



**HAL**  
open science

## Séries temporelles et flou

Louis de Mesnard

► **To cite this version:**

| Louis de Mesnard. Séries temporelles et flou. [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1982, 19 p., figures, bibliographie. hal-01527253

**HAL Id: hal-01527253**

**<https://hal.science/hal-01527253v1>**

Submitted on 24 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# I.M.E.

ÉQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU C.N.R.S.

R P 210 (79)

DOCUMENT DE TRAVAIL

N° 56

SERIES TEMPORELLES ET FLOU

Louis DE MESNARD

Janvier 1982

~~110~~

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ÉCONOMIQUES

UNIVERSITÉ DE DIJON

FACULTÉ DE SCIENCE ÉCONOMIQUE ET DE GESTION

4, BOULEVARD GABRIEL — 21000 DIJON

13 AVR. 1982



N° 56

SERIES TEMPORELLES ET FLOU

Louis DE MESNARD

Janvier 1982

Le but de cette collection est de diffuser rapidement une première version de travaux poursuivis dans le cadre de l'I.M.E. afin de provoquer des discussions scientifiques. Les lecteurs désirant entrer en rapport avec un auteur sont priés d'écrire à l'adresse suivante :

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ÉCONOMIQUES  
4, Boulevard Gabriel  
21000 Dijon (France)



## TRAVAUX DEJA PUBLIES

- N° 1 Michel PREVOT : Théorème du point fixe. Une étude topologique générale  
(juin 1974)
- N° 2 Daniel LEBLANC : L'introduction des consommations intermédiaires dans  
le modèle de LEFEBER (juin 1974)
- N° 3 Colette BOUBON : Spatial Equilibrium of the Sector in Quasi-Perfect  
Competition (septembre 1974)
- N° 4 Claude PONSARD : L'imprécision et son traitement en analyse économique  
(septembre 1974)
- N° 5 Claude PONSARD : Economie urbaine et espaces métriques (septembre 1974)
- N° 6 Michel PREVOT : Convexité (mars 1975)
- N° 7 Claude PONSARD : Contribution à une théorie des espaces économiques imprécis  
(avril 1975)
- N° 8 Aimé VOGT : Analyse factorielle en composantes principales d'un caractère  
de dimension-n (juin 1975)
- N° 9 Jacques THISSE et Jacky PERREUR : Relation between the Point of Maximum  
Profit and the Point of Minimum Total Transportation Cost :  
A Restatement (juillet 1975)
- N° 10 Bernard FUSTIER : L'attraction des points de vente dans des espaces précis  
et imprécis (juillet 1975)
- N° 11 Régis DELOCHE : Théorie des sous-ensembles flous et classification en  
analyse économique spatiale (juillet 1975)
- N° 12 Gérard LASSIBILLE et Catherine PARRON : Analyse multicritère dans un con-  
texte imprécis (juillet 1975)
- N° 13 Claude PONSARD : On the Axiomatization of Fuzzy Subsets Theory (july 1975)
- N° 14 Michel PREVOT : Probability Calculation and Fuzzy Subsets Theory (august 1975)
- N° 15 Claude PONSARD : Hiérarchie des places centrales et graphes - flous  
(avril 1976)
- N° 16 Jean-Pierre AURAY et Gérard DURU : Introduction à la théorie des espaces  
multiflous (avril 1976)
- N° 17 Roland LANTNER, Bernard PETITJEAN et Marie-Claude PICHERY : Jeu de simulation  
du circuit économique (août 1976)
- N° 18 Claude PONSARD : Esquisse de simulation d'une économie régionale : l'apport  
de la théorie des systèmes flous (septembre 1976)
- N° 19 Marie-Claude PICHERY : Les systèmes complets de fonctions de demande  
(avril 1977)
- N° 20 Gérard LASSIBILLE et Alain MINGAT : L'estimation de modèles à variation  
dépendante dichotomique - La sélection universitaire et la  
réussite en première année d'économie (avril 1977)



- N° 21 Claude PONSARD : La région en analyse spatiale (mai 1977)
- N° 22 Dan RALESCU : Abstract Models for Systems Identification (juin 1977)
- N° 23 J. MARCHAL et F. POULON : Multiplicateur, graphes et chaînes de Markov  
(décembre 1977)
- N° 24 Pietro BALESTRA : Determinant and Inverse of a Sum of Matrices with  
Applications in Economics and Statistics (avril 1978)
- N° 25 Bernard FUSTIER : Etude empirique sur la notion de région homogène  
(avril 1978)
- N° 26 Claude PONSARD : On the Imprecision of Consumer's Spatial Preferences  
(avril 1978)
- N° 27 Roland LANTNER : L'apport de la théorie des graphes aux représentations  
de l'espace économique (avril 1978)
- N° 28 Emmanuel JOLLES : La théorie des sous-ensembles flous au service de la  
décision : deux exemples d'application (mai 1978)
- N° 29 Michel PREVOT : Algorithme pour la résolution des systèmes flous (mai 1978)
- N° 30 Bernard FUSTIER : Contribution à l'analyse spatiale de l'attraction impré-  
cise (juin 1978)
- N° 31 TRAN QUI Phuoc : Régionalisation de l'économie française par une méthode  
de taxinomie numérique floue (juin 1978)
- N° 32 Louis De MESNARD : La dominance régionale et son imprécision, traitement  
dans le type général de structure (juin 1978)
- N° 33 Max PINHAS : Investissement et taux d'intérêt. Un modèle stochastique  
d'analyse conjoncturelle (octobre 1978)
- N° 34 Bernard FUSTIER , Bernard ROUGET : La nouvelle théorie du consommateur est-  
elle testable ? (janvier 1979)
- N° 35 Didier DUBOIS : Notes sur l'intérêt des sous-ensembles flous en analyse de  
l'attraction de points de vente (février 1979)
- N° 36 Heinz SCHLEICHER : Equity Analysis of Public Investments : Pure and Mixed  
Game-Theoretic Solutions (avril 1979)
- N° 37 Jean JASKOLD GABSZHWICZ : Théories de la concurrence imparfaite : illustra-  
tions récentes de thèmes anciens (juin 1979)
- N° 38 Bernard FUSTIER : Contribution à l'étude d'un caractère statistique flou  
(janvier 1980)
- N° 39 Pietro BALESTRA : Modèles de régression avec variables muettes explicatives  
(janvier 1980)
- N° 40 Jean-Jacques LAFFONT : Théorie des incitations un exemple introductif  
(février 1980)
- N° 41 Claude PONSARD : L'équilibre spatial du consommateur dans un contexte im-  
précis (février 1980)

- N° 42 Jean-Marie HURIOT : Rente foncière et modèles de production (avril 1980)
- N° 43 Claude PONSARD : Fuzzy Economic Spaces (avril 1980)
- N° 44 Alan KIRMAN : Imperfect Communication in Markets - A big world problem  
(avril 1980)
- N° 45 Michel PREVOT : Variétés différentielles (mai 1980)
- N° 46 Claude PONSARD : Producer's spatial equilibrium with a fuzzy constraint  
(may 1980)
- N° 47 Michel PREVOT : Théorie des catastrophes (mai 1980)
- N° 48 Bernadette MARECHAL : Recherche de la forme d'un modèle à retards échelonnés  
application à la fonction d'investissement (novembre 1980)
- N° 49 Bernard FUSTIER : Une méthode d'analyse multicritère, SPARTE, (mars 1981)
- N° 50 Jan SERCK-HANSSSEN : On the Optimal Capital/Labour Ratios in Towns when  
Demands for Outputs are Stochastic (may 1981)
- N° 51 Claude PONSARD : Partial Spatial Equilibria with Fuzzy Constraints (may 1981)
- N° 52 Xavier FREIXAS : Révélation des préférences dans l'allocation de biens  
publics (juillet 1981)
- N° 53 Bernard ROUGET : Equilibre spatial de consommation : quelques résultats  
(novembre 1981)
- N° 54 Louis PHILIPS : Welfare and Price Discrimination : Optimal Departures from  
Uniform Pricing (november 1981)
- N° 55 Bernard FUSTIER : Une introduction à la théorie de la demande floue  
(janvier 1982)
- N° 56 Louis DE MESNARD : Séries temporelles et Flou (janvier 1982)

## INTRODUCTION

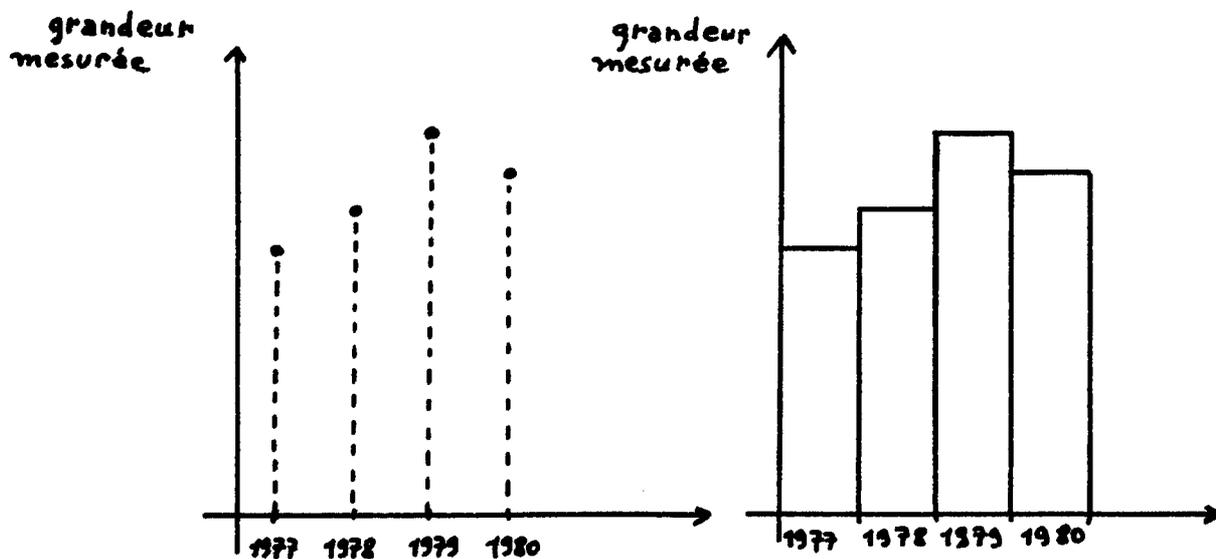
La compréhension de la nature du temps, et de son écoulement, est un problème qui a toujours préoccupé les hommes. L'idée que l'on se fait du temps est elle-même discutable et discutée, et pas seulement par les philosophes. Tout agent, dans l'activité qu'il déploie est amené à se poser, même implicitement, cette question. En effet, le temps nous est compté. Toute action doit le prendre en considération. La valeur des produits humains en dépend. Il faut toujours ramener une production, voire même une consommation, au temps qu'il a fallu pour la réaliser. Nul n'y échappe, ni dans ses loisirs, ni dans son travail. Mais c'est dans ce dernier que les instruments de mesure qui introduisent le temps explicitement sont les plus développés .

Ainsi les entreprises publiques ou privées utilisent-elles des indicateurs qui tous ramènent une grandeur à la période de temps consacrée à sa réalisation [2] . Ceux-ci vont du bilan annuel à la prévision en passant par les ratios de productivité. Mais le temps ne se laisse pas ainsi si facilement découper. Les événements qui se produisent au cours du temps, leurs causes, leurs conséquences, sont trop complexes pour accepter de rentrer dans un carcan temporel rigide sans perte d'information.

La présente note a pour but de montrer, dans le domaine économique, ce phénomène et de proposer une solution permettant d'assouplir la vision que l'on peut avoir du temps afin de tenir compte de la réelle complexité de ce concept. Une première partie montrera les problèmes posés par le calcul économique sur des périodes de temps rigidement définies. La deuxième partie proposera l'utilisation de la théorie des sous-ensembles flous pour tenter de les résoudre. Enfin une troisième partie envisagera les modalités pratiques d'application.

## 1ère PARTIE - QUELQUES PROBLEMES POSES PAR LE DECOUPAGE DU TEMPS EN PERIODE

Toute période, espace de temps compris entre deux dates qui lui servent de bornes, est implicitement assimilée à un point. Les années 1978, 1979, 1980, les mois de mars, d'avril, de mai, etc... constituent d'autant de points d'accumulation des événements, points qui sont envisagés comme étant sans dimension, même si un découpage ultérieur en est effectué. On parle par exemple de la "production de 1980" ou de la "production du mois de mai 1980". Ainsi, lorsque l'on reporte sur un graphe l'évolution des grandeurs en fonction du temps, chaque période est figurée par un point sur l'axe des abscisses; ou encore, dans le cas d'un histogramme, chaque période a une étendue, mais la grandeur figurée prend une valeur constante sur toute l'étendue de la période; les deux représentations sont équivalentes.



Les événements d'une même période sont donc envisagés comme étant à une distance nulle les uns des autres et sont, corrolairement considérées comme étant situés à une distance fixe de ceux d'une période voisine; cette distance est mesurée en unités de temps.

Mais en réalité, il existe toujours des événements dont la date est proche de celle des frontières de chaque période. Leur sort est pourtant brutalement réglé: s'ils sont situés avant la date limite, ils appartiennent à la période antérieure (et inversement s'ils sont situés après elle) quelle que soit leur proximité à cette frontière. Par exemple, un individu né le 31 décembre 1899 est "né au 19è siècle". Un autre né le 1er janvier 1900 est "né au 20è siècle".

Pourtant, on sent bien qu'ils sont tous deux de la même époque. Nous avons choisi à dessein cet exemple pour montrer que le problème du découpage du temps en périodes bien nettes est général. Mais il est particulièrement gênant dans les domaines qui nous préoccupent, l'économie et la gestion.

Un découpage strict des périodes est en effet dangereux parce qu'un faible déplacement de la date de l'acte économique ou une imprécision quant à sa date réelle, vont pouvoir modifier le résultat mesuré sur la période.

Exemple: lorsqu'on compare les ventes du premier semestre à celles du second, on ramène implicitement les ventes du 30 juin à celles du 2 janvier en les agrégeant dans le premier semestre. Il en va de même pour le 1er juillet et le 31 décembre avec le second semestre. Il est pourtant évident que les ventes du 30 juin et du 1er juillet sont voisines dans le temps. Supposons que le chiffre d'affaires dans une entreprise de biens intermédiaires lourds soit de 1100 MF au 1er semestre et de 900 MF au second, une vente de 100 MF ayant été conclue le 30 juin. Si celle-ci avait été repoussée au 1er juillet, ou avait été enregistrée au 1er juillet bien que conclue précédemment, les chiffres d'affaires mesurés des 1er et 2<sup>e</sup> semestres auraient été égaux à 1000 MF. Le résultat est dans les deux cas assez différent: dans le premier on a enregistré une chute de l'activité au 2<sup>e</sup> semestre, et dans le second cas, un maintien.

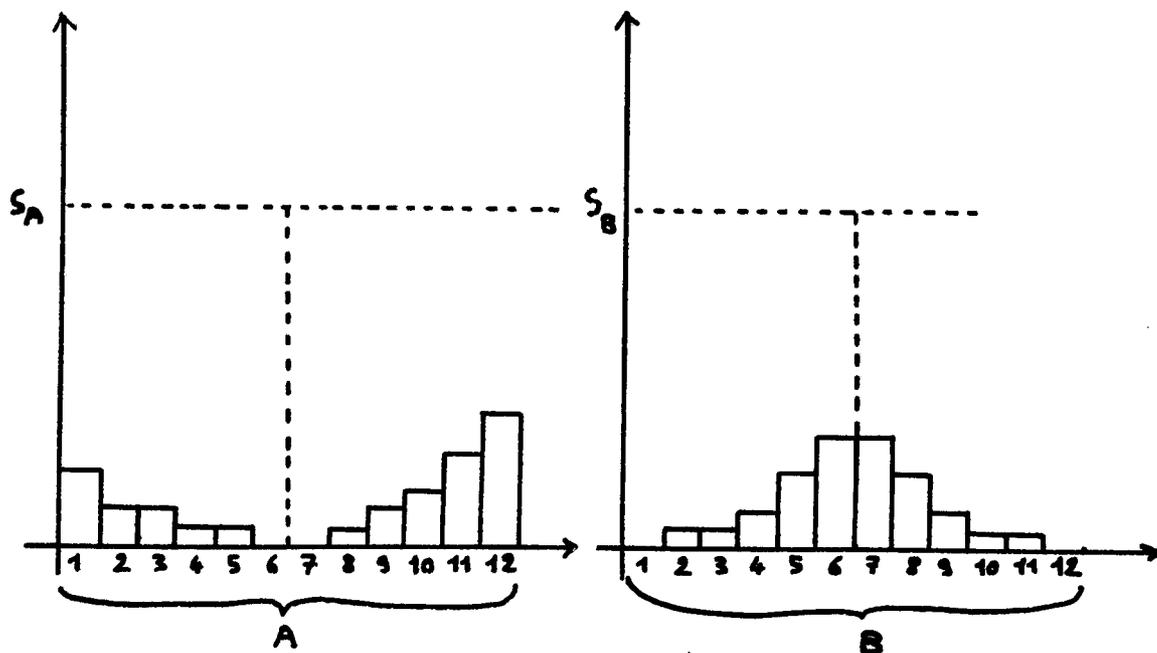
On doit donc en fait se dégager de la notion de date d'un événement pour retenir une notion plus large que nous nommerons provisoirement "zone de temps" c'est-à-dire un ensemble de dates au cours desquelles l'événement aurait pu se produire. Pour reprendre l'exemple précédent, la zone de temps propre à la vente évoquée s'étend peut être de la mi-juin à la mi-juillet. La vente aurait pu survenir presque n'importe quand entre ces deux dates, les efforts étant dosés pour qu'elle soit conclue vers le milieu de cette zone.

On peut être tenté de critiquer un tel point de vue et penser: ce n'est pas parce qu'un événement présente un caractère aléatoire qu'il ne faut pas procéder à son inscription dans une période précise. Il n'en est rien car ce qui est en cause ici, ce n'est pas seulement le hasard qui pèse sur la réalisation de l'événement, c'est aussi l'action que l'on a menée pour que celui-ci se produise, c'est le but poursuivi. Reprenons notre exemple. La vente de 100 MF du 30 juin aurait certes pu survenir le 1er juillet, mais dans les deux cas il se serait agi de la même vente pour laquelle une même action commerciale aurait été menée en vue d'une conclusion aux alentours de la fin juin ou du début juillet. Il

n'y a donc pas plus de raisons de l'affecter à juin plutôt qu'à juillet, au premier semestre plutôt qu'au second.

Il y a évidemment une manière simple d'échapper au problème posé en agrégeant les périodes dont la frontière fait litige. Par l'exemple précédent nous allons montrer qu'il est vain d'envisager cette procédure. En effet, en additionnant\* les ventes du 1er et du 2ème semestre, on trouve un résultat qui ne varie plus en fonction de la date de la vente puisqu'il se monte à 2000 MF que la vente se produise en juin ou en juillet. Mais cette méthode est triviale car elle revient à négliger le problème en supprimant les sous-périodes. Toute l'information qu'elles contenaient est perdue. Elle ne fait que repousser la question plus loin, c'est-à-dire au niveau des périodes plus longues : les années. La question se reposera pour les ventes conclues en fin ou en début d'année quoique avec moins d'acuité puisque l'importance relative d'un évènement est d'autant plus faible qu'il est rapporté à une période plus longue.

A titre de résumé, une représentation graphique illustrera les problèmes soulevés dans cette première partie. Nous représenterons en abscisse le temps sur une période et en ordonnée la grandeur d'un phénomène économique (ventes, dépenses) à chaque date de la période. Un point ayant pour abscisse le milieu de la période aura pour ordonnée le total des grandeurs économiques de la période.



Nous avons volontairement choisi deux périodes d'égale durée et dont les sommes  $S_A$  et  $S_B$  des quantités économiques soient identiques. La période A a été choisie de telle manière qu'une grande part de son activité soit réalisée près de ses bornes et près du centre pour la période B. Alors, un déplacement même limité des dates retenues comme bornes de A et B va provoquer une chute sensible de  $S_A$  tandis que  $S_B$  sera très peu affectée. On peut donc dire que le phénomène "A", représenté par la grandeur  $S_A$  est plus faiblement lié à la période A que le phénomène "B" ne l'est à la période B.

C'est cet effet qu'il faut prendre en compte dans le calcul de la valeur  $S$  à attacher à une période. Nous allons tenter de le faire dans la deuxième partie.

## 2ème PARTIE - PROPOSITION D'UTILISATION DE LA THEORIE DES SOUS-ENSEMBLES FLOUS.

La première partie de cette note a montré qu'une définition trop stricte des périodes économiques est néfaste. Il convient donc de l'assouplir pour appréhender la complexité de la réalité dans toute sa richesse. C'est ici que la théorie des sous-ensembles flous vient apporter une solution. L'idée consiste à renoncer à la dichotomie stricte appartenance-non appartenance d'un élément à un sous-ensemble. Il est possible de considérer qu'un élément appartient plus ou moins à un sous-ensemble [1], [3], [5], [7], [9].

Nous allons considérer qu'un acte économique est situé, nous dirons appartient, plus ou moins à une période donnée. Il lui appartiendra beaucoup s'il est situé en son milieu ; il lui appartiendra peu s'il est placé vers le début ou la fin, c'est-à-dire aux extrémités de la période. Dans ce deuxième acte, l'acte économique appartiendra aussi un peu à la période contigüe.

Envisageons donc une collection d'actes économiques de même nature. Nous noterons  $x_t$  le montant des actes économiques survenus à la date  $t$ .

ex :  $x_t$  est le montant des ventes du 6 mai.

Dans l'approche classique, un acte économique de montant  $x$  survenu à la date  $t$  est un élément de l'ensemble des actes économiques survenus dans l'intervalle de temps étudié. Cet ensemble est noté  $E_T$ .

$$E_T = \{ x_t / t \in ]\hat{t}, \hat{t}[ \}$$

ex :  $E_T$  est l'ensemble des ventes réalisées chaque jour depuis la création de l'entreprise jusqu'à la date précédente.

Considérons un découpage de  $\hat{t}, \check{t}$  en périodes, que nous appellerons périodes de référence.

Dans le non flou, on dit que  $x_t$  appartient à  $A_{[t', t'']}$ , sous-ensemble des actes économiques qui ont eu lieu durant une certaine période  $[t', t'']$ , incluse dans  $\hat{t}, \check{t}$ , si la date  $t$  est comprise dans  $[t', t'']$ . Soit :

$$A_{[t', t'']} = \left\{ x_t / t \in [t', t''] \right\}$$

On a évidemment :

$$A_{[t', t'']} \subset E_T$$

et  $A_{[t', t'']}$  sera appelé période économique relative à la période de référence  $[t', t'']$ .

$$\text{Alors : } x_t \in A_{[t', t'']} \Leftrightarrow t \in [t', t'']$$

On pourra donc définir une fonction d'appartenance  $\mu$ , telle que :

$$\mu : E_T \rightarrow [0, 1]$$

$$\begin{aligned} \mu_{A_{[t', t'']}}(x_t) = 1 &\Leftrightarrow x_t \in A_{[t', t'']} , \forall x_t \\ \mu_{A_{[t', t'']}}(x_t) = 0 &\Leftrightarrow x_t \notin A_{[t', t'']} , \forall x_t \end{aligned}$$

Par la suite, nous envisagerons seulement des périodes  $[t', t'']$  jointives et ne se recouvrant pas, c'est-à-dire formant une partition de  $\hat{t}, \check{t}$ .

Avec l'introduction de la théorie des sous-ensembles flous, on va continuer à définir le sous-ensemble des actes économiques relatifs à une période donnée  $[t', t'']$ , mais la fonction d'appartenance ne sera plus binaire. Elle pourra prendre toute valeur comprise entre 0 et 1 :

$$\mu_{A_{[t', t'']}}(x_t) \in [0, 1]$$

$x_t$  appartient "plus ou moins" à  $A_{[t', t'']}$

Il faut noter que  $x_t$  peut appartenir ainsi à  $A_{[t', t'']}$  sans que  $t$  appartienne à l'intervalle  $[t', t'']$ . Autrement dit, un acte économique peut appartenir à une période économique sans que la date qui lui est rattachée soit comprise dans la période de référence. Cette dernière notion perd d'ailleurs sa signification dans le cas flou, la fonction d'appartenance pouvant parfaitement être, en théorie, nulle sur l'intervalle de temps  $[t', t'']$ . Mais nous verrons en troisième partie que la forme particulière des fonctions d'appartenance pour la

classe des problèmes étudiés ici (séries économiques) fait que l'on peut encore parler de période de référence en attachant un sens concret à ces mots.

On peut se demander quelle est la valeur  $x_{A[t', t'']}$  affectée à  $A[t', t'']$  c'est-à-dire la valeur, la part, affectée à une période donnée.

Pour répondre à cette question, considérons trois périodes, partition de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{T}$  :

$$\mathcal{T} = ]t, t'[ \cup ]t', t''[ \cup ]t'', \mathcal{Y}[$$

et notons :

$$\begin{aligned} t_1/t_1 &\in ]t, t'[ \quad \text{et } t_1 \notin ]t', \mathcal{Y}[ \\ t_2/t_2 &\in ]t', t''[ \quad \text{et } t_2 \notin ]t, t'[ \\ &\quad \quad \quad t_2 \notin ]t'', \mathcal{Y}[ \\ t_3/t_3 &\in ]t'', \mathcal{Y}[ \quad \text{et } t_3 \notin ]t, t''[ \end{aligned}$$

Ces trois périodes sont donc disposées de la manière suivante :



Alors dans le cas non flou :

$$\begin{aligned} x_{A[t', t'']} &= \sum_{t_2} x_{t_2} \\ &= \sum_{t_1} x_{t_1} \cdot \mu_{A[t', t'']} (x_{t_1}) + \sum_{t_2} x_{t_2} \cdot \mu_{A[t', t'']} (x_{t_2}) \\ &\quad \quad \quad + \sum_{t_3} x_{t_3} \cdot \mu_{A[t', t'']} (x_{t_3}) \end{aligned}$$

$$\text{car } \mu_{A[t', t'']} (x_{t_1}) = \mu_{A[t', t'']} (x_{t_3}) = 0$$

$$\text{et } \mu_{A[t', t'']} (x_{t_2}) = 1$$

$$\text{donc } x_{A[t', t'']} = \sum_{t \in \mathcal{T}} x_t \cdot \mu_{A[t', t'']} (x_t)$$

que nous noterons :

$$\boxed{x_{A_i} = \sum_{t \in \mathcal{T}} x_t \cdot \mu_{A_i} (x_t)} \quad (1)$$

afin d'alléger la notation.

Ainsi, une période économique, notée  $A_i$ , apparaît comme étalée en réalité sur toutes les dates  $t$  appartenant à  $]t, t[$ , avec une fonction d'appartenance comprise entre 0 et 1 pour chacune de ces dates. Il n'y a plus stricte affectation d'un acte à une période. Celui-ci appartient plus ou moins, et y compris d'une manière nulle, à toutes les périodes économiques  $A_i$ .

Il est clair que  $x_{A_i}$  n'a pas en général la même valeur en théorie du non flou et en théorie du flou, faute de quoi la nouvelle approche serait parfaitement inutile. Or, on pourrait très bien ne pas chercher à aller plus avant dans la définition de  $x_{A_i}$  et se contenter de ce que l'on a pour apprécier l'imprécision des périodes économiques en formant divers indicateurs. Déjà la richesse de l'information apportée serait grande en permettant d'aborder toute une série de problèmes avec cette nouvelle vision du temps.

Mais il existe une classe particulière de problèmes qui nécessitent des hypothèses supplémentaires sur la fonction d'appartenance. Ce sont ceux posés par la mesure des flux monétaires et financiers qui doivent se plier aux règles élémentaires de la comptabilité. Par conséquent, il faut que la conservation des sommes en jeu soit maintenue, sinon cette approche conduirait à des erreurs. Il faut donc poser une contrainte qui garanti cette condition de conservation de la valeur de chaque  $x_t$ , c'est-à-dire pour toutes les dates  $t$ . Mais auparavant déterminons ce qu'il advient d'une somme  $x_t$  par le passage au flou.

Pour cela, considérons les trois périodes  $]t, t[$ ,  $[t', t''[$ ,  $[t'' , t[$ , indicées respectivement 1, 2 et 3 et considérons une date  $t$  appartenant à  $[t', t''[$

Dans le cas non flou, une somme  $x_t$  est entièrement affectée à la période  $[t', t''[$  puisque  $t \in [t', t''[$ :

$$\begin{aligned} x_t &= x_t \cdot 0 + x_t \cdot 1 + x_t \cdot 0 \\ &= x_t \cdot \mu_{A_1}(x_t) + x_t \cdot \mu_{A_2}(x_t) + x_t \cdot \mu_{A_3}(x_t) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{x_t = \sum_i x_t \cdot \mu_{A_i}(x_t)} \quad (2)$$

Dans le cas flou, cette formule reste applicable mais :

$$\mu_{A_i}(x_t) \in [0, 1]$$

La contrainte devient, en notant ici  $\bar{x}_t$  la valeur de  $x_t$  dans le cas non flou et  $\tilde{x}_t$  la même dans le cas flou (valeur qui n'a rien elle-même de flou):

$$\bar{x}_t = \tilde{x}_t$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}_t = \sum_i \bar{x}_t \cdot \mu_{A_i}(x_t)$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}_t = \bar{x}_t \sum_i \mu_{A_i}(x_t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_i \mu_{A_i}(x_t) = 1} \quad (3)$$

Ainsi, cette contrainte conduit à l'interprétation suivante de l'utilisation du flou : la fonction d'appartenance est une ventilation d'une somme entre diverses périodes sans que rien n'en soit perdu. Elle s'interprête donc comme une imputation. La partie de  $x_t$  imputée à une  $i^{\text{ème}}$  période quelconque  $[t', t'' [$  est :

$$x_t \cdot \mu_{A_i}(x_t) \text{ que } t \text{ appartienne ou non à } [t', t'' [$$

Dans le cas non flou il n'y a aucune imputation :  $x_t$  est entièrement affecté à la période où se trouve  $t$  et à aucun autre.

La contrainte (3) ci-dessus traduit le fait suivant : la fonction d'appartenance n'est pas subjective, comme chez M. NOWAKOWSKA [5] . Elle ne traduit pas une impression psychologique (par exemple l'impression d'étalement des effets d'une dépense sur plusieurs périodes), mais une réalité (l'affectation de la dépense elle-même à plusieurs périodes, dans le respect des règles comptables élémentaires).

En effet, l'approche de M. NOWAKOWSKA vise à prendre en compte, du point de vue psychologique, la "confusion" qui peut exister dans l'esprit humain vis à vis de la date relative de deux évènements : l'un peut être perçu comme suivant l'autre alors même qu'il le précède en réalité. Cet auteur définit pour cela un ensemble  $T$  des temps, dont les éléments sont des dates  $t$  et un ensemble  $Z$  des évènements (bien réels)  $A, B, C$ . Ensuite, elle définit une relation binaire floue :

$$Z \times Z \longmapsto [0, 1]$$

telle que

$W_t(A, B)$  représente le degré selon lequel  $A$  se produit plus tôt que  $B$ , le jugement étant fait à la date  $t$ .

La relation floue (qui est en réalité, une relation trinaire  $T \times Z \times Z \longmapsto [0, 1]$ ) indique donc le degré selon lequel un évènement  $A$  est perçu comme s'étant produit, se produisant, allant se produire, plus tôt qu'un autre évènement  $B$ , cette perception étant mesurée à  $t$ . A partir de là,

et avec l'aide de différents indicateurs, M. NOWAKOWSKA met en évidence les situations dans lesquelles les chances d'une inversion entre le perçu et le réel sont les plus grandes.

Plusieurs remarques sont à faire sur ce travail. D'abord, la relation floue représente bien une grandeur subjective, non soumise à contraintes particulières. Ensuite le flou porte sur les événements eux-mêmes ce qui n'est pas le cas dans notre étude où les événements ne sont pas flous : leur date est connue, leur montant aussi, précisément. C'est leur appartenance aux périodes économiques qui est floue. Prenons un exemple pour illustrer cette différence. La production du 30 juin est indiscutablement située avant celle du 1er juillet. Pour nous, il s'agit de savoir si on l'affecte au 1er ou au 2ème trimestre. Pour M. NOWAKOWSKA, il va s'agir de savoir si un événement qui s'est passé le 30 juin est perçu, par exemple le 1er décembre, comme s'étant passé avant un autre événement qui s'est déroulé le 1er juillet.

Arrivé à ce stade de l'exposé, il convient de s'interroger sur les possibilités de calcul économique que donne une telle méthode basée sur le théorème de sous-ensembles flous. En effet, s'il est intéressant d'avoir une vision nouvelle du temps, il est primordial que celle-ci possède un caractère opérationnel. Pour cela, il faut que non seulement elle permette de décrire les périodes économiques mais qu'aussi elle permette de calculer sur elles, de les additionner, etc... sans remettre en cause leur caractère flou.

Pour ne pas trop nous étendre sur la question, prenons le cas de l'addition. On peut additionner des périodes économiques relatives à des périodes de temps consécutives (ex : additionner les ventes des douze mois de l'année) ou relatives à des périodes de référence identiques (ex : additionner les productions de plusieurs usines pour le même mois). Ces additions peuvent être faites en négligeant la nature floue des périodes, simplement en travaillant sur les  $x_{A_i}$  obtenus à l'aide de la relation (1). Dans le premier cas, on fera :

$$x_{A_1} + x_{A_2} + x_{A_3} + \dots + x_{A_{12}}$$

et dans le second :

$$x_{A_i} + x_{B_i} + x_{C_i} + \dots$$

Ce calcul fournit bien les montants totaux affectés mais non la fonction d'appartenance résultante. On ignore tout du caractère flou du résultat.

Pour le retrouver, il faut calculer directement à partir des sous-ensembles

flous. Dans la mesure où les  $A_i$  possèdent tous une date  $t$  pour laquelle la fonction d'appartenance prend la valeur 1, on pourrait penser les additionner à la manière de nombres flous [1]. Mais il n'en va pas ainsi du fait de l'existence des contraintes comme (1) ou (3).

Dans le cas le plus simple, celui de l'addition horizontale de périodes successives, à chaque date  $t$  correspond une seule grandeur  $x_t$ . Par conséquent, l'addition porte seulement sur les  $\mu_{A_i}(x_t)$ . Définissons deux périodes économiques  $A_i$  relatives à des périodes de référence successives, en appelant  $i'$  la période  $[t', t''[$  et  $i''$  la période  $[t'', t'''[$ :

$$A_{i'} = \left\{ (x_t, \mu_{A_{i'}}(x_t)) / t \in T \right\}$$

$$A_{i''} = \left\{ (x_t, \mu_{A_{i''}}(x_t)) / t \in T \right\}$$

Définissons aussi :

$$A_j = A_{i'} + A_{i''}$$

alors

$$A_j = \left\{ (x_t, \mu_{A_j}(x_t)) / t \in T \right\}$$

avec :

$$x_t \cdot \mu_{A_j}(x_t) = x_t \cdot \mu_{A_{i'}}(x_t) + x_t \cdot \mu_{A_{i''}}(x_t)$$

qui signifie que la somme imputée à  $A_j$  est l'addition des sommes imputées à  $A_{i'}$  et à  $A_{i''}$ . On en tire évidemment :

$$\mu_{A_j}(x_t) = \mu_{A_{i'}}(x_t) + \mu_{A_{i''}}(x_t)$$

et donc si

$$A_{[t', t''']} = \left\{ (x_t, \mu_{A_{[t', t''']}}(x_t)) / t \in T \right\}$$

on a

$$A_j = A_{[t', t''']}$$

Dans le cas plus complexe de l'addition verticale de périodes économiques relatives à la même période de référence, plusieurs grandeurs  $x_t$  correspondent à une même date  $t$ . L'addition porte donc à la fois sur les  $\mu$  et les  $x$  mais elle va se faire date à date. On va calculer, pour chaque date  $t$ , la grandeur  $x_t$  résultante, et sa valeur  $\mu(x_t)$  associée, à partir des  $x_t$  et  $\mu(x_t)$  des périodes économiques en jeu, à la même date  $t$ . Soit, en appelant  $i$  la période  $[t', t''[$ :

$$A'_i = \left\{ (x'_t, \mu_{A'_i}(x'_t)) / t \in T \right\}$$

$$A''_i = \left\{ (x''_t, \mu_{A''_i}(x''_t)) / t \in T \right\}$$

et soit :

$$B_i = A'_i + A''_i$$

alors

$$B_i = \left\{ (y_t, \mu_{B_i}(y_t)) / t \in T \right\}$$

avec :

$$y_t \cdot \mu_{B_i}(y_t) = x'_t \cdot \mu_{A'_i}(x'_t) + x''_t \cdot \mu_{A''_i}(x''_t) \quad (4)$$

Cette relation exprime simplement le fait suivant : la somme imputée à  $B_i$  est égale à l'addition des sommes imputées à  $A'_i$  et  $A''_i$ . On en tire, en utilisant la relation (2) :

$$\sum_i y_t \cdot \mu_{B_i}(y_t) = \sum_i x'_t \cdot \mu_{A'_i}(x'_t) + \sum_i x''_t \cdot \mu_{A''_i}(x''_t)$$

$$\Leftrightarrow y_t = x'_t + x''_t$$

Il y a donc addition simple des sommes en jeu. La relation (4) donne alors :

$$\mu_{B_i}(y_t) = \frac{x'_t}{x'_t + x''_t} \mu_{A'_i}(x'_t) + \frac{x''_t}{x'_t + x''_t} \mu_{A''_i}(x''_t)$$

La valeur  $\mu$  résultante est donc la moyenne des valeurs  $\mu$  de départ, pondérée par les parts de chaque grandeur  $x_t$  dans le total des grandeurs en jeu.

Remarque :

Une méthode telle que celle que nous venons de décrire dans cet article n'est pas sans évoquer une procédure de mise en forme des données comme les "moyennes mobiles".

En effet, la méthode des moyennes mobiles consiste, dans une suite discrète de grandeurs datées, à effectuer la moyenne de montants se rapportant à des dates successives et contiguës. Cette moyenne vient s'insérer, dans une nouvelle suite, à l'emplacement de la valeur centrale. Après un glissement d'une date, le même calcul est répété. Prenons l'exemple d'une moyenne mobile sur trois dates. Considérons une suite d'actes économiques consécutifs dans le temps et notée :

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots$$

Elle devient :

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3}, \frac{x_3 + x_4 + x_5}{3}, \dots$$

On peut donc dire qu'il y a imputation du tiers de la valeur de chaque date à la date qui précède ou suit :

$$\begin{array}{cccc} \mu_{A_2}(x_1) = \frac{1}{3} & \mu_{A_2}(x_2) = \frac{1}{3} & \mu_{A_2}(x_3) = \frac{1}{3} & \mu_{A_2}(x_4) = 0 \dots \\ \mu_{A_3}(x_1) = 0 & \mu_{A_3}(x_2) = \frac{1}{3} & \mu_{A_3}(x_3) = \frac{1}{3} & \mu_{A_3}(x_4) = \frac{1}{3} \dots \\ \mu_{A_4}(x_1) = 0 & \mu_{A_4}(x_2) = 0 & \mu_{A_4}(x_3) = \frac{1}{3} & \mu_{A_4}(x_4) = \frac{1}{3} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Il y a donc bien sur ce point analogie avec la méthode du flou. Toutefois, la nature même des méthodes diffère.

- Dans les moyennes mobiles, il n'y a pas de périodes, seulement des dates. Ou, plutôt, les périodes sont assimilées à des points : il y a un seul évènement et une seule date par période. Les périodes sont non floues et ce sont elles-mêmes qui sont combinées. Il n'y a pas de vision nouvelle de la notion de période.

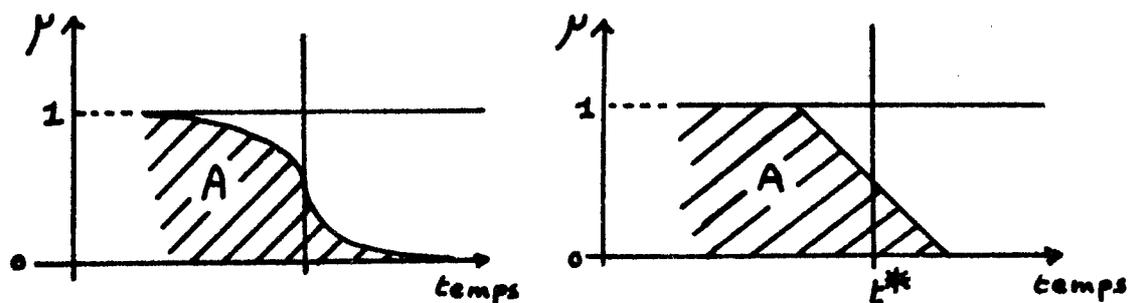
- Avec le flou, les périodes ont une étendue propre ; elles ne sont pas réduites à un point. Ce sont les évènements qu'elles contiennent qui font l'objet d'une imputation, et non elles-mêmes. Il y a donc modification de la notion de période puisque le contenu est modifié.

### 3ème PARTIE - MODALITES D'APPLICATION.

Toutes les formes de la fonction d'imputation sont possibles. Toutefois, les exemples que nous avons fourni au début de cette note montrent que l'imputation d'une somme relative à un acte économique d'une période donnée décroît au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre de la période dans laquelle cet acte s'est produit. Cette décroissance peut bien entendu être linéaire ou non.

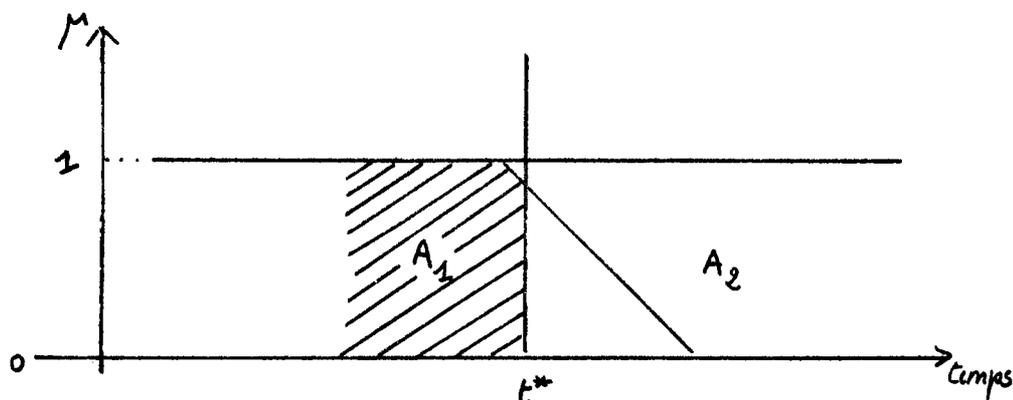
Pour la représenter, on peut former un diagramme sur lequel on porte le temps en abscisse ; en ordonnée, on fait figurer la droite  $\mu = 1$  qui représente l'imputation à 100 % d'une somme ou encore une fonction d'appartenance maximale, c'est-à-dire unitaire. Nous nous limiterons ici à des imputations mettant en jeu deux périodes consécutives mais il serait possible d'utiliser un nombre quelconque de périodes.

L'imputation des sommes voisines d'une date  $t$  marquant la limite de deux périodes de référence peut alors prendre les aspects suivants, parmi d'autres :

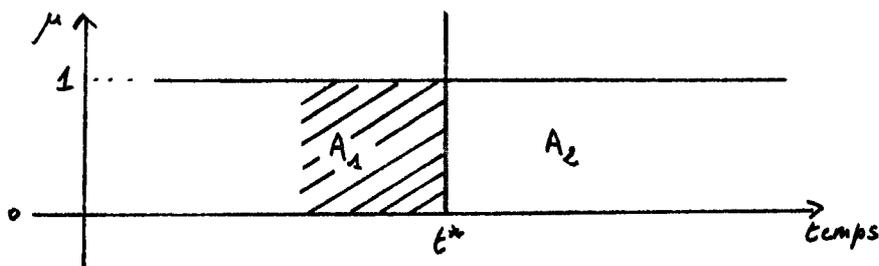


Il n'y a donc pas nécessairement symétrie autour de la date de référence.

Par exemple :



Pourtant, cette propriété peut-être intéressante. En effet, si l'on veut revenir au cas non flou, on doit pouvoir retrouver la situation de départ, c'est-à-dire celle qui se présentait avant toute imputation et dont le diagramme prend nécessairement la forme suivante :



On peut pour cela se fixer la règle suivante : un évènement qui dans le cas flou appartient majoritairement à une période lui est attribuée dans le cas non flou. Or, la majorité est représentée par la valeur  $\mu \leq 0,5$ . Donc si

$$\mu_{A_i}(x_t) \leq 0,5 \quad \text{dans le cas flou}$$

$x_t$  est attribué à  $A_i$  dans le cas non flou et on aura :

$$\begin{array}{ll} \mu_{A_i}(x_t) \leq 0,5 & \Rightarrow \mu_{A_i}(x_t) = 1 \\ \text{dans le cas flou} & \text{dans le cas non flou} \end{array}$$

Cette procédure revient à chercher le sous-ensemble non flou le plus proche d'un sous-ensemble flou.

Il est évident que  $x_t$  ne peut être attribué qu'à un et un seul  $A_i$ , sauf dans le cas où  $\mu_{A_i}(x_t) = \mu_{A_j}(x_t) = 0,5$ , pour lequel on doit convenir d'une règle d'attribution à  $A_i$  ou  $A_j$ . Ainsi, il faut que  $\mu$  prenne la valeur 0,5 à la

date  $t$  qui sert de borne à la période de référence afin que celle-ci retrouve les événements qu'elle contenait au départ. Les symétries par rapport à cette date de la fonction  $\mu$  telle que nous l'avons définie correspondent à ce critère, mais d'autres configurations y satisfont.

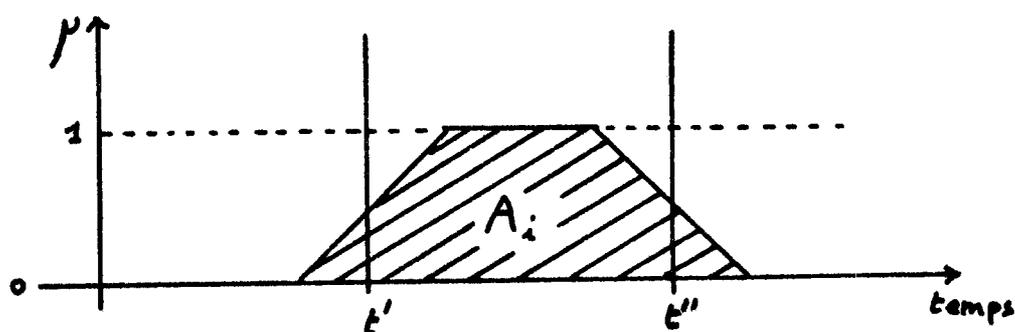
La forme retenue pour la fonction d'imputation dépend de l'usage que l'on fait des données. En effet, trois cas sont possibles suivant que les dépenses de la période suivante ou précédente sont connues ou non au moment de l'imputation. Ces trois cas correspondent respectivement à l'étude ex post de séries économiques, à l'établissement de tableaux de bord et enfin à la budgétisation. Le premier constituant le cas général, nous l'étudierons d'abord.

#### A) Cas général : étude ex post de séries économiques.

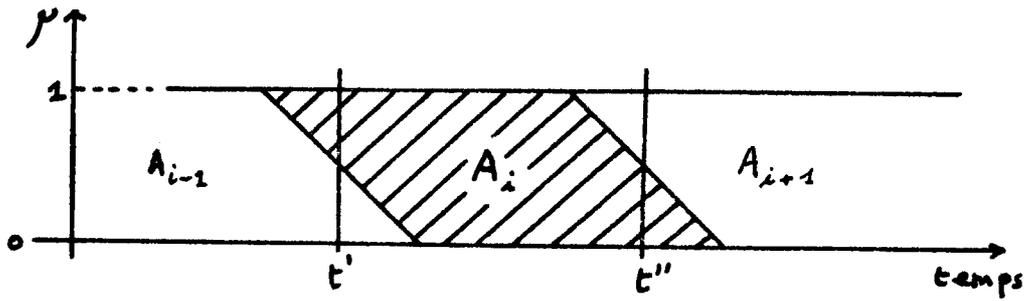
Nous considérerons ici que l'observateur se situe à plusieurs périodes après celle qu'il étudie. Par conséquent, les actes économiques et les sommes qu'ils mettent en jeu sont connus pour la période étudiée, et aussi pour les périodes précédentes ou suivantes. Il est donc possible d'effectuer une imputation en amont ou en aval de la période étudiée : les sommes situées au voisinage de ses extrémités feront l'objet de l'imputation.

On voit donc que l'on est conduit à rattacher à la période  $A_i$  des sommes relatives aux périodes suivante et précédente. Réciproquement une partie des sommes de la période  $A_i$  est délaissée. On peut tracer le diagramme de la fonction

$\mu$  relative à la seule période de référence  $[t', t'']$ , par exemple en prenant une décroissance linéaire avec le temps afin de simplifier :

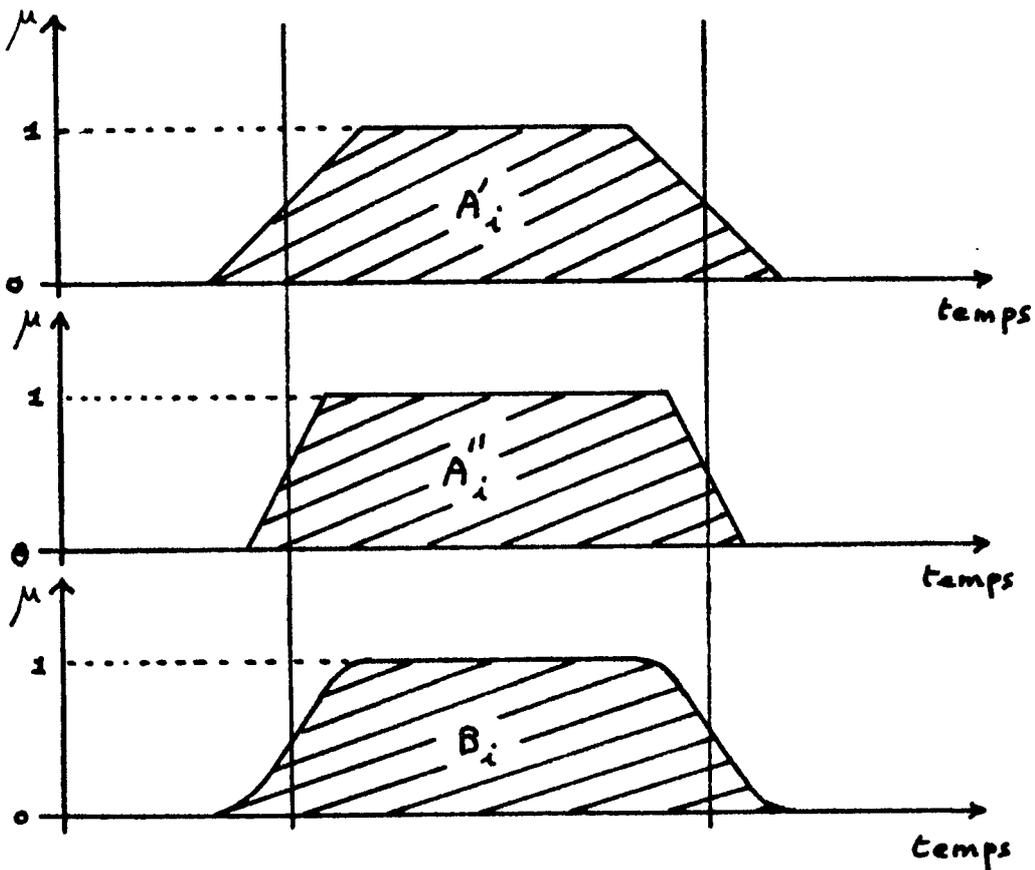


On peut voir que  $\mu_{A_i}$  est en général centrée sur la période de référence  $[t', t'']$ . Pour un ensemble  $A_i$  de périodes économiques successives,  $A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots$ , le diagramme sera le suivant :



Il faut noter que la forme générale des fonctions  $\mu$  n'est pas constituée de segments linéaires. L'addition verticale de périodes économiques relatives à la même période de référence amène, dès lors que les  $\mu$  respectent les conditions décrites ci-dessus, à une configuration en "S" au voisinage des dates de référence  $t'$  ou  $t''$ . (voir relation (4))

Ex : prenons  $x'_t = x''_t$ ,  $\forall t$  et  $A'_i + A''_i = B_i$



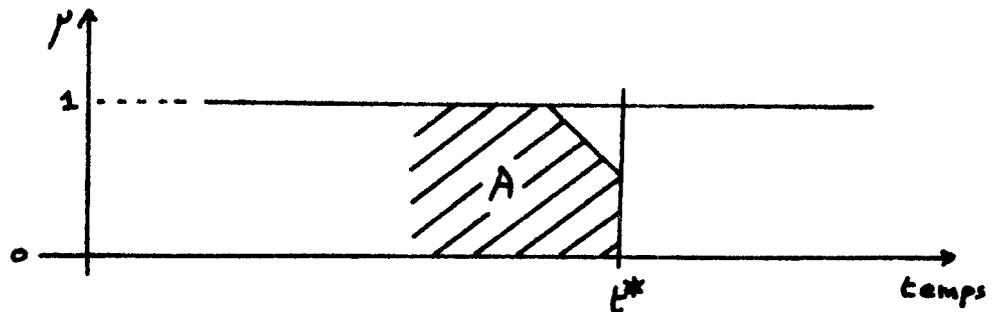
## B) Cas particuliers.

## 1) Etude sur le vif de résultats économiques.

Un exemple typique de ce type d'étude est l'établissement d'un tableau de bord (8). On sait que l'une des conditions essentielles pour qu'un tableau de bord soit opérationnel est qu'il soit disponible très rapidement, c'est-à-dire au cours de la période suivant celle qui est surveillée. En conséquence, on est obligé d'arrêter la collecte des statistiques à la date de fin de période. Une imputation portant sur le début de la période suivante est donc difficile.

Il est dangereux de tenter une imputation sur l'avenir car elle porterait sur des quantités prévues, ce qui reviendrait à incorporer dans les réalisations d'une période de simples prévisions, c'est-à-dire en fin de compte, à vendre la peau de l'ours avant de l'avoir tué (à moins d'adopter une optique probabiliste pour les dates situées dans l'avenir, ce qui combinerait l'aléa et le flou). Ainsi, la forme de la fonction d'appartenance se trouve affectée : elle prend obligatoirement la valeur zéro au-delà de la date de fin de période.

Exemple :



Mais on notera que dans ce cas, la contrainte (3) n'est pas respectée au voisinage de  $t^*$ .

## 2) Prévisions sur les périodes futures.

La planification et la budgétisation entrent dans ce cadre. Les grandeurs relatives à chaque période future sont prévues. Bien souvent, leur localisation précise dans le temps n'est pas fixée. Seule l'appartenance à telle ou telle période peut être indiquée : par exemple, le volume des ventes mois par mois pour l'année à venir.

Dans ces conditions, il n'y a pas lieu, en général d'utiliser une fonction d'appartenance et une imputation : ou plutôt les sommes relatives à une période donnée lui sont imputées en totalité et cette période ne reçoit en imputation aucune autre somme.

## C) Problèmes pratiques.

Sur le plan de la mise en oeuvre pratique de la méthode, la principale difficulté consiste à choisir les valeurs à donner à la fonction  $\mu$ . Seule une concertation entre le statisticien, le service qui est à l'origine des informations et celui qui va les utiliser est susceptible de permettre un choix efficace pour la gestion de l'organisation. La réalisation concrète ne devrait pas poser de problème compte tenu de l'informatisation croissante des entreprises. La méthode ne fait appel qu'à des opérations arithmétiques simples : addition et multiplication. Pour chaque période traitée, il faudra déterminer un calendrier auquel sera associé une table des valeurs de la fonction  $\mu$  pour chaque date imputée à cette période.

Remarquons qu'il est possible, par le jeu des valeurs de  $\mu$ , de compenser la durée inégale des périodes.

CONCLUSION

L'utilisation de la théorie des sous-ensembles flous pour la prise en compte des périodes économiques concerne par ordre d'intérêt décroissant le passé, le présent et l'avenir. Elle vise donc à traduire les impondérables qui affectent le passage au réel en vue d'une utilisation future des données.

Par delà un simple perfectionnement technique de la statistique, la méthode constitue une redéfinition de la notion de temps. Elle conduit à séparer l'évènement de la date qu'on lui attribue habituellement pour le rattacher, plus ou moins, à une ou plusieurs périodes. La période n'est plus alors seulement l'espace de temps entre deux dates, c'est aussi l'ensemble des évènements qui lui sont liés.

Il est bien certain que l'imputation dans le temps préexistait au flou, ou au moins une approche voisine comme les moyennes mobiles, mais la théorie des sous-ensembles flous a l'avantage de fournir un support théorique et une justification.

Enfin, cette approche peut-être généralisée et, en particulier, appliquée à d'autres disciplines que l'économie et la gestion, quitte à se dégager de certaines des contraintes exposées.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] DUBOIS (D). et PRADE (H). : "Fuzzy sets and systems. Theory and applications", Academic Press, New-York, 1980.
- [ 2 ] GRAY (J)., JOHNSTON (K.S). : "Accounting and Management Action", Mac-Graw-Hill, 1973.
- [ 3 ] KAUFMANN (A). : "Introduction à la théorie des sous-ensembles flous", Masson, Paris, 4 vol., 1973-1977.
- [ 4 ] NOWAKOWSKA (M). : "A new theory of time : generation of time from fuzzy temporal relations", BUSEFAL, n° 6.
- [ 5 ] PONSARD (C). : "L'imprécision et son traitement en analyse économique", Revue d'Economie Politique, 1975, n° 1.
- [ 6 ] PONSARD (C). : "Aléa et flou", Mélanges offerts à Henri Guitton, Sirey-Dalloz, Paris, 1977.
- [ 7 ] PREVOT (M). : "Sous-ensembles flous : une approche théorique", Sirey, Collection de l'I.M.E., n° 14, 1977.
- [ 8 ] SULZER (J.R). : "Comment construire le tableau de bord. Les objectifs et les méthodes d'élaboration", Dunod, coll. Entreprise, Paris, 1975.
- [ 9 ] ZADEH (L.A). : "Fuzzy Sets", Information and Control, 1965, n° 8.