



**HAL**  
open science

# La dominance régionale et son imprécision : traitement dans le type général de structure

Louis de Mesnard

## ► To cite this version:

Louis de Mesnard. La dominance régionale et son imprécision : traitement dans le type général de structure. [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1978, 27 p., figures, bibliographie. <hal-01527444>

**HAL Id: hal-01527444**

**<https://hal.science/hal-01527444v1>**

Submitted on 24 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

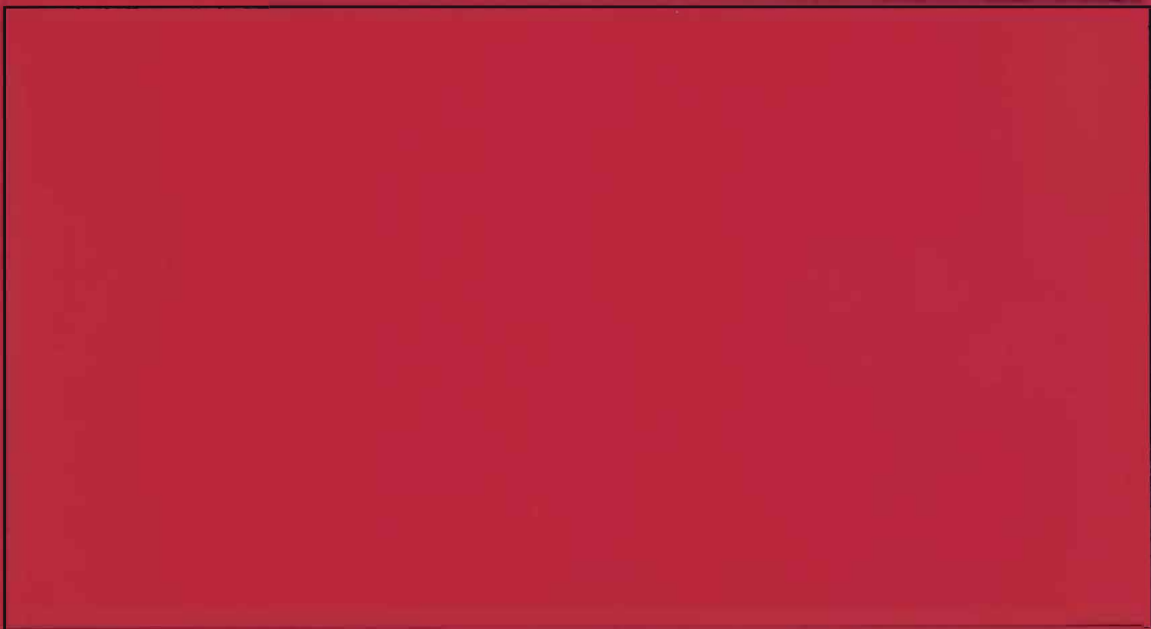


HAL Authorization

# I.M.E.

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU C.N.R.S.

DOCUMENT DE TRAVAIL



**INSTITUT DE MATHEMATIQUES ECONOMIQUES**

UNIVERSITE DE DIJON

FACULTE DE SCIENCE ECONOMIQUE ET DE GESTION

4, BOULEVARD GABRIEL — 21000 DIJON

N° 32

LA DOMINANCE REGIONALE ET SON IMPRECISION  
TRAITEMENT DANS LE TYPE GENERAL DE STRUCTURE

Louis de MESNARD

Juin 1978

Le but de cette Collection est de diffuser rapidement une première version de travaux afin de provoquer des discussions scientifiques. Les lecteurs désirant entrer en rapport avec un auteur sont priés d'écrire à l'adresse suivante :

INSTITUT DE MATHEMATIQUES ECONOMIQUES  
4, boulevard Gabriel - 21000 DIJON - France

## TRAVAUX DEJA PUBLIES

- N°1 Michel PREVOT: Théorème du point fixe. Une étude topologique générale(juin 1974)
- N°2 Daniel LEBLANC: L'introduction des consommations intermédiaires dans le modèle de LEFEBER (juin 1974)
- N°3 Colette BOUNON: Spatial Equilibrium of the Sector in Quasi-Perfect Competition (september 1974)
- N°4 Claude PONSARD: L'imprécision et son traitement en analyse économique (septembre 1974)
- N°5 Claude PONSARD: Economie urbaine et espaces métriques (septembre 1974)
- N°6 Michel PREVOT: Convexité (mars 1975)
- N°7 Claude PONSARD: Contribution à une théorie des espaces économiques imprécis (avril 1975)
- N°8 Aimé VOGT: Analyse factorielle en composantes principales d'un caractère de dimension - n (juin 1975)
- N°9 Jacques THISSE et Jacky PERREUR: Relation between the Point of Maximum Profit and the Point of Minimum Total Transportation Cost: A Restatement (juillet 1975)
- N°10 Bernard FUSTIER: L'attraction des points de vente dans des espaces précis et imprécis (juillet 1975)
- N°11 Régis DELOCHE: Théorie des sous-ensembles flous et classification en analyse économique spatiale (juillet 1975)
- N°12 Gérard LASSIBILLE et Catherine PARRON: Analyse multicritère dans un contexte imprécis (juillet 1975)
- N°13 Claude PONSARD: On the Axiomatisation of Fuzzy Subsets Theory (july 1975)
- N°14 Michel PREVOT: Probability Calculation and Fuzzy Subsets Theory (August 1975)
- N°15 Claude PONSARD: Hiérarchie des places centrales et graphes flous (avril 1976)
- N°16 Jean-Pierre AURAY et Gérard DURU: Introduction à la théorie des espaces multiflous (avril 1976)
- N°17 Roland LANTNER, Bernard PETITJEAN, Marie-Claude PICHERY: Jeu de simulation du circuit économique (Août 1976)
- N°18 Claude PONSARD: Esquisse de simulation d'une économie régionale: l'apport de la théorie des systèmes flous (septembre 1976)
- N°19 Marie-Claude PICHERY: Les systèmes complets de fonctions de demande (avril 1977)
- N°20 Gérard LASSIBILLE et Alain MINGAT: L'estimation de modèles à variable dépendante dichotomique. La sélection universitaire et la réussite en première année d'économie (avril 1977)

- N°21 Claude PONSARD: La région en analyse spatiale (mai 1977)
- N°22 Dan RALESCU: Abstract Models for Systems Identification (juin 1977)
- N°23 Jean MARCHAL et François POULON: Multiplicateur, graphes et chaînes de Markov (décembre 1977)
- N°24 Pietro BALESTRA: Déterminant and Inverse of a Sum of Matrices with Applications in Economics and Statistics (avril 1978)
- N°25 Bernard FUSTIER: Etude empirique sur la notion de région homogène (avril 1978)
- N°26 Claude PONSARD: On the Imprecision of Consumer's Spatial Preferences (avril 1978)
- N°27 Roland LANTNER: L'apport de la théorie des graphes aux représentations de l'espace économique (avril 1978)
- N°28 Emmanuel JOLLES: La théorie des sous-ensembles flous au service de la décision: deux exemples d'application.(mai 1978)
- N°29 Michel PREVOT: Algorithme pour la résolution des systèmes flous (mai 1978)
- N°30 Bernard FUSTIER: Contribution à l'analyse spatiale de l'attraction imprécise (juin 1978)
- N°31 TRAN QUI Phuoc: Régionalisation de l'économie française par une méthode de taxinomie numérique floue (juin 1978)

## SOMMAIRE

Pages

. Introduction	1
. 1. Influence et dominance dans un contexte précis.	2
1.1. L'influence dans un contexte précis	2
1.1.1. L'influence entre régions dans une structure décontractée.	3
1.1.2. L'influence entre régions dans une structure réduite.	6
1.2. Dominance bipolaire dans un contexte précis.	8
1.2.1. Dominance dans une structure réduite	9
1.2.2. Dominance dans une structure décontractée.	10
. 2. Influence et dominance bipolaire dans un contexte imprécis.	11
2.1. Influence et dominance bipolaire imprécises dans une structure réduite.	11
2.1.1. Influence	11
2.1.1. Dominance	12
2.1.2.1. Le principe	12
2.1.2.2. Procédure pratique pour la comparaison des sous-ensembles flous.	14
2.1.2.3. Réflexions sur la méthode	17
2.2. Influence et dominance bipolaire imprécises dans une structure décontractée	18
2.2.1. Influence	19
2.2.2. Dominance	21
. Conclusion	23
. Annexe	24

## INTRODUCTION.

Les notions d'influence et de dominance ont pour champ d'existence les structures d'échange, pas nécessairement économiques. Elles visent à mettre en évidence, par delà l'interdépendance, les relations de dépendance existant entre les éléments d'une structure. En économie, leur intérêt est essentiellement d'être un instrument pour le décideur. Elles lui permettent d'orienter la Politique Economique qu'il doit mener (relance, planification, restructuration, etc...) grâce à la détection des sous-ensembles "stratégiques" de la structure .

Au départ, la théorie s'est essentiellement intéressée au Tableau d'Entrées-Sorties (l'ancien Tableau d'Echanges Interindustriel) comme structure et a considéré les relations entre les branches industrielles. C'est dans ce cadre qu'ont été définies les principales propriétés des structures d'échange et les notions d'influence et de dominance (cf (3), (8)).

Une prise en compte de l'espace apparaît comme très importante pour la politique économique puisqu'elle permet d'en moduler l'application en fonction des spécificités locales (cf (11), (12), (14), (20)). C'est ce qui nous avait conduit à nous intéresser aux problèmes que pose la régionalisation des notions d'influence et de dominance (cf (10)).

Nous en avons conclu qu'introduire l'espace impliquait des difficultés nouvelles. L'analyse ne porte plus alors sur le T. E. S. mais sur un tableau d'Echange Interindustriel Interrégional complet.

C'est dans ce cadre que nous essaierons dans le présent document de définir ce que l'on peut entendre par influence et dominance régionales.

Dans une première partie, nous définirons ces deux concepts dans l'optique usuelle (contexte précis). Toutefois, nous distinguerons les deux cas de la structure décontractée et réduite qui conduisent à des résultats bien différents. Dans une seconde partie, nous critiquerons la méthode précédente pour proposer une approche qui tienne compte du caractère complexe des phénomènes régionaux. Cette complexité doit naturellement conduire à des résultats non tranchés : c'est pourquoi l'utilisation du flou sera proposée dans les deux cas de structure (cf (5), (18)).

# 1 - Influence et dominance dans un contexte précis.

## 1.1 - L'influence dans un contexte précis :

Le cadre d'étude est la région, notée  $r, s, \dots$ . A l'intérieur de chaque région se trouvent des branches industrielles notées  $a, b, \dots$ . Le couple région-branche est appelé sous-région, notée  $r_a$ .

Appelons :

- .  $X_{r_a}$  la production (en valeur) de la sous-région  $r_a$ .
- .  $X_r$  la production (en valeur) de la région  $r$

Remarquons que l'on a :  $\sum_a X_{r_a} = X_r \quad \forall r$

.  $x_{s_b r_a}$  la quantité (en valeur) de bien  $b$  (input) vendue par  $s_b$  à  $r_a$  en vue de la production du bien  $a$  par  $r_a$ .

Définition.

L'influence relative d'une sous-région  $r_a$  sur une autre,  $s_b$ , est la variation relative de la production de  $s_b$  issue d'une variation relative unitaire de la production de  $r_a$  :

$$\frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}} \longrightarrow \frac{\Delta X_{s_b}}{X_{s_b}} = \alpha_{s_b r_a} \cdot \frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}$$

où  $\alpha_{s_b r_a}$  = coefficient de débouché de  $s_b$  vers  $r_a$   $\frac{x_{s_b r_a}}{X_{s_b}}$

soit  $\frac{\frac{\Delta X_{s_b}}{X_{s_b}}}{\frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}} = i_{r_a \rightarrow s_b} = \alpha_{s_b r_a}$  et  $0 \leq i_{r_a \rightarrow s_b} \leq 1$   
 $\forall r, \forall s, \forall a, \forall b$

Rappelons que cette influence est issue de l'achat d'input  $b$  par  $r_a$ , input produit par  $s_b$  et nécessaire à  $r_a$  pour accroître sa production (la structure de ces achats étant donné par le tableau d'échange interindustriel interrégional, de terme générique  $x_{s_b r_a}$ ).

1.1.1. - L'influence entre régions dans une structure décontractée.

L'influence entre régions doit se définir de la même manière que l'influence entre sous-régions afin de conserver une cohérence logique à la définition.

$$\begin{aligned} \bullet i_{r_a \rightarrow s} &= \frac{\frac{\Delta X_s}{X_s}}{\frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}} = \frac{\frac{\sum_b \Delta X_{s_b}}{X_s}}{\frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}} = \frac{\sum_b \frac{X_{s_b}}{X_s} \frac{\Delta X_{s_b}}{X_{s_b}}}{\frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}} \\ &= \sum_b \frac{X_{s_b}}{X_s} i_{r_a \rightarrow s_b} \end{aligned}$$

$$\bullet i_{r \rightarrow s_b} = \frac{\frac{\Delta X_{s_b}}{X_{s_b}}}{\frac{\Delta X_r}{X_r}} = \frac{\sum_a \left( \frac{\Delta X_{s_b}}{X_{s_b}} \right)_a}{\sum_a \frac{X_{r_a}}{X_r} \frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}} = \frac{\sum_a i_{r_a \rightarrow s_b} \frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}}{\sum_a \frac{X_{r_a}}{X_r} \frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}}$$

Donc  $i_{r \rightarrow s_b}$  n'est pas fixe car dépend des  $\frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}$ . Toutefois, on peut montrer que  $i_{r \rightarrow s_b}$  prend une valeur maximale et une valeur minimale.

Théorème.

Dans une structure décontractée, l'influence relative émise par une région, admet une borne supérieure et une borne inférieure qui ne dépendent que des caractéristiques des sommets considérés.

Soit les sommets  $r_a, r_b, \dots, r_n$ . L'influence émise par la région  $r$ ,  $i_{r \rightarrow s_b}$  admet pour borne supérieure et inférieure, respectivement :

$$\bullet \checkmark_{r \rightarrow s_b} = \text{Max}_a \frac{i_{r_a \rightarrow s_b}}{\frac{X_{r_a}}{X_r}}$$

$$\bullet \hat{\cdot}_{r \rightarrow s_b} = \text{Min}_a \frac{i_{r_a \rightarrow s_b}}{\frac{X_{r_a}}{X_r}}$$

Démonstration.

$i_{r \rightarrow s_b}$  peut s'écrire :

$$i_{r \rightarrow s_b} = \sum_a i_{r_a \rightarrow s_b} \frac{\frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}}{\sum_a \frac{X_{r_a}}{X_r} \frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}} = \sum_a \frac{i_{r_a \rightarrow s_b}}{\frac{X_{r_a}}{X_r}} \frac{\frac{X_{r_a}}{X_r} \frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}}{\sum_a \frac{X_{r_a}}{X_r} \frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}}$$

Posons :

$$\lambda_{r_a} = \frac{\frac{X_{r_a}}{X_r} \frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}}{\sum_a \frac{X_{r_a}}{X_r} \frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}}$$

On a donc :

$$i_{r_a \rightarrow s_b} = \sum_a \frac{i_{r_a \rightarrow s_b}}{\frac{X_{r_a}}{X_r}} \lambda_{r_a} \quad \text{avec} \quad \sum_a \lambda_{r_a} = 1$$

$\lambda_{r_a}$  s'interprète comme la contribution de  $r_a$  à l'impulsion émise par  $r$ .  
Celle-ci est donc une combinaison linéaire.

Or, l'on sait qu'une combinaison linéaire d'éléments quelconques prend une valeur maximale quand le poids correspondant à l'élément le plus grand vaut 1 (et tous les autres poids valent 0). De même, la combinaison linéaire prend sa valeur minimale si l'élément le plus petit est affecté du poids 1. Donc :

$$i_{r \rightarrow s_b} \text{ Max} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists a^y / \lambda_{r_a^y} = 1 \text{ et } \lambda_{r_c} = 0 \quad \forall c \neq a^y \\ \text{avec } \frac{i_{r_a^y \rightarrow s_b}}{X_{r_a^y}/X_r} = \text{Max}_c \frac{i_{r_c \rightarrow s_b}}{X_{r_c}/X_r} \end{array} \right\}$$

et alors

$$\lambda_{r \rightarrow s_b}^y = \frac{i_{r_a^y \rightarrow s_b}}{\frac{X_{r_a^y}}{X_r}}$$

De même :

$$i_{r \rightarrow s_b} \text{ Min} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \hat{a} / \lambda_{r_{\hat{a}}} = 1 \text{ et } \lambda_{r_c} = 0 \quad \forall c \neq \hat{a} \\ \text{avec } \frac{i_{r_{\hat{a}} \rightarrow s_b}}{X_{r_{\hat{a}}}/X_r} = \text{Min}_c \frac{i_{r_c \rightarrow s_b}}{X_{r_c}/X_r} \end{array} \right\}$$

$$\text{et alors } \hat{i}_{r \rightarrow s_b} = \frac{i_{r_{\hat{a}} \rightarrow s_b}}{X_{r_{\hat{a}}}/X_r}$$

Remarque. 1

Le théorème reste valable pour des regroupements en branche et non plus en régions. L'interprétation de ce théorème est simple : l'influence émise par la région  $r$  émet l'influence la plus forte (respectivement la plus faible) lorsque le pôle de cette région,  $r_{\hat{a}}$  (respectivement  $r_c$ ) qui présente le rapport :

$$\frac{i_{r_c \rightarrow s_b}}{X_{r_c}/X_r}$$

le plus fort (respectivement le plus faible) émet seul l'impulsion. En effet :

$$\begin{aligned} \lambda_{r_a} = 1 &\Leftrightarrow \frac{\frac{X_{r_a}}{X_r} \frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}}{\sum_a \frac{X_{r_a}}{X_r} \frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}}} = 1 \Leftrightarrow \frac{X_{r_a}}{X_r} \frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}} = \sum_a \frac{X_{r_a}}{X_r} \frac{\Delta X_{r_a}}{X_{r_a}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\Delta X_{r_c}}{X_{r_c}} = 0 \quad \forall c \neq a \end{aligned}$$

Remarquons que  $\hat{Y}_{r \rightarrow s_b}$  peut être supérieure à 1, donc  $i_{r \rightarrow s_b}$  aussi.

Remarque. 2

Le théorème reste valable même lorsque l'on raisonne sur des influences absolues et non relatives : on montrerait de même que l'influence absolue prend bien une valeur minima et une valeur maxima, différentes évidemment de celles de l'influence relative (cf annexe).

L'influence d'une région  $r$  sur une région  $s$  prend elle aussi une valeur max et une valeur min :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \check{Y}_{r \rightarrow s} &= \text{Max}_a \frac{i_{r_a \rightarrow s}}{X_{r_a} / X_r} = \text{Max}_a \frac{\sum_b \frac{X_{s_b}}{X_s} i_{r_a \rightarrow s_b}}{X_{r_a} / X_r} \\ &= \sum_b \frac{X_{s_b}}{X_s} \text{Max}_a \left\{ \frac{X_r}{X_{r_a}} i_{r_a \rightarrow s_b} \right\} \\ \bullet \quad \hat{i}_{r \rightarrow s} &= \sum_b \frac{X_{s_b}}{X_s} \text{Max}_a \left\{ \frac{X_r}{X_{r_a}} i_{r_a \rightarrow s_b} \right\} \end{aligned}$$

On peut donc représenter l'influence de  $r$  sur  $s$  sous la forme d'un intervalle fermé :

$$i_{r \rightarrow s} = \left[ \hat{i}_{r \rightarrow s}, \check{Y}_{r \rightarrow s} \right]$$

L'influence réalisée  $i_{r \rightarrow s}^*$  pouvant prendre n'importe quelle valeur de l'intervalle :

$$i_{r \rightarrow s}^* \in \left[ \hat{i}_{r \rightarrow s}, \check{Y}_{r \rightarrow s} \right]$$

### 1.1.2 - L'influence entre régions dans une structure réduite.

La structure est réduite en régions, c'est-à-dire que les biens n'y ont plus d'individualité propre. Si on note  $B$  l'ensemble des biens et  $R$  l'ensemble des régions, la structure de départ  $(B \times R) \times (B \times R)$  se comporte une fois réduite en régions comme  $R \times R$ .

Donnons en une définition rigoureuse.

Structure pseudo-réduite.

On appelle structure pseudo-réduite d'une structure décontractée, une structure où les influences relatives issues d'une région sont toutes égales au coefficient de débouché de cette région prise dans son ensemble.

ex : soit  $r_a, r_b, \dots, r_n \in R \times B$

on les regroupe dans  $r \in R$ . Soit  $\alpha_{s_b r_a}$  le coefficient de débouché de  $s_b$

vers  $r_a$ , pour l'écoulement du bien  $b$ . On a, si la structure est pseudo-réduite :

$$i_{r \rightarrow s_b} = \alpha_{s_b r}$$

où  $\alpha_{s_b r}$  est le coefficient de débouché de  $s_b$  vers l'ensemble  $r$ .

Théorème.

Si la structure est pseudo-réduite, les influences émises sont additives.

En effet, reprenons la notation précédente :

$$\begin{aligned} i_{r \rightarrow s_b} = \alpha_{s_b r} &= \frac{x_{s_b r}}{X_{s_b}} = \sum_a \frac{x_{s_b r_a}}{X_{s_b}} \\ &= \sum_a \alpha_{s_b r_a} = \sum_a i_{r_a \rightarrow s_b} \end{aligned}$$

On voit donc l'intérêt de la pseudo-réduction : les influences émises peuvent être calculées. Nous avons vu que dans le cas de la structure décontractée, les influences émises ne sont pas fixes et donc ne peuvent être connues.

Remarquons que, en dehors de toute réduction, les influences reçues sont additives :

$$i_{r_a \rightarrow s} = \frac{\Delta X_s / X_s}{\Delta X_{r_a} / X_{r_a}} = \sum_b \frac{X_{s_b}}{X_s} i_{r_a \rightarrow s_b}$$

d'après la démonstration énoncée pour le cas de la structure décontractée (qui reste valable en cas de réduction).

On peut accessoirement définir une structure totalement réduite :

On appelle structure totalement réduite une structure pseudo-réduite où les sommets d'une région sont remplacés par un seul.

ex :  $r_a, r_b, \dots, r_n$  sont remplacés par  $r$ . Il s'agit donc du cas où il n'y a plus de branches : seul  $R \times R$  est pris en considération. Le T. E. I.

$B \times B$  est aussi une structure totalement réduite, mais en branches.

L'influence d'une région sur une autre s'écrit finalement :

$$i_{r \rightarrow s} = \sum_a \sum_b \frac{X_{s_b}}{X_s} i_{r_a \rightarrow s_b}$$

### 1.2 - Dominance bipolaire dans un contexte précis :

Nous aborderons d'abord la dominance dans une structure réduite car elle est plus simple d'approche puis nous passerons à la dominance dans une structure décontractée. Mais d'abord définissons la dominance bipolaire d'une manière générale.

#### - Dominance entre sous-régions.

A partir de l'influence, nous pouvons définir la dominance :

Définition.

Une sous région  $r_a$  domine une autre sous-région  $s_b$  si l'influence qu'elle exerce est supérieure à l'influence qu'elle reçoit.

$$r_a \text{ domine } s_b \iff i_{r_a \rightarrow s_b} > i_{s_b \rightarrow r_a}$$

Il s'agit de ce que l'on appelle la dominance bipolaire (cf (3), (7)).

Afin de nuancer cette définition, on peut définir un indicateur de dominance : (cf (10)).

$$d_{r_a \rightarrow s_b} = i_{r_a \rightarrow s_b} - i_{s_b \rightarrow r_a}$$

$$\text{On a : } -1 \leq d_{r_a \rightarrow s_b} \leq 1 ; 0 \leq i_{r_a \rightarrow s_b} \leq 1$$

$$\cdot d_{r_a \rightarrow s_b} > 0 \iff r_a \text{ domine } s_b \text{ au niveau } d_{r_a \rightarrow s_b}$$

$$\cdot d_{r_a \rightarrow s_b} < 0 \iff s_b \text{ domine } r_a \text{ au niveau } d_{s_b \rightarrow r_a} = -d_{r_a \rightarrow s_b}$$

$$\cdot d_{r_a \rightarrow s_b} = 0 \iff r_a \text{ et } s_b \text{ ne se dominent pas}$$

#### - Dominance d'une région sur une autre.

La mesure de la dominance entre régions doit logiquement être identique à la mesure de la dominance entre sous-régions.

En effet, si l'on réduit totalement la structure, l'on passe de régions composées de plusieurs sous-régions, c'est-à-dire branches, à des régions composées d'une seule branche. L'indice de dominance défini dans le premier cas doit donc nécessairement être identique à l'indice défini dans le deuxième cas. S'il ne l'était pas, il y aurait rupture logique entre les deux cas.

Il faut donc, pour évaluer la dominance entre deux régions, nécessairement comparer les influences émises et échangées par ces régions. On retient donc pour l'indice de dominance entre régions la même forme que pour celui concernant des sous-régions :

$$d_{r \rightarrow s} = i_{r \rightarrow s} - i_{s \rightarrow r}$$

Nous pouvons alors étudier les modalités d'application de l'indice dans le cas de structures réduites puis décontractées.

#### 1.2.1. - Dominance dans une structure réduite.

Elle se déduit très simplement de la forme de l'influence dans une telle structure.

$$d_{r \rightarrow s} = \sum_a \sum_b \frac{X_{s_b}}{X_s} i_{r_a \rightarrow s_b} - \sum_a \sum_b \frac{X_{r_a}}{X_r} i_{s_b \rightarrow r_a}$$

Remarque.

Nous pouvons ici nous attarder un moment sur l'indice de dominance entre régions que nous avons proposé dans un précédent travail (voir 10)). Précisons immédiatement que celui-ci ne concernait que le cas de la structure réduite. Nous avons proposé d'évaluer la dominance entre régions par une combinaison linéaire des dominance entre sous-régions, soit :

$$\begin{aligned} d'_{r_a \rightarrow s} &= \sum_b \frac{X_{s_b}}{X_s} d_{r_a \rightarrow s_b} \\ d'_{r \rightarrow s_b} &= \sum_a \frac{X_{r_a}}{X_r} d_{r_a \rightarrow s_b} \\ \text{d'où } d'_{r \rightarrow s} &= \sum_a \sum_b \frac{X_{s_b}}{X_s} \frac{X_{r_a}}{X_r} d_{r_a \rightarrow s_b} \end{aligned}$$

Nous pensons que cette approche doit en fait être rejetée pour deux raisons :

- l'indice retenu pour la dominance entre régions n'est pas identique à celui concernant la dominance entre sous-régions : il y a rupture logique. Cet indice est d'ailleurs incompatible avec l'indice proposé car, par exemple :

$$d'_{r_a \rightarrow s} = \sum_b \frac{X_{s_b}}{X_s} (i_{r_a \rightarrow s_b} - i_{s_b \rightarrow r_a}) = \sum_b \frac{X_{s_b}}{X_s} i_{r_a \rightarrow s_b} - \sum_b \frac{X_{s_b}}{X_s} i_{s_b \rightarrow r_a}$$

mais :

$$d_{r_a \rightarrow s} = i_{r_a \rightarrow s} - i_{s \rightarrow r_a} = \sum_b \frac{X_{s_b}}{X_s} i_{r_a \rightarrow s_b} - \sum_b i_{s_b \rightarrow r_a}$$

Les deux indices sont bien incompatibles, le premier pondérant l'influence en retour d'une manière non justifiée mathématiquement.

- Si l'agrégation ne se justifie pas mathématiquement, il faut au moins qu'elle se justifie économiquement. Or, le critère d'agrégation des dominances partielles qui a été retenu dans l'indice d' est la quantité produite. D'autres critères tout aussi significatifs seraient pourtant envisageables : l'effectif, la valeur ajoutée, etc... Finalement une telle agrégation vise à apprécier au niveau régional l'impact des dominances partielles. d' est donc un indice plus subjectif qu'objectif. Alors que pour d, seul l'usage de la quantité produite se justifie.

### 1.2.2. - Dominance dans une structure décontractée.

La dominance de r sur s se déduit de la comparaison de  $i_{r \rightarrow s}$  et de  $i_{s \rightarrow r}$ . On compare donc des intervalles. Pour cela, nous utilisons la relation d'ordre proposée par C. PONSARD (cf (15)) :

$$i_{s \rightarrow r} \preceq i_{r \rightarrow s} \iff \begin{cases} \hat{Y}_{s \rightarrow r} < \hat{Y}_{r \rightarrow s} \\ \text{ou } \hat{I}_{s \rightarrow r} \leq \hat{I}_{r \rightarrow s} \text{ et } \hat{Y}_{s \rightarrow r} = \hat{Y}_{r \rightarrow s} \end{cases}$$

où  $\preceq$  est la relation d'ordre total usuelle sur  $\mathbb{R}$ . L'avantage de cette définition sur celle de R. SAMBUC (cf (19)) est que l'ordre obtenu est total. Trois cas seulement de dominance vont ainsi apparaître.

$$r \text{ domine } s \iff i_{s \rightarrow r} < i_{r \rightarrow s}$$

$$s \text{ domine } r \iff i_{r \rightarrow s} < i_{s \rightarrow r}$$

$$r \text{ et } s \text{ ne se } \iff i_{r \rightarrow s} \sim i_{s \rightarrow r} \\ \text{dominent pas}$$

## 2 - Influence et dominance dans un contexte imprécis.

### 2.1 - Influence et dominance bipolaire imprécises dans une structure réduite.

On peut critiquer la dominance précise. En effet, elle ne rend pas compte de la façon dont s'opère la dominance puisqu'elle agrège les influences qui s'écoulent par le canal de chaque bien en une seule quantité. Nous reprenons ici l'idée de Bernard FUSTIER (cf (1),(2)) selon laquelle il s'avère possible de traiter l'imprécision en refusant l'agrégation de coefficients précis dans une structure mathématique pondérée. Cette idée sera développée dans un travail commun ultérieur.

#### 2.1.1. Influence.

Nous définissons donc l'influence d'une sous-région  $r_a$  sur une région,  $s$ , par l'ensemble des couples

$$\left( i_{r_a \rightarrow s_b} ; \frac{X_{s_b}}{X_s} \right) \quad \forall a, \forall b$$

Le caractère multiforme de l'influence est alors concerné. On peut alors représenter l'influence de  $r$  sur  $s$  par un sous-ensemble flou. Soit donc  $t \in \underline{I}$ , la valeur de  $i_{r_a \rightarrow s_b}$ . On considère que chaque influence de  $r$  sur  $s$  est un sous-ensemble flou  $A_{r_a \rightarrow s}$ .

$$A_{r_a \rightarrow s} = \left\{ \left( t, \mu_{A_{r_a \rightarrow s}}(t) \right) ; t \in \underline{I} \right\}$$

où  $\mu_{A_{r_a \rightarrow s}}(t)$  représente le degré d'appartenance du taux  $t$  au sous-ensemble  $A_{r_a \rightarrow s}$ . On pose :

$$\mu_{A_{r_a \rightarrow s}}(t) = \frac{X_{s_b}}{X_s} \iff t = i_{r_a \rightarrow s_b}$$

$\underline{I} \subset [0,1]$  est l'ensemble des valeurs de  $t$  ordonnées suivant les valeurs croissantes de  $t$ .

L'influence de l'ensemble de la région r sur la région s est la réunion des sous-ensembles flous  $A_{r_a \rightarrow s}$ . En effet, on sait que dans la mathématique du flou, l'opérateur "Réunion" remplace en général l'addition. Mais surtout on conçoit bien que c'est l'influence la plus forte qui va agir et non la plus faible. L'influence d'une région sur une autre apparaît donc elle-même comme un sous-ensemble flou :

$$A_{r \rightarrow s} = \left\{ (t, \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t)); t \in T \right\}$$

$$\text{avec } A_{r \rightarrow s} = \bigcup_a A_{r_a \rightarrow s}$$

Mais ici, la définition de la réunion est différente de la réunion habituelle des sous-ensembles flous (cf (6), (19)). On pose en effet :

$$\bigcup_a A_{r_a \rightarrow s} = \bigcup_a \left\{ (t_a, \mu_{A_{r_a \rightarrow s}}(t_a)) \right\} = \left\{ (t, \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t)) \right\}$$

$$\text{avec } t = \bigvee_a t_a / \mu_{A_{r_a \rightarrow s}}(t_a) = \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t) \quad \forall a$$

Cette définition de la réunion est imposée par le fait que pour un même niveau des fonctions d'appartenance,  $X_{s_b}/X_s$  par exemple, correspondent n valeurs  $t_a = i_{r_a} \quad s_b, t_b = i_{r_b} \quad s_b, t_c, \dots, t_n$

### 2.1.2 - La dominance.

#### 2.1.2.1 - Le principe.

On peut former le tableau :

A	t	
A		0..... t..... 1
$A_{r \rightarrow s}$		..... $A_{r \rightarrow s}(t)$ .....
$A_{s \rightarrow r}$		..... $A_{s \rightarrow r}(t)$ .....

Remarquons que le fait d'ordonner les valeurs de n'est pas nécessaire mais rend l'analyse plus commode.

On appelle  $\underline{I}^*$  l'ensemble des valeurs effectivement prises par  $t$ .  
La dominance imprécise de  $r$  sur  $s$  se déduit alors de la comparaison des deux sous-ensembles flous :

$$A_{r \rightarrow s} \text{ et } A_{s \rightarrow r}$$

On pose :

si  $\exists t / \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t) > \mu_{A_{s \rightarrow r}}(t)$ , alors  $A_{r \rightarrow s} \succ A_{s \rightarrow r}$

pour le taux  $t$ . Donc on va comparer pour chaque valeur du taux  $t$  les fonctions d'appartenance  $\mu$ .

La dominance imprécise de  $r$  sur  $s$  est alors le sous-ensemble flou:

$$D_{r \rightarrow s} = \left\{ (t, \mu_{D_{r \rightarrow s}}(t)) ; t \in \underline{I}^* \right\}$$

où  $\mu_{D_{r \rightarrow s}}(t) = 0$  si  $r$  ne domine pas  $s$  pour ce taux  $t$ , c'est-à-dire si  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}(t) \leq \mu_{A_{s \rightarrow r}}(t)$ .

L'information contenue dans cette présentation de la dominance est donc beaucoup plus riche car l'on peut avoir trois cas :

$$\bullet \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t) > \mu_{A_{s \rightarrow r}}(t) \quad \forall t \in \underline{I}^*$$

alors  $r$  domine  $s$  complètement.

$$\bullet \mu_{A_{s \rightarrow r}}(t) > \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t) \quad \forall t \in \underline{I}^*$$

c'est le cas contraire

$$\bullet \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t) \begin{matrix} > \\ \text{ou} \\ < \end{matrix} \mu_{A_{s \rightarrow r}}(t)$$

pour certains  $t$  seulement. C'est le cas le plus courant qui n'était pas pris en compte dans le non flou. La dominance apparaît mitigée, indécise, contrariée parfois, ce qui correspond bien à l'idée que l'on s'en fait, puisque dans ce cas elle n'est pas tranchée et nette.

$$\bullet \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t) = \mu_{A_{s \rightarrow r}}(t)$$

pour tous ou certains  $t \in \underline{I}^*$ :  $r$  et  $s$  ne se dominant pas pour tous ou certains  $t$ .

Un problème pratique va se poser dans la comparaison des sous-ensembles flous.

### 2.1.2.2 - Procédure pratique de comparaison des sous-ensembles flous.

Pour effectuer la comparaison des  $\mu$ , il se peut que pour une certaine valeur de  $t$ , il ne corresponde qu'une seule  $\mu$ , celle de  $A_{r \rightarrow s}$  par exemple, et que pour  $A_{s \rightarrow r}$ , il n'existe pas de  $\mu$ :

$$\exists t / \begin{array}{l} \exists \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t) \\ \nexists \mu_{A_{s \rightarrow r}}(t) \end{array}$$

La comparaison au taux  $t$  de  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}$  et  $\mu_{A_{s \rightarrow r}}$  ne pourra se faire directement.

Au contraire, il se peut que pour un certain taux  $t$ , il existe plusieurs valeurs de la fonction d'appartenance correspondant à  $t$  dans un même sous-ensemble flou :

$$\exists t / \exists \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t) \text{ et } \exists \mu'_{A_{r \rightarrow s}}(t)$$

Ces deux remarques font que l'on va recourir à une approche topologique pour la comparaison des deux sous-ensembles flous d'influence imprécise dans l'application pratique.

- Si pour un taux  $t$ , il se trouve que l'on ne peut effectuer la comparaison, c'est-à-dire si à  $t$ , il ne correspond qu'une seule des valeurs  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}(t)$  ou  $\mu_{A_{s \rightarrow r}}(t)$ , on comparera  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}(t)$  et  $\mu_{A_{s \rightarrow r}}(t')$  avec  $t' \in \mathcal{V}(t)$  où  $\mathcal{V}$  est un voisinage. En d'autres termes, on comparera dans ce cas des valeurs des fonctions  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}$  et  $\mu_{A_{s \rightarrow r}}$  dont les taux  $t$  et  $t'$  sont proches.

- Si pour un même sous-ensemble flou  $A_{r \rightarrow s}$ , il existe une valeur  $t$  telle qu'il lui corresponde deux (ou plus) valeurs  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}(t)$ , on prendra en compte la plus élevée des valeurs  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}(t)$  située à ce taux  $t$ .

Ceci est logique puisque dans la comparaison des sous-ensembles flous, on sélectionne la valeur maxima. Donc :

si  $\exists \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t)$  et  $\mu'_{A_{r \rightarrow s}}(t)$ , on prend  $\text{Max} \{ \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t); \mu'_{A_{r \rightarrow s}}(t) \}$

- En conséquence, pour comparer d'une manière générale deux influences imprécises  $A_{r \rightarrow s}$  et  $A_{s \rightarrow r}$ , on compare pour un taux  $t$

$$\text{Max}_{\mu, t'} \left\{ \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t') \right\} \quad \text{et} \quad \text{Max}_{\mu, t''} \left\{ \mu_{A_{s \rightarrow r}}(t'') \right\}$$

avec  $t' \in \mathcal{V}(t)$

$t'' \in \mathcal{V}(t)$

c'est-à-dire que l'on recherche d'abord une valeur du taux,  $t$ , telle que il en existe un voisinage contenant des valeurs proches  $t'$ ,  $t''$ ... Dans ce voisinage on compare les plus grandes des valeurs des fonctions  $\mu$ . Remarquons que, pour un même sous-ensemble flou, dans un même voisinage, il peut exister plusieurs taux. Voyons un exemple.

Exemple.

$$A_{r \rightarrow s} = \left\{ (0,2 ; 0,25) ; (0,3 ; 0,17) ; (0,3 ; 0,24) ; (0,6 ; 0,31) \right\}$$

$$A_{s \rightarrow r} = \left\{ (0,18 ; 0,08) ; (0,18 ; 0,16) ; (0,21 ; 0,29) ; (0,3 ; 0,47) \right\}$$

On a bien :  $0,25 + 0,17 + 0,24 + 0,31 = 1$

et :  $0,08 + 0,16 + 0,29 + 0,47 = 1$

On décide de prendre pour centres des voisinages :  $t = 0,2$  ;  $t = 0,3$  ;  
 $t = 0,6$ . D'où le tableau :

$\mu$ \ $t$	0,2	0,3	0,6
$\mu_{A_{r \rightarrow s}}$	0,25	0,17 0,24	0,31
$\mu_{A_{s \rightarrow r}}$	0,08 0,16 0,29	0,47	

En effet

$$0,18 \in \mathcal{V}(0,20)$$

$$0,21 \in \mathcal{V}(0,20)$$

Il reste à sélectionner les valeurs  $\mu$  maximales dans chaque voisinage ; on obtient finalement :

$\mu$ \ t	0,2	0,3	0,6
$\mu_{A_{r \rightarrow s}}$	0,25	0,24	0,31
$\mu_{A_{s \rightarrow r}}$	0,29	0,47	0

Remarquons la valeur 0 imposée à  $\mu_{A_{s \rightarrow r}}(0,6)$ . Elle est conventionnelle. En effet, pour  $t = 0,6$ , il ne correspond pas de valeur de  $\mu_{A_{s \rightarrow r}}$ . Or, il n'est pas possible dans ce cas d'agrèger  $t = 0,6$  avec un voisinage tel que l'on puisse trouver une valeur de  $\mu_{A_{s \rightarrow r}}$  puisque la plus proche valeur serait  $t = 0,3$  (et  $\mu_{A_{s \rightarrow r}}(0,3) = 0,47$ ) mais alors le voisinage serait intuitivement "trop grand". On considère donc que pour cette valeur isolée  $t = 0,6$ , seule  $r$  émet une influence pour laquelle  $\mu_{A_{r \rightarrow s}} = 0,31$  et que  $s$  n'en émet pas, donc  $\mu_{A_{s \rightarrow r}} = 0$ .

La comparaison des sous-ensembles flous est alors possible. On obtient alors les deux sous-ensembles flous de dominance  $D_{r \rightarrow s}$  et  $D_{s \rightarrow r}$  :

$\mu$ \ t	0,2	0,3	0,6
$\mu_{D_{r \rightarrow s}}$	0	0	0,31
$\mu_{D_{s \rightarrow r}}$	0,29	0,47	0

Finalement :

$$D_{r \rightarrow s} = \left\{ \left( \forall t, t \neq 0,6, (t ; 0) \right) ; (0,6 ; 0,31) \right\}$$

$$D_{s \rightarrow r} = \left\{ \left( \forall t, t \neq 0,2, t \neq 0,3, (t ; 0) \right) ; (0,2 ; 0,29) ; (0,3 ; 0,47) \right\}$$

Maintenant que la procédure est bien définie, il convient de s'arrêter quelque peu sur la méthode elle-même, c'est-à-dire sur la dominance floue.

### 2.1.2.3. Quelques réflexions sur la méthode.

R1 - Cette approche est bien compatible avec le cas où il y a une seule branche car alors :

$$\begin{aligned} A_{r \rightarrow s} &= \left\{ t, \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t) \right\} \quad \text{où} \quad \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t) = 1 \text{ et } t \text{ unique} \\ A_{s \rightarrow r} &= \left\{ t', \mu_{A_{s \rightarrow r}}(t') \right\} \quad \text{où} \quad \mu_{A_{s \rightarrow r}}(t') = 1 \text{ et } t' \text{ unique} \end{aligned}$$

Mais en général  $t$  est différent de  $t'$ . On ne peut donc comparer  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}(t)$  et  $\mu_{A_{s \rightarrow r}}(t')$  sauf à former un voisinage trop grand. Même si on le pouvait, ces deux valeurs sont égales. Par contre, la comparaison de deux sous-ensembles flous peut se faire aussi par la comparaison des taux  $t$  à même valeur  $\mu$  :

$$\text{si } \exists \mu, \mu = \mu_{A_{r \rightarrow s}}(t) = \mu_{A_{s \rightarrow r}}(t'), \quad t > t'$$

alors  $A_{r \rightarrow s} \succ A_{s \rightarrow r}$  au niveau  $\mu$

Dans notre cas,  $\mu = 1$  :

si  $t > t'$ ,  $A_{r \rightarrow s} \succ A_{s \rightarrow r}$  et  $r$  domine  $s$ .

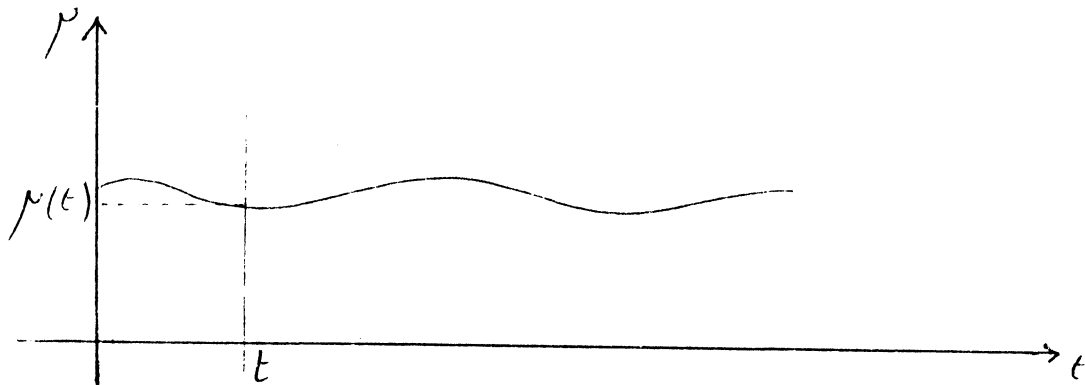
R2 - La symétrie est toujours respectée bien que la dominance de  $s$  sur  $r$  ne soit plus l'opposé de la dominance de  $r$  sur  $s$ . C'en est seulement le "négatif", c'est-à-dire que :

$$\forall t, \mu_{D_{r \rightarrow s}}(t) = 0 \implies \mu_{D_{s \rightarrow r}}(t) \geq 0$$

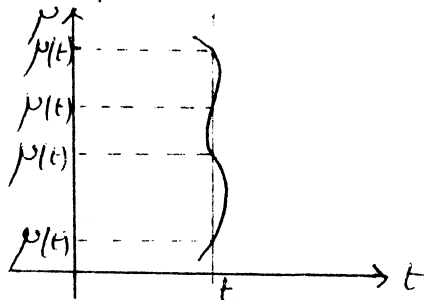
Le cas où  $\mu_{D_{r \rightarrow s}}(t) = \mu_{D_{s \rightarrow r}}(t) = 0$  correspond au cas où  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}(t) = \mu_{A_{s \rightarrow r}}(t)$

R3 - Si on préfère la procédure de comparaison de deux sous-ensembles flous à taux identiques à la seconde procédure par niveaux  $\mu$  identiques, c'est que la deuxième ne conduit pas à des résultats applicables. En effet, dans la pratique, les fonctions  $\mu$  d'un même sous-ensemble flou sont proches l'une de l'autre parce que les branches ont des importances souvent proches : si il y a  $n$  branches, l'importance de chacune ne s'écartera pas beaucoup de  $\frac{1}{n}$ , surtout si  $n$  est assez grand (par exemple 10 ou 20).

Donc la comparaison à niveaux identiques va être moins précise qu'une comparaison à taux identiques puisque les sous-ensembles flous auront l'allure suivante :



et non l'aspect :



Dans la première forme, à une valeur  $t$  ne correspond en général qu'une valeur  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}(t)$ , alors que dans la deuxième à cette même valeur  $t$  correspond plusieurs valeurs  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}(t)$ .

On l'a compris, toute la procédure de regroupements par voisinage vise à rapprocher la Relation (au sens mathématique du terme)  $\mu$  d'une Application en déformant le moins possible l'information par des regroupements. D'après ce que nous avons dit, seule la comparaison à taux identiques correspond à cette condition ; celle à niveaux identiques entraînant beaucoup trop de regroupements.

R4 - D'après la remarque 1 , l'introduction du flou généralise bien le cas non flou. En effet, dans le non flou, on faisait la moyenne des taux pondérée par les poids relatifs des branches. Cette moyenne correspond à l'ensemble des branches : elle peut donc être affectée du poids 1. On se trouve replacé dans le cas de la remarque 1 .

R5 - Bien que la somme des valeurs  $\mu$  d'un même sous-ensemble flou soit égale à 1, les fonctions  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}(t)$  ne sont pas des probabilités, ni même des fréquences d'apparition du taux  $t$ .

## 2.2 - Influence et dominance imprécise dans une structure décontractée :

Nous allons procéder comme précédemment mais tenir compte du

fait que l'influence dans une structure non réduite n'est pas fixe et qu'elle admet seulement une borne inférieure et une borne supérieure.

### 2.2.1 - Influence.

L'influence d'une sous-région  $r_a$  sur une région  $s$  sera définie par l'ensemble des couples :

$$\left( i_{t_a \rightarrow s_b} \frac{X_r}{X_{r_a}} ; \frac{X_{s_b}}{X_s} \right) \quad \forall b$$

Envisageons le sous-ensemble flou :

$$A_{r \rightarrow s}^a = \left\{ (t, \mu_{A_{r \rightarrow s}^a}(t)) ; t \in \mathbb{I} \right\}$$

$$\text{où } \mu_{A_{r \rightarrow s}^a} = \frac{X_{s_b}}{X_s} \iff t = i_{t_a \rightarrow s_b} \cdot \frac{X_r}{X_{r_a}}$$

Ce sous-ensemble flou est une fonction de  $a$ . Son "plus grand élément" est la borne supérieure de l'influence imprécise de  $r$  sur  $s$  et son "plus petit élément" est la borne inférieure de cette même influence.

On va donc comparer les sous-ensembles flous  $A_{r \rightarrow s}^a$  entre eux.

- pour  $\check{A}_{r \rightarrow s}$  (borne supérieure).

On pose :

$$\left\{ \exists b / \mu_{A_{r \rightarrow s}^b}(t_b) = \mu_{A_{r \rightarrow s}^a}(t_a) \text{ et } t_b > t_a, \forall a \right\} \iff A_{r \rightarrow s}^b \succ A_{r \rightarrow s}^a$$

pour ce niveau  $\mu_{A_{r \rightarrow s}^b}(t_b)$ .

$$\text{donc } \check{A}_{r \rightarrow s} = \left\{ (t, \mu_{\check{A}_{r \rightarrow s}}(t)) ; t \in \mathbb{I} \right\}$$

$$\text{où } t = \text{Max}_a t_a / \mu_{\check{A}_{r \rightarrow s}}(t) = \mu_{A_{r \rightarrow s}^a}(t_a) \quad \forall a$$

Cette définition est donc identique à la définition de la réunion donnée en 2.1.1.

- pour  $\hat{A}_{r \rightarrow s}$  (borne inférieure).

On pose de même :

$$\left\{ \exists b / \mu_{A_{r \rightarrow s}^b}(t_b) = \mu_{A_{r \rightarrow s}^a}(t_a) \text{ et } t_b > t_a \quad \forall a \right\}$$

$$\iff A_{r \rightarrow s}^b \supset A_{r \rightarrow s}^a$$

pour ce niveau  $\mu_{A_{r \rightarrow s}^b}(t_b)$

donc

$$\hat{A}_{r \rightarrow s} = \left\{ t, \mu_{\hat{A}_{r \rightarrow s}}(t); t \in I \right\}$$

$$\text{où } t = \text{Min}_a t_a / \mu_{\hat{A}_{r \rightarrow s}}(t) = \mu_{A_{r \rightarrow s}^a}(t_a) \quad \forall a$$

Il s'agit donc de l'intersection.

Finalement,  $A_{r \rightarrow s}$ , influence de  $r$  sur  $s$  est un sous-ensemble flou qui est compris entre l'intersection et la réunion des sous-ensembles flous  $A_{r \rightarrow s}^a$ . Comme on ne connaît pas sa position dans cet "intervalle" on posera :

$$A_{r \rightarrow s} = \left[ \bigcap_a A_{r \rightarrow s}^a, \bigcup_a A_{r \rightarrow s}^a \right]$$

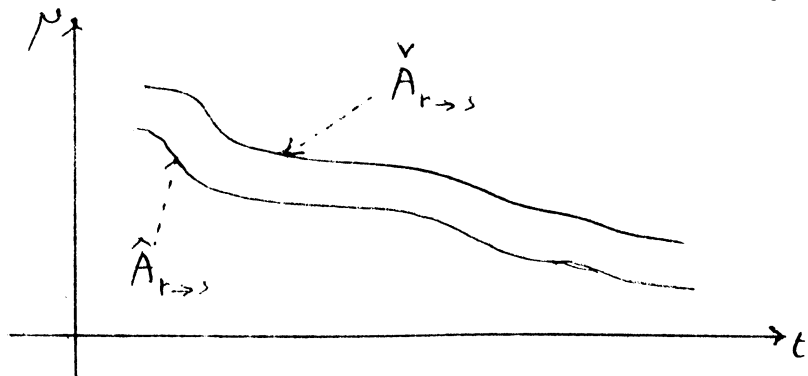
ou le symbole  $[ ]$  désigne un "intervalle" de sous-ensembles flous.  $A_{r \rightarrow s}$  pourra donc se noter :

$$A_{r \rightarrow s} = \left\{ (\tau, \mu_{A_{r \rightarrow s}}(\tau)), \tau \in \mathcal{T} \right\}$$

$$\text{avec } \tau = [\hat{t}, \check{t}], \quad \hat{t} = \text{Min}_a t_a$$

$$\check{t} = \text{Max}_a t_a$$

Ce sous-ensemble flou peut se représenter de la façon suivante :



Il est donc assimilable à un sous-ensemble  $\bar{\Phi}$ -flou (cf (1c)) parce que, à une même valeur du taux  $t$  correspond plusieurs valeurs (un intervalle) de la fonction d'appartenance  $\mu$ , sous réserve de regroupements par voisinages comme en 2.1.2.2. Nous l'appelons un  $\bar{\Phi}$ -sous ensemble flou.

### 2.2.2 - La dominance.

La dominance floue entre deux régions se déduit de la comparaison des influences entre ces deux régions. Le problème sera de comparer des sous-ensembles  $\bar{\Phi}$ -flous. Mais la comparaison à taux  $t$  constant des valeurs des fonctions d'appartenance  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}(t)$  et  $\mu_{A_{s \rightarrow r}}(t)$ , valeurs qui seraient alors des intervalles, entraînerait beaucoup trop de regroupements à effectuer.

C'est pourquoi la comparaison des deux  $A_{r \rightarrow s}$  et  $A_{s \rightarrow r}$  se fera à taux-intervalle  $\tau$  constant,  $A_{r \rightarrow s}$  et  $A_{s \rightarrow r}$  étant sous la forme d'un  $\bar{\Phi}$ -sous-ensemble flou.

$$A_{r \rightarrow s} = \left\{ (\tau, \mu_{A_{r \rightarrow s}}(\tau)); \tau \in \underline{\mathcal{T}} \right\}$$

où  $\tau$  est un intervalle et  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}(\tau)$  une valeur fixe.

On posera donc :

$$\text{si } \exists \tau / \mu_{A_{r \rightarrow s}}(\tau) \geq \mu_{A_{s \rightarrow r}}(\tau) \quad \text{alors } A_{r \rightarrow s} \succ A_{s \rightarrow r}$$

pour la valeur-intervalle  $\tau$ .

Le problème qui se pose est de déterminer ces valeurs-intervalles  $\tau$  où se fait la comparaison. Il faut procéder par voisinage comme dans le cas de la dominance dans une structure réduite mais ici les intervalles  $\tau$  sont considérés comme des boules fermées (au sens topologique).

On comparera les valeurs de  $\mu$  de deux sous-ensembles flous  $A_{r \rightarrow s}$  et  $A_{s \rightarrow r}$ , c'est-à-dire on comparera  $\mu_{A_{r \rightarrow s}}(\tau')$  et  $\mu_{A_{s \rightarrow r}}(\tau'')$

dès que  $\tau'$  et  $\tau''$  présenteront une intersection suffisamment "large". On pourra retenir le critère :

- si  $\tau' \subseteq \tau''$ , la comparaison est possible. De même si  $\tau'' \subseteq \tau'$ . On aura :

$$\tau' \in \mathcal{B}(\tau) \quad \tau'' \in \mathcal{B}(\tau)$$

et  $\tau$  est la valeur intervalle de comparaison avec  $\tau = \tau' \cap \tau''$

$$\text{- si } \frac{\|\tau' \cap \tau''\|}{\text{Min}\{\|\tau'\|, \|\tau''\|\}} > 1 \quad \text{avec } \begin{cases} \tau' \not\subseteq \tau'' \\ \tau'' \not\subseteq \tau' \end{cases}$$

ou  $\|\tau'\|$  désigne la largeur de  $\tau'$  (c'est-à-dire la distance  $\check{\tau} - \hat{\tau}$  entre ses bornes). Alors la comparaison est possible. On a :

$$\tau' \in \mathcal{B}(\tau) \quad \tau'' \in \mathcal{B}(\tau)$$

où  $\tau = \tau' \cap \tau''$

- sinon la comparaison n'est pas possible à  $\tau'$  ou  $\tau''$  et la valeur  $\mu(\tau) = 0$  est affectée comme dans le cas de structure réduite à  $A_{r \rightarrow s}$  ou  $A_{s \rightarrow r}$ .

Après comparaison sur  $\underline{\mathcal{C}}^*$ , ensemble des valeurs-intervalles effectivement prises par  $\tau$ , la dominance imprécise de  $r$  sur  $s$  est un sous-ensemble flou :

$$D_{r \rightarrow s} = \left\{ (\tau, \mu_{D_{r \rightarrow s}}(\tau)) ; \tau \in \underline{\mathcal{C}}^* \right\}$$

avec  $\mu_{D_{r \rightarrow s}}(\tau) = \mu_{A_{r \rightarrow s}}(\tau)$   
si  $r$  domine  $s$  pour  $\tau$ .

$\mu_{D_{r \rightarrow s}}(\tau) = 0$   
si  $r$  ne domine pas  $s$  pour  $\tau$ .

## Conclusion.

Nous avons, dans le présent document qui reste bien incomplet, proposé deux notions pour l'étude des relations interrégionales.

- D'abord, la distinction entre structure décontractée et structure réduite. Seule la seconde est retenue en général et implicitement, puisque les influences régionales sont rarement envisagées comme variables. Signalons que dans une thèse à paraître, nous donnerons des conditions suffisantes pour passer d'une structure décontractée à une structure réduite.

- Ensuite, nous avons proposé d'utiliser la méthodologie du flou pour rendre compte des phénomènes d'influence et de dominance bipolaire entre régions dans toute leur complexité et leur richesse.

A ce point de vue, ce document constitue une tentative d'utilisation du raisonnement en terme de flou dans les problèmes objectifs et non plus seulement subjectifs. La première approche se rencontre mais est plus rare (cf (15)). En effet, les fonctions d'appartenance sont ici déterminées objectivement par la part de chaque branche dans la production régionale ; elles représentent toutefois l'impact sur une région d'une influence.

L'approche employée dans ce document ouvre la voie à l'utilisation de la topologie floue (sans entrer ici dans la récente discussion concernant les graphes et la topologie (cf (16), (17))). Peut-être la méthodologie développée permettrait-elle d'analyser aussi les relations entre groupes industriels ? (cf (8)).

Annexe.

Influence absolue dans une structure décontractée

Définition.

L'influence absolue d'une sous-région  $r_a$  sur une autre,  $s_b$ , est la variation absolue de la production de  $s_b$  issue d'une variation absolue unitaire de la production de  $r_a$  :

$$\Delta X_{r_a} \longrightarrow \Delta X_{s_b} = \theta_{s_b r_a} \cdot X_{r_a}$$

où  $\theta_{r_a s_b} = \frac{x_{r_a s_b}}{X_{r_a}}$  est le coefficient d'approvisionnement

de  $r_a$  auprès de  $s_b$  pour l'achat par  $r_a$  de l'input  $b$ .

D'où

$$I_{r_a \rightarrow s_b} = \frac{\Delta X_{s_b}}{\Delta X_{r_a}} = \theta_{s_b r_a}$$

L'influence absolue reçue par une région est bien la somme des influences absolues reçues par chacune de ses sous-régions (que la structure soit décontractée ou non) :

$$I_{r_a \rightarrow s} = \frac{\Delta X_s}{\Delta X_{r_a}} = \frac{\sum_b \Delta X_{s_b}}{\Delta X_{r_a}} = \sum_b I_{r_a \rightarrow s_b}$$

Par contre l'influence absolue, émise dans une structure décontractée n'est pas constante car :

$$I_{r \rightarrow s_b} = \frac{\Delta X_{s_b}}{\Delta X_r} = \frac{\sum_a (\Delta X_{s_b})_a}{\sum_a \Delta X_{r_a}} = \frac{\sum_a I_{r_a \rightarrow s_b} \Delta X_{r_a}}{\sum_a \Delta X_{r_a}}$$

Mais l'influence absolue émise admet une borne supérieure et une borne inférieure respectivement :

$$\checkmark \hat{I}_{r \rightarrow s_b} = \text{Max}_a I_{r_a \rightarrow s_b}$$

$$\hat{I}_{r \rightarrow s_b} = \text{Min}_a I_{r_a \rightarrow s_b}$$

En effet : 
$$I_{r \rightarrow s_b} = \sum_a I_{r_a \rightarrow s_b} \frac{\Delta X_{r_a}}{\sum_a \Delta X_{r_a}} = \sum_a I_{r_a \rightarrow s_b} \Lambda_{r_a}$$

en posant 
$$\Lambda_{r_a} = \frac{\Delta X_{r_a}}{\sum_a \Delta X_{r_a}}$$

On a : 
$$\sum_a \Lambda_{r_a} = 1$$

Alors

$$I_{r \rightarrow s_b} \text{ Max} \iff \begin{cases} \exists \check{a} / \Lambda_{r_{\check{a}}} = 1 \text{ et } \Lambda_{r_c} = 0 \quad \forall c \neq \check{a} \\ \text{avec } I_{r_{\check{a}} \rightarrow s_b} = \text{Max}_c I_{r_c \rightarrow s_b} \end{cases}$$

et alors 
$$\check{I}_{r \rightarrow s_b} = I_{r_{\check{a}} \rightarrow s_b}$$

De même

$$I_{r \rightarrow s_b} \text{ Min} \iff \begin{cases} \exists \hat{a} / \Lambda_{r_{\hat{a}}} = 1 \text{ et } \Lambda_{r_c} = 0 \quad \forall c \neq \hat{a} \\ \text{avec } I_{r_{\hat{a}} \rightarrow s_b} = \text{Min}_c I_{r_c \rightarrow s_b} \end{cases}$$

et alors 
$$\hat{I}_{r \rightarrow s_b} = I_{r_{\hat{a}} \rightarrow s_b}$$

Remarquons que,  $\check{I}_{r \rightarrow s_b}$  est toujours inférieure à 1 donc  $I_{r \rightarrow s_b}$  l'est aussi.

BIBLIOGRAPHIE :

- (1) FUSTIER (B.) : "Interactions humaines et espace économique". Thèse Dijon 1977.
- (2) FUSTIER (B.) : "Contribution à l'analyse spatiale de l'attraction imprécise" Document de l'IME, n° 30, Dijon, 1978.
- (3) GAZON (J.) : "Transmission de l'influence économique : une approche structurale" Sirey, collection de l'IME, n° 13.
- (4) ISARD (W.) : "Méthodes d'analyse régionale", Dunod, Paris, 1972.
- (5) JOYAL (A.) : "Etude de l'influence économique : application aux tableaux d'échanges interindustriels canadien et québécois", Thèse, Dijon, 1973.
- (6) KAUFMANN (A.) : "Introduction à la théorie des sous-ensembles flous", Tome 1, Masson et Cie.
- (7) LANTNER (R.) : "Théorie de la dominance économique" Paris, Dunod (coll. Cournot) 1974.
- (8) LANTNER (R.) : "A propos des phénomènes de pouvoir : une analyse de la structure des relations entre groupes industriels" Economie Appliquée, n° 2, 1976.
- (9) LEONTIEF (W.) : "Input output economics", New York, 1966, Oxford Press.
- (10) de MESNARD (L.) : "Problèmes de régionalisation de la dominance inter-industrielle" Mémoire DEA, Dijon, 1977.
- (11) MORAN (P.) : "L'analyse spatiale en science économique", Cujas, Paris, 1966.
- (12) MOUGEOT (M.) : "Théorie et politique économique régionales" Economica, 1975.
- (13) MOUGEOT (M.), DURU (G.), AURAY (J. P.) : "La structure productive française" Economica, Paris, 1977.

- (14) PERRIN (J. C.) : "L'analyse économique spatialisée : une nouvelle approche" Cahiers d'économie politique, n° 2, Aix, 1976.
- (15) PONSARD (C.) : "Hiérarchie des places centrales et graphes  $\Phi$ -flous" Environnement and Planning A, 1977, Vol. 9, pages 1233 à 1352.
- (16) PONSARD (C.) : "Un modèle topologique d'équilibre économique inter-régional" Dunod, Paris, 1969.
- (17) PONSARD (C.) : "A propos de graphes et de topologies" Revue d'Economie Politique n° 2, mars-avril 1978.
- (18) PREVOT (M.) : "Sous-ensembles flous. Une approche théorique" Coll. IME, n° 14, Sirey, 1977.
- (19) SAMBUC (R.) : "Fonctions  $\Phi$ -floues. Application à l'aide au diagnostic en pathologie thyroïdienne" Thèse, Marseille. 1975.
- (20) TENEUR (J.) et DIQUAL (L.) : "Economie régionale et aménagement du territoire" PUF, Paris, 1972.