaire \mathbf{v} , le rotationnel $\nabla \times \mathbf{V}$ par le vecteur \mathbf{n} et le produit vectoriel est porté par \mathbf{m} formant ainsi un repère direct $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{m})$. Le produit vectoriel $-\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$ se projette sur le segment orienté Γ de vecteur unitaire \mathbf{t} dans le sens opposé à la projection de la vitesse ; cette composante de l'accélération inertielle se comporte comme un frein à l'accélération du milieu. Le terme $\nabla (\|\mathbf{V}\|^2/2)$ est plus simple à appréhender, cette accélération conduit à une modification de la vitesse sur le segment. Si la vitesse est plus importante en b qu'en a (figure 1) ce terme est positif. Dans le cas général les deux termes sont indépendants mais peuvent quelquefois se compenser. Comme on le voit même si les formulations de la dérivée particulière sont les mêmes en milieux continu et discret l'interprétation de celles-ci sont très différentes. La dérivation de la vitesse en milieu continu introduit le second invariant du tenseur $\nabla \mathbf{V}$, une quantité qui doit être nulle. En milieu discret la composition des opérateurs exige la conformité, notamment les règles de composition des vecteurs et des pseudo-vecteurs doivent être respectées. Le terme I_2 n'est tout simplement pas représentable en milieu discret. La dérivation complète de l'équation du mouvement [2] à partir de la loi fondamentale de la mécanique en termes d'accélération (3) conduit à :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(\frac{p^o}{\rho} - \frac{dt}{\rho \chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \right) - \nabla \times \left(\frac{\mu}{\rho} \nabla \times \mathbf{V} \right) + \mathbf{g} \\ p = p^o - \frac{dt}{\chi_T} \nabla \cdot \mathbf{V} \end{cases} \quad (21)$$

où les paramètres physiques indépendants sont ρ la masse volumique, ν la viscosité cinématique et χ_T le coefficient de compressibilité. dt est le laps de temps fixé entre deux observations du système mécanique à l'équilibre.

Cette équation du mouvement discrète (21) remplace l'équation du mouvement (2). Même si elle en possède les mêmes solutions à propriétés constantes notamment pour les solutions dites exactes les différences formelles sont nombreuses. Nous n'en citerons que quelques-unes :

- l'équation vectorielle de (21) est autonome et il n'est pas nécessaire d'y adjoindre l'équation de conservation de la masse. Le relèvement de la pression est explicite à l'aide de la divergence de la vitesse ;
- le système ne s'écrit qu'avec des opérateurs discrets, gradient, rotationnel primal, rotationnel dual et divergence et la vitesse est un vecteur mais peut être perçu comme un scalaire associé au bipoint orienté Γ ;
- l'accélération se présente comme une décomposition de Hodge-Helmholtz formelle en une somme d'une composante solénoïdale et une autre irrotationnelle ;
- l'équation du mouvement est représentative des écoulements de fluides (incompressibles, compressibles, complexes, ..), des mouvements (contraintes et déplacements) en mécanique du solide et de la propagation des ondes (linéaires ou non) dans les milieux compressibles.

Sur l'objet même de cette étude, le terme d'inertie dans l'équation du mouvement, la mécanique des milieux discrets ne fait pas apparaître le second invariant du tenseur $\nabla \mathbf{V}$; l'hypothèse avancée ici est qu'il n'existe pas, ce serait un *artefact* lié à la notion de milieu continu elle-même.

4.1 Expériences de Couette et de Poiseuille

Les solutions exactes des équations de Navier-Stokes sont aussi celles de l'équation du mouvement discrète, notamment celles qui correspondent aux écoulements monophasiques de Couette et de Poiseuille entre deux plans parallèles. Pour ceux-ci les lignes de courant sont des lignes parallèles aux parois du canal ; alors que la pression est nulle pour l'écoulement de Couette le champ de pression est linéaire dans la direction de l'écoulement pour celui de Poiseuille.

Une question de physique simple peut légitimement être posée : alors que le taux de rotation représenté par $\nabla \times \mathbf{V}$ du mouvement est non nul, pourquoi le fluide ne tourne-t-il pas ? Comme le terme $\nabla \cdot \mathbf{V}$ est identiquement nul la réponse ne peut être recherchée directement. Par contre la forme rotationnelle de l'équation (1) permet de comprendre ce paradoxe ; Par exemple pour l'écoulement de Poiseuille, comme le rotationnel est maximum sur les bords, le fluide a tendance à "rouler" sur les parois horizontales du canal ; à l'inverse le gradient de la vitesse dans la direction orthogonale de l'écoulement agit de manière à ramener le fluide vers l'axe du canal. Ces deux effets représentés par deux accélérations sont antagonistes et s'annihilent exactement et la trajectoire d'une particule est rectiligne et parallèle aux parois. Par compensation exacte de $-\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$ et de $\nabla (\|\mathbf{V}\|^2)$ les lignes de courant sont parallèles aux parois.

L'expérience de Poiseuille monophasique entre deux plans est une des plus emblématiques de la mécanique des fluides. Elle permet de comprendre les équilibres entre les différentes actions dues à l'inertie, la viscosité et la pression. En stationnaire l'équilibre est représenté par une égalité entre les forces de pression et celles dues à la viscosité, $-\nabla\phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} = 0$ avec $\phi(x) = p/\rho$ et $\boldsymbol{\psi}(y) = -\nu \nabla \times \mathbf{V}$. Comme le gradient d'une fonction de x est égal au rotationnel d'une fonction de y , les deux termes sont tous deux égaux à une constante.

Pour l'écoulement de Poiseuille instationnaire ou bien dans le cas général d'un écoulement quelconque les déséquilibres au sein de l'équation du mouvement peuvent être générés comme un gradient ou comme un rotationnel dual. Le rééquilibrage des termes de compression et de cisaillement ne peut être réalisé que par l'intermédiaire de l'accélération $\boldsymbol{\gamma}$ d'où l'importance d'une formulation complètement implicite (21) qui permet l'obtention d'un équilibre mécanique instantané.

4.2 Conclusion

La condition $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ est nécessaire mais non suffisante pour affirmer qu'un écoulement est incompressible. Il faut y adjoindre une condition supplémentaire qui impose que le second invariant du tenseur du gradient de la vitesse soit nul, $I_2 = 0$. Ce pseudo-scalaire apparaît dans deux termes associés à l'équation de Navier-Stokes, la dissipation visqueuse et la divergence de l'accélération. C'est un *artefact* introduit par la mécanique des milieux continus lors de la dérivation d'un vecteur.

La vision géométrique de la mécanique discrète ne fait pas apparaître ce terme pour la simple raison qu'il n'est pas conforme aux topologies primale et duale définissant le système physique. L'écriture de ces contraintes dans le cadre de la résolution de l'équation de Navier-Stokes s'avère assez difficile, elles doivent être imposées par plans, une en deux dimensions d'espace et deux en 3D.

Références

- [1] Ph. Angot, J-P. Caltagirone, and P. Fabrie. A kinematic vector penalty-projection method for incompressible flow with variable density. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Elsevier Masson, Ser. I*, (354) :1124–1131, 2016.
- [2] J-P. Caltagirone. *Discrete Mechanics*. ISTE, John Wiley & Sons, London, 2015.
- [3] J-P. Caltagirone and S. Vincent. A Kinematics Scalar Projection Method (KSP) for Incompressible Flows with Variable Density. *Open Journal of Fluid Dynamics*, doi : 10.4236/ojfd.2015.52019, 5 :171–182, 2015.
- [4] J. Coirier and C. Nadot-Martin. *Mécanique des Milieux Continus*. Dunod, Paris, 2007.
- [5] M. Fortin and R. Glowinski. *Méthodes de lagrangien augmenté, Application à la résolution numérique de problèmes aux limites*. Dunod, Paris, 1982.

- [6] J.L. Guermond, P. Mineev, and Jie Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :6011–6045, 2006.
- [7] A. Kozachok. Navier-Stokes first exact transformation. *Universal Journal of Applied Mathematics*, DOI : 10.13189/ujam.2013.010301, 1(3) :157–159, 2013.
- [8] A. Lemoine, J-P. Caltagirone, P. Azaiez, and S. Vincent. Discrete helmholtz-hodge decomposition on polyhedral meshes using compatible discrete operators. *Journal of Scientific Computing*, 2014.
- [9] R. Peyret and T.D. Taylor. *Computational Methods for Fluid Flow*. Springer series in Computational Physics, New-York, Heidelberg, Berlin, 1983.
- [10] K.R. Rajagopal. A new development and interpretation of the Navier-Stokes fluid which reveals why the "Stokes assumption" is inapt. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 50 :141–151, 2013.
- [11] L. Rosenhead. A discussion on the first and second viscosities of fluids. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A : Mathematical and Physical Sciences*, 226 :1–69, 1954.