



L'équilibre spatial du consommateur dans un contexte précis

Claude Ponsard

► To cite this version:

Claude Ponsard. L'équilibre spatial du consommateur dans un contexte précis. [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1980, 31 p., bibliographie. <hal-01527221>

HAL Id: hal-01527221

<https://hal.science/hal-01527221v1>

Submitted on 24 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

RP 210 (13)

I.M.E.

ÉQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU C.N.R.S.

DOCUMENT DE TRAVAIL

N°41

L'EQUILIBRE SPATIAL DU CONSOMMATEUR
DANS UN CONTEXTE IMPRECIS

C.N.R.S.
Centre de Documentation
Scientifique et Technique
Bibliothèque

Claude PONSARD

Février 1980

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ÉCONOMIQUES

UNIVERSITÉ DE DIJON

FACULTÉ DE SCIENCE ÉCONOMIQUE ET DE GESTION

4, BOULEVARD GABRIEL — 21000 DIJON

27 OCT. 1980

N°41

L'EQUILIBRE SPATIAL DU CONSOMMATEUR
DANS UN CONTEXTE IMPRECIS

C N R S.

Claude PONSARD

Centre de Documentation Scientifique et Technique
Février 1980
Bibliothèque

Cette étude fera l'objet d'une communication au Quatrième Colloque annuel de l'Association Canadienne des Sciences Régionales, organisé en collaboration avec l'Association des Sciences Régionales de Langue Française, à Montréal, Québec, les 5, 6 et 7 juin 1980.

Le but de cette Collection est de diffuser rapidement une première version de travaux poursuivis dans le cadre de l'I.M.E. afin de provoquer des discussions scientifiques.

Les lecteurs désirant entrer en rapport avec un auteur sont priés d'écrire à:
Institut de Mathématiques Economiques - 4 bd Gabriel -
21000 DIJON (France)

TRAVAUX DEJA PUBLIES

- N°24 Pietro BALESTRA: Determinant and Inverse of a Sum of Matrices with Applications in Economics and Statistics (avril 1978)
- N°25 Bernard FUSTIER: Etude empirique sur la notion de région homogène (avril 1978)
- N°26 Claude PONSARD: On the Imprecision of Consumer's Spatial Preferences (avril 1978)
- N°27 Roland LANTNER: L'apport de la théorie des graphes aux représentations de l'espace économique (avril 1978)
- N°28 Emmanuel JOLLES: La théorie des sous-ensembles flous au service de la décision: deux exemples d'application (mai 1978)
- N°29 Michel PREVOT: Algorithme pour la résolution des systèmes flous (mai 1978)
- N°30 Bernard FUSTIER: Contribution à l'analyse spatiale de l'attraction imprécise (juin 1978)
- N°31 TRAN QUI Phuoc: Régionalisation de l'économie française par une méthode de taxinomie numérique floue (juin 1978)
- N°32 Louis De MESNARD: La dominance régionale et son imprécision, traitement dans le type général de structure (juin 1978)
- N°33 Max PINHAS: Investissement et taux d'intérêt. Un modèle stochastique d'analyse conjoncturelle (octobre 1978)
- N°34 Bernard FUSTIER, Bernard ROUGET: La nouvelle théorie du consommateur est-elle testable? (janvier 1979)
- N°35 Didier DUBOIS: Notes sur l'intérêt des sous-ensembles flous en analyse de l'attraction de points de vente (février 1979)
- N°36 Heinz SCHLEICHER, Equity Analysis of Public Investments: Pure and Mixed Game-Theoretic Solutions (April 1979)
- N°37 Jean JASKOLD GABSZEWICZ : Théories de la concurrence imparfaite : illustrations récentes de thèmes anciens (juin 1979).
- N°38 Bernard FUSTIER : Contribution à l'étude d'un caractère statistique flou (janvier 1980).
- N°39 Pietro BALESTRA : Modèles de régression avec variables muettes explicatives (janvier 1980)
- N°40 Jean-Jacques LAFFONT : Théorie des incitations - Un exemple introductif (février 1980)

SOMMAIRE

0 Introduction

1. Les ensembles de consommation

1.1. Cadre de l'analyse

1.2. L'ensemble des consommations localisées possibles

1.3. Le sous-ensemble flou des consommations localisées efficaces

2. Le comportement spatial du consommateur

2.1. Critère de choix du consommateur

2.2. La maximisation de l'utilité floue sous la contrainte de richesse

3. Extensions

3.1. Caractère multidimensionnel du choix

3.2. Choix du consommateur dans l'ensemble des caractéristiques des complexes de biens localisés

3.3. Introduction de contraintes sur les caractéristiques

3.4. Choix de la localisation du consommateur

4. Conclusion

5. Appendice

6. Bibliographie.

0 - INTRODUCTION

0.1. La théorie classique de l'équilibre du consommateur repose sur deux ensembles d'hypothèses particulièrement restrictives.

Elle admet d'abord implicitement que tous les biens de consommation sont localisés en un point unique où le consommateur est aussi implanté et où se réalise la consommation.

Elle postule ensuite que le consommateur dispose d'un pouvoir de discrimination parfait à l'égard des biens. Son comportement est précis: il optimise ses préférences, ou éventuellement il maximise son utilité, sous une contrainte de richesse.

0.2. L'objet de cette étude est de lever ces deux familles d'hypothèses portant sur l'espace économique des biens et de l'agent et sur la précision du comportement de ce dernier.

La demande individuelle porte sur des biens dispersés dans un espace de l'offre. Elle est formulée à partir d'un point donné, la résidence du consommateur, qui sert de point de référence dans son calcul économique quel que soit le lieu de réalisation matérielle de la consommation. Le point de demande ne doit pas être confondu, en effet, avec le lieu où la consommation est physiquement effectuée.

De plus, le comportement spatial du consommateur est imprécis. L'analyse de la demande individuelle floue prolonge et complète l'étude de l'imprécision des préférences spatiales du consommateur et de l'utilité [6]

0.3. Il pourrait paraître plus efficace, pour introduire le facteur spatial dans l'analyse, d'adopter la définition d'une marchandise donnée par DEBREU [1] . Une marchandise est décrite comme un produit ou un service caractérisé par diverses propriétés, dont la date à laquelle il sera disponible et le

lieu où il sera accessible. La valeur d'une marchandise future est alors ramenée à celle de la même marchandise disponible actuellement par un facteur d'escompte. De même, la valeur d'une marchandise éloignée est dite ramenée à celle de la même marchandise accessible sur place par un taux de change.

Or, si l'on est en droit d'exprimer la valeur présente d'une marchandise future à l'aide d'un taux d'escompte, il n'est pas légitime de soutenir qu'il est possible d'exprimer la valeur locale d'une marchandise éloignée à l'aide d'un taux de change. En effet, les propriétés formelles de l'espace sont différentes de celles du temps et elles sont diversifiées [7]. Il suit que le calcul d'actualisation, qui repose sur l'axiome de la dépréciation du futur, a un fondement théorique, tandis que le taux de change de DEBREU, faute d'un axiome équivalent, n'en a pas. Dès lors, la définition de la marchandise elle-même, telle qu'elle est formulée par DEBREU et son école, ne permet pas d'explicitier la place et le rôle du facteur spatial dans les équilibres économiques.

0.4. Pour formaliser l'imprécision qui caractérise le comportement spatial du consommateur, il est fait appel à la théorie des sous-ensembles flous [2][8]. Les concepts mathématiques ordinaires (non flous) sont soulignés, tandis que les concepts flous ne le sont pas. Par exemple, $A \subset \underline{X}$ se lit: A est un sous-ensemble flou du référentiel \underline{X} .

0.5. Dans l'étude qui suit, on commence par décrire le cadre de l'analyse et rappeler brièvement les principaux résultats du modèle précité [6] qui sont indispensables à la compréhension de la théorie présentée ici.

On caractérise ensuite l'ensemble des consommations localisées possibles et le sous-ensemble flou des consommations localisées efficaces.

On dispose alors des éléments qui permettent de décrire l'équilibre spatial du consommateur dans un contexte

imprécis. La demande est définie comme un sous-ensemble flou de l'ensemble des consommations localisées possibles et le problème consiste à déterminer une demande optimale floue, c'est-à-dire qui maximise une utilité floue sous une contrainte de richesse.

Puis, diverses extensions de la théorie sont envisagées afin d'explicitier le caractère multidimensionnel du choix du consommateur.

La principale d'entre elles consiste à déterminer ce choix sur l'ensemble des caractéristiques des complexes de biens localisés.

Un cas particulier important est celui dans lequel le consommateur exige que les complexes de biens localisés possèdent au moins des niveaux minima de certaines caractéristiques.

Enfin, pour terminer, quelques considérations très générales sur le choix de la localisation du consommateur sont sommairement esquissées.

1 - LES ENSEMBLES DE CONSOMMATION

1.1. Cadre de l'analyse

1.1.1. Le consommateur est défini d'une manière générale; c'est un individu ou tout groupe d'individus dont les membres poursuivent un objectif commun. Il choisit et réalise un plan de consommation, c'est-à-dire une combinaison de biens localisés en vue d'obtenir une satisfaction.

L'analyse est statique.

1.1.2. L'espace du consommateur est caractérisé par la donnée d'un ensemble fini de lieux. On indice ces lieux p , avec $p=1, \dots, m$.

La résidence du consommateur est fixée en un point donné, noté $p=1$, appelé point de demande. Les biens de consommation sont offerts en des lieux donnés, notés $p=1, \dots, m$, appelés points d'offre. Un même lieu peut offrir un ou plusieurs biens.

Le fait que le consommateur soit localisé en un point de demande n'entraîne pas nécessairement que sa consommation soit physiquement réalisée en ce lieu. S'il est mobile, il a le choix entre consommer au lieu de sa résidence ou aux points d'offre des biens. Tout dépend de ses préférences et de la propriété des biens d'être transportables ou non-transportables. On admet qu'une consommation réalisée en dehors du point de résidence l'est nécessairement en un point d'offre, c'est-à-dire qu'au moins un bien offert en ce point, fut-il d'un prix nul, entre dans cette consommation.

Mais, dans tous les cas, le lieu d'implantation du consommateur sert de point de référence pour définir le système spatial des prix (voir ci-dessous 1.2.3.). En d'autres termes, le calcul économique du consommateur est effectué à partir du point indicé 1 quel que soit le point de réalisation physique de la consommation.

1.1.3. L'ensemble des biens localisés de consommation est noté \underline{X} , avec $\underline{X} = \{ \underline{x}_i^p \}$, où l'indice i désigne la nature du bien, avec $i=1, \dots, n$, et p sont point d'offre, avec $p=1, \dots, m$. L'ensemble \underline{X} est fini. Les quantités des biens \underline{x}_i^p sont exprimées par des nombres réels positifs ou nuls, notés x_i^p .

Avec ces notations, l'ensemble des biens localisés de consommation est tel que: $\underline{X} = \mathbb{R}^{mn}$. Une consommation est un élément de \mathbb{R}^{mn} , c'est-à-dire un mn -uplet de réels $(x_1^1, \dots, x_1^p, \dots, x_n^m)$.

1.2. L'ensemble des consommations localisées possibles

1.2.1. A partir de l'ensemble des biens localisés de consommation \underline{X} , on définit l'ensemble des consommations localisées possibles, noté \underline{K} . Un élément de \underline{K} est un vecteur, noté $[^h_k]$, avec $h=1, \dots, g, \dots, j, \dots, l, \dots$. On admet que \underline{K} est dénombrable. Un vecteur de consommations (ou complexe de biens localisés) s'écrit: $^h_k = [^h x_i^p]$. On a donc: $\underline{K} = \{ [^h_k] \}$ et $\underline{K} \subseteq \mathbb{R}^{mn}$.

1.2.2. L'étude précitée [6] a été consacrée à l'examen des structures de préférence spatiale imprécise et des conditions auxquelles elles doivent satisfaire pour garantir l'existence et la continuité d'une utilité floue. On en résume ici les résultats pour la compréhension des développements suivants consacrés à la théorie spatiale de la demande du consommateur dans un contexte imprécis.

Le consommateur met en correspondance les complexes de biens localisés quelconques, g_k et j_k , deux à deux, à un niveau "plus ou moins" élevé de préférence ou d'indifférence. On définit ainsi une relation binaire floue, notée \mathcal{R} , entre les éléments de \underline{K}^2 :

$$g_k \mathcal{R} j_k = \{ (g_k, j_k), \mu_{\mathcal{R}}; \forall g_k \in \underline{K}, \forall j_k \in \underline{K} : \mu_{\mathcal{R}}(g_k, j_k) \in \underline{M} \}$$

où $\mu_{\mathcal{R}}(g_k, j_k)$ désigne le niveau de préférence ou d'indifférence entre les deux complexes de biens localisés considérés et \underline{M} est un ensemble d'appartenance préordonné.

Diverses propriétés de la structure de préférence - indifférence imprécise ont été étudiées.

Ensuite, après avoir posé $\underline{M} = [0,1]$ pour passer à une représentation numérique de la préférence imprécise, on a introduit les conditions qui doivent être réunies pour garantir l'existence d'un espace totalement préordonné topologique (cohérence du comportement imprécis du consommateur). Ces conditions assurent l'existence et la continuité d'une utilité floue.

On a construit la fonction, notée μ , appelée fonction d'utilité imprécise, qui fait correspondre à chaque élément de l'ensemble \underline{K} un élément de l'intervalle $[0,1]$:

$$\begin{aligned} \mu: \underline{K} &\longrightarrow [0,1] \\ h_k &\longrightarrow \mu_K(h_k) \in [0,1] . \end{aligned}$$

On a défini ainsi un sous-ensemble flou de \underline{K} , noté K , tel que:

$$K = \left\{ h_k, \mu_K; \forall h_k \in \underline{K}, \mu_K(h_k) \in [0,1] \right\}$$

Il reste alors à passer de l'utilité à la demande, c'est-à-dire à déterminer dans ce contexte imprécis la demande optimale de biens localisés qui procure la plus grande utilité floue au consommateur en respectant sa contrainte de richesse.

1.2.3. Le système spatial des prix est donné et propre au consommateur. La définition de ce système fait intervenir les prix F.O.B., les frais de transport et les prix C.A.F. des biens.

Les frais de transport sont définis d'une manière large. Si l'agent, localisé au lieu 1, consomme en ce lieu, les frais de transport correspondent aux coûts d'acheminement des biens de leurs points d'offre respectifs au point 1. Si l'agent se déplace lui-même pour consommer en un autre lieu donné (point d'offre d'un bien), les frais de transport comprennent les coûts de déplacement de l'agent et éventuellement les coûts d'acheminement des biens au point considéré.

Formellement, pour tout $i=1, \dots, n$ et pour tout $p=1, \dots, m$, on note t_i^p ces frais de transport associés à la consommation d'une unité du bien i en provenance du point p et effectuée soit au lieu 1, soit en un lieu p , avec $p \neq 1$.

Soit $f_{p_i}^p$ le prix F.O.B. d'une unité du bien \underline{x}_i^p .

Le prix C.A.F. unitaire de ce bien au lieu de consommation, noté $c_{p_i}^p$, est égal à:

$$c_{p_i}^p = f_{p_i}^p + t_i^p, \text{ avec } i=1, \dots, n \text{ et } p=1, \dots, m.$$

Etant donné l'ensemble des biens \mathbb{R}^{mn} , un système spatial de prix C.A.F. pour le consommateur, noté c_p , est un point de \mathbb{R}^{mn} tel que, pour tout bien i et pour tout lieu p , le réel $c_{p_i}^p$ est le prix C.A.F. du bien considéré au lieu de sa consommation.

Pour un complexe de biens $h_k \in \underline{K}$ et pour le système spatial de prix C.A.F. c_p , la valeur de cette consommation est, par définition, représentée par:

$$c_p \cdot h_k = \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^m c_{p_i}^p \cdot h_{x_i^p}.$$

1.2.4. Le consommateur est doté d'une richesse donnée qui correspond, en statique, à la valeur de tous les biens dont il dispose, quelles que soient leurs localisations respectives. Celle-ci est représentée par le réel $w \in \mathbb{R}$.

1.3. Le sous-ensemble flou des consommations localisées efficaces.

1.3.1. Dans la théorie traditionnelle, on attribue à l'agent, muni d'un ensemble de consommations localisées possibles $\underline{K} \subseteq \mathbb{R}^{mn}$ et d'une richesse $w \in \mathbb{R}$, et pour un système spatial de prix C.A.F. $c_p \in \mathbb{R}^{mn}$, un ensemble de budget, partie de \underline{K} , noté \underline{B} et défini par:

$$\underline{B} = \left\{ h_k; h_k \in \underline{K} \text{ et } c_p \cdot h_k \leq w \right\}$$

où $c_p \cdot h_k \leq w$ signifie que la valeur d'une consommation h_k ne peut excéder la richesse du consommateur et désigne la contrainte de richesse.

On montre alors que l'équilibre du consommateur est atteint pour une consommation optimale par rapport au système de prix et à la richesse de l'agent, compte-tenu de sa structure de préférence, supposée représentée par un pré-ordre total. Si, de plus, il existe une utilité pour cette structure de préférence, la consommation optimale maximise cette utilité sur l'ensemble de budget.

Cette conception conduit à partitionner l'ensemble des consommations possibles en deux classes: celle des consommations efficaces et celle des consommations non-efficaces.

La classe des consommations efficaces, associées à une contrainte budgétaire donnée, est appelée frontière d'efficacité (ensemble des optima techniques du consommateur) et le choix de l'agent porte sur les consommations éléments de cette frontière, toutes les autres consommations possibles étant éliminées.

1.3.2. Cette conception classique vaut dans le cas limite d'un comportement précis.

En toute généralité, la contrainte de budget s'avère plus ou moins "contraignante".

D'abord, le consommateur ne la connaît pas nécessairement avec exactitude, soit qu'il ne se livre pas à son estimation précise, soit qu'il ne possède pas tous les éléments qui seraient indispensables à un tel calcul. Il agit donc en fonction de l'idée plus ou moins vague qu'il en a, et non à partir d'un inventaire complet de sa richesse qu'il ne veut pas ou qu'il ne peut pas établir.

De plus, s'il est vrai que, pour un consommateur ne disposant que d'un minimum vital, noté w^0 , il existe un ou plusieurs

complexes de biens, notés h_k° , tel(s) que $c_p \cdot h_k^\circ = w^\circ$, avec $h=1, \dots, l, \dots$, en revanche un consommateur au-dessus de ce minimum vital opère un arbitrage entre la consommation et l'épargne. Il peut consommer plus ou moins pour une même contrainte de richesse donnée. Au fur et à mesure que cette richesse augmente, ses besoins peuvent être mieux satisfaits et deviennent moins impérieux, de sorte qu'une consommation plus ou moins inférieure au niveau permis par la contrainte de richesse suffit à lui procurer l'utilité attendue de cette consommation et son épargne peut augmenter.

Si l'on admet qu'une frontière entre consommation et épargne existe, l'agent préférant l'épargne à des consommations dont l'utilité marginale est faible, et si l'on reconnaît que cette frontière est imprécise, alors un complexe de biens localisés appartient plus ou moins au sous-ensemble des consommations compatibles avec la contrainte de budget.

Pour toutes ces raisons, l'ensemble des consommations localisées efficaces est un sous-ensemble flou de \underline{K} , noté C , dont les éléments ont une fonction d'appartenance μ telle que:

$$\begin{aligned} \mu: \underline{K} &\longrightarrow [0,1] \\ h_k &\longmapsto \mu_C(h_k) \in [0,1] \\ \text{et} & \\ \mu_C(h_k) &= 1 \text{ si } c_p \cdot h_k = w \\ \mu_C(h_k) &\in]0,1[\text{ si } c_p \cdot h_k < w \\ \mu_C(h_k) &= 0 \text{ si } c_p \cdot h_k > w \end{aligned}$$

La fonction μ_C dépend de w . Elle est monotone et décroissante pour des valeurs croissantes de w . On a:

$$\begin{aligned} (w' > w) &\implies [(w' - c_p \cdot h_k) > (w - c_p \cdot h_k)] \\ &\implies \mu'_C(h_k) \leq \mu_C(h_k). \end{aligned}$$

Un complexe de biens localisés est de moins en moins soumis à la contrainte de budget au fur et à mesure que ce budget augmente.

Le sous-ensemble flou C est défini par:

$$C = \left\{ h_k, \mu_c; \forall h_k \in \underline{K}, \mu_c(h_k) \in]0,1] \text{ et } c_p. h_k \leq w \right\}$$

Cette conception élargit le domaine de recherche de la consommation optimale, c'est-à-dire de la demande du consommateur. L'ensemble des consommations possibles n'est plus partitionné en sous-ensembles des consommations efficaces et des consommations non-efficaces. La frontière d'efficacité figure seulement un cas particulier, celui dans lequel toute la consommation possible est réalisée. Mais, on admet que, sous cette frontière, tous les points appartenant à l'ensemble des consommations localisées possibles doivent être considérés parce qu'ils représentent des consommations plus ou moins efficaces. Le consommateur, dont le comportement est par nature imprécis, peut se contenter de l'une des consommations correspondant à ces points s'il ne désire pas réaliser toute la consommation possible, a fortiori s'il ne la connaît pas avec exactitude. Son calcul économique consiste à trouver le meilleur arbitrage entre un peu plus (ou un peu moins) de consommation et un peu moins (ou un peu plus) d'épargne.

1.3.3. On peut résumer les paragraphes 1.3.1 et 1.3.2 d'une manière plus formelle.

Dire que la contrainte de richesse \underline{B} , sous-ensemble non flou, est plus ou moins contraignante revient à attribuer dans ce contexte, au sous-ensemble flou des consommations localisées efficaces C le rôle d'une contrainte floue. Un comportement rationnel, au sens d'un comportement cohérent, consiste à maximiser l'utilité floue sous cette contrainte des consommations plus ou moins efficaces.

1.3.3.1. Remarque: Il en va de même dans la théorie classique en ce sens que la contrainte de richesse détermine le sous-ensemble des consommations efficaces et que le maximum de l'utilité appartient à ce sous-ensemble.

1.3.3.2. Afin que la structure de préférence-indifférence du consommateur, notée $(\underline{K}, \succsim)$, ne soit pas triviale, on introduit l'hypothèse de non-saturation, c'est-à-dire que:

$$\forall g_k \in \underline{K}, \exists j_k \in \underline{K} / \mu_K(j_k) \succ \mu_K(g_k),$$

$$\text{avec } \mu_K(h_k) \in [0,1] \text{ et } h = g, j.$$

1.3.3.3. Dans le cas particulier où le consommateur préfère réaliser entièrement sa consommation (pas d'épargne) ou est obligé de le faire (minimum vital), alors on restreint le sous-ensemble des consommations localisées efficaces, comme dans la théorie classique, de la manière suivante.

Soit $J \subset \underline{B}$. Un élément $j_k \in J$ est optimal par rapport à J pour la relation \succsim si et seulement si c'est un élément maximal de la structure (J, \succsim) , c'est-à-dire si et seulement si:

$$\nexists g_k \in J / \mu_J(g_k) \succ \mu_J(j_k), \text{ et } \mu_c(h_k) = 1 \text{ et } h = g, j.$$

Soit $N(J) = \{j_k\}$ avec $j \in I$, I fini, l'ensemble des consommations optimales de J . Une consommation $j_k \in N(J)$ est un meilleur élément de $N(J)$ si et seulement si c'est un maximum de la structure (J, \succsim) , c'est-à-dire si et seulement si:

$$\forall g_k \in J : \mu_{N(J)}(j_k) \succsim \mu_{N(J)}(g_k), \text{ et } \mu_c(h_k) = 1 \text{ et } h = g, j.$$

Soit $M(J)$ l'ensemble des meilleurs éléments de J . Sous les hypothèses économiques ci-dessus (absence d'épargne ou minimum vital), la solution du problème de l'équilibre du consommateur doit être recherchée dans $M(J)$. Hormis ces cas limites, elle appartient au sous-ensemble flou C tout entier, puisque C est tel que:

$$\forall h_k \in \underline{K}, \mu_c(h_k) \in]0,1] \text{ et } c_p. h_k \leq w.$$

On a $M(J) \subset C$.

2 - LE COMPORTEMENT SPATIAL DU CONSOMMATEUR

2.1. Critère de choix du consommateur

Le critère de choix du consommateur est de maximiser l'utilité floue qu'il tire de sa consommation, sous la contrainte de richesse, telle qu'elle a été définie au paragraphe 1.3.3.

Remarque: Il serait possible de déterminer la consommation optimale directement à partir de la structure de préférence spatiale du consommateur (préordre total flou). On choisit ici de rechercher la consommation qui maximise l'utilité floue telle qu'elle a été définie dans le modèle précité [6], sous la contrainte de richesse.

En résumé, il faut modéliser le calcul économique flou du consommateur dans un contexte où ses préférences spatiales sont imprécises et où la contrainte de richesse est elle-même floue.

2.2. La maximisation de l'utilité floue sous la contrainte de richesse.

2.2.1. Par définition, la demande du consommateur, notée D , est un sous-ensemble flou de \underline{K} , tel que:

$$D = K \cap C$$

En effet, la demande s'interprète comme une décision floue. Elle est l'intersection des sous-ensembles flous K (ensemble des complexes de biens localisés munis de leurs fonctions d'utilité floue) et C (ensemble des complexes de biens localisés plus ou moins efficaces).

Il faut déterminer la demande optimale telle que:

$$\sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k) = \sup_{h_k \in \underline{K}} [\mu_K(h_k) \wedge \mu_C(h_k)] .$$

2.2.2. On démontre que (1):

$$\sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \sup_{h_k \in \underline{C}_\alpha} \mu_K(h_k)]$$

où

$$\underline{C}_\alpha = \{ h_k; h_k \in \underline{K}, \mu_K(h_k) \geq \alpha \} \quad \text{avec } \alpha \in [0,1]$$

Ce théorème réduit le problème de la recherche de la demande floue optimale à un problème d'extremum pour une fonction scalaire [5].

Soit une fonction φ telle que:

$$\begin{array}{ccc} \varphi : [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ \alpha & \longmapsto & \varphi(\alpha) = \sup_{h_k \in \underline{C}_\alpha} \mu_K(h_k) \end{array}$$

et une fonction Ψ telle que:

$$\begin{array}{ccc} \Psi : [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ \alpha & \longmapsto & \Psi(\alpha) = \alpha \wedge \varphi(\alpha) \end{array}$$

Il vient:

$$\begin{array}{ccc} \sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k) & = & \sup_{\alpha \in [0,1]} \Psi(\alpha) \end{array}$$

On établit que la fonction φ a les propriétés suivantes (2):

- Propriété (1) : $\varphi(0) = \sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_K(h_k)$
- Propriété (2) : $\alpha \leq \beta \implies \varphi(\alpha) \geq \varphi(\beta)$.

On peut alors démontrer (3) que, si φ est continue et décroissante sur $[0,1]$, alors:

-
- (1) Voir Appendice A.1., A.2. et A.3.
 - (2) Voir Appendice A.4. et A.5.
 - (3) Voir Appendice A.6.

(i) φ a un point fixe, c'est-à-dire:

$$\exists \bar{\alpha} \in [0,1] \quad / \quad \varphi(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} \quad \text{et} \quad \bar{\alpha} = \sup_{h_k \in \frac{C}{\bar{\alpha}}} \mu_K(h_k)$$

$$(ii) \quad \sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k) = \bar{\alpha}$$

Ce théorème montre que la solution du problème de la recherche de $\sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k)$ revient à trouver

$$\bar{\alpha} = \sup_{h_k \in \frac{C}{\bar{\alpha}}} \mu_K(h_k) .$$

2.2.3. On sait que:

$$\begin{aligned} \sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k) &= \sup_{h_k \in \underline{K}} [\mu_K(h_k) \wedge \mu_C(h_k)] \\ &= \sup_{h_k \in \text{supp} \underline{C}} [\mu_K(h_k) \wedge \mu_C(h_k)] \end{aligned}$$

où

$\text{supp} \underline{C}$ désigne le support de C , c'est-à-dire le sous-ensemble tel que:

$$\text{supp} \underline{C} = \{ h_k ; \forall h_k \in \underline{K}, \mu_C(h_k) > 0 \} .$$

et que, en vertu des propositions (ii) et (i):

$$\sup_{h_k \in \text{supp} \underline{C}} [\mu_K(h_k) \wedge \mu_C(h_k)] = \sup_{h_k \in \frac{C}{\bar{\alpha}}} \mu_K(h_k) .$$

et

$$\frac{C}{\bar{\alpha}} \subset \text{supp} \underline{C} , \text{ puisque } \bar{\alpha} \neq 0 .$$

Pour calculer ce supremum, il faut trouver un ensemble approprié, noté \underline{A} , tel que:

$$\frac{C}{\bar{\alpha}} \subset \underline{A} \subset \text{supp} \underline{C} .$$

A cette fin, on utilise le résultat suivant (1)

(1) Voir Appendice A.7. et A.8.

$$\sup_{h_k \in \underline{A}} \mu_K(h_k) = \sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k)$$

avec

$$\underline{A} = \left\{ h_k; h_k \in \underline{K}, \mu_C(h_k) \geq \mu_K(h_k) \right\}.$$

2.2.4. Il reste enfin à étudier les conditions de continuité de la fonction $\varphi(\alpha) = \sup_{h_k \in \underline{C}_\alpha} \mu_K(h_k)$.

$$h_k \in \underline{C}_\alpha$$

On sait qu'un sous-ensemble flou C est strictement convexe si et seulement si sa fonction d'appartenance est strictement quasi-concave, c'est-à-dire si et seulement si:

$$\forall g_k \in \underline{K}, \forall j_k \in \underline{K}, g_k \neq j_k, [\mu_C(j_k) > \mu_C(g_k)]$$

$$\Rightarrow \forall \lambda \in]0,1[, \mu_C[\lambda g_k + (1-\lambda) j_k] > \mu_C(g_k) .$$

Sous cette hypothèse, un théorème dû à Asai et Tanaka [5] donne une condition suffisante pour la continuité de $\varphi(\alpha)$:

si le sous-ensemble flou C est strictement convexe, alors $\varphi(\alpha) = \sup_{h_k \in \underline{C}_\alpha} \mu_K(h_k)$ est continue (1).

2.2.5. Ainsi, à l'équilibre, la demande floue procure la plus grande utilité floue au consommateur et, dans l'espace de l'offre des biens, les points auxquels celui-ci adresse ses demandes particulières de biens sont connus puisque $h_k = [h_{x_i^p}]$ où p est l'indice des points d'offre des biens indicés i entrant comme composantes dans le complexe indicé h . Simultanément, le comportement imprécis d'épargne du consommateur est déterminé globalement puisqu'il ne sature pas sa contrainte de richesse, sauf dans les cas particuliers (minimum vital et comportement de type classique) définis au paragraphe 1.3.3.3.

(1) Voir Appendice A.9.

3 - EXTENSIONS

3.1. Caractère multidimensionnel du choix

Le concept d'utilité agrège l'ensemble des appréciations portées par l'agent sur les propriétés des biens localisés. Il est possible d'explicitier le caractère multidimensionnel du choix du consommateur en définissant celui-ci, non plus sur l'ensemble des biens localisés, mais sur l'ensemble des caractéristiques des complexes de ces biens.

3.2. Choix du consommateur dans l'ensemble des caractéristiques des complexes de biens localisés.

3.2.1. Soit \underline{X} l'ensemble des biens défini au paragraphe 1.1.3. et un ensemble de caractéristiques de ces biens, noté $Y = \{y_{iq}^p\}$, avec $i=1, \dots, n$; $p=1, \dots, m$; $q=1, \dots, s$.

L'élément y_{iq}^p représente la q ième caractéristique dont est muni le bien indicé i au lieu indicé p .

Par exemple, $\forall p=1, \dots, m$, on a, avec q fonction de p :

si $q = 1$, y_{i1}^p désigne l'aptitude d'un bien i offert en p à satisfaire un besoin donné

si $q = 2$, y_{i2}^p désigne la valeur attachée à l'état de satisfaction procuré par la consommation d'un bien

si $q = 3$, y_{i3}^q désigne la qualité d'un bien
etc.

A un complexe de biens $h_k = [h_{x_i}^p]$, avec $h=1, \dots, g, \dots, 1, \dots$ est associé un vecteur de caractéristiques, noté $[h_{y_{iq}}^p]$.

On note que: $Y = \{[h_{y_{iq}}^p]\}$ par un ensemble d'applications notées f^q , telles que:

$$\begin{aligned} \forall q = 1, \dots, s ; f^q : \underline{K} &\longrightarrow Y \\ h_{x_i}^p &\longrightarrow f^q(h_{x_i}^p) = h_{y_{iq}}^p \end{aligned}$$

Par construction, ces applications sont bijectives et continues (homéomorphismes).

On admet que l'appréciation des caractéristiques porte sur les complexes de biens, et non sur les biens eux-mêmes, parce que ces caractéristiques sont évaluées dans le contexte d'une consommation, et non isolément.

3.2.2. De plus, on reconnaît que cette appréciation (ou processus d'évaluation) par le consommateur est imprécise. Subjectivement, un complexe de biens localisés possède plus ou moins des caractéristiques données selon la perception de l'agent.

On définit ainsi un ensemble d'applications, notées μ^q , telles que:

$$\forall q = 1, \dots, s : \mu^q : Y \longrightarrow [0,1]$$

$$h_{y_{iq}}^p \longrightarrow \mu^q(h_{y_{iq}}^p) \in [0,1]$$

et s sous-ensembles flous, notés Y^q , avec $q = 1, \dots, s$, tels que:

$$\forall q = 1, \dots, s : Y^q = \left\{ h_{y_{iq}}^p, \mu_{Y^q} ; \right.$$

$$\left. \forall h_{y_{iq}}^p \in Y : \mu_{Y^q}(h_{y_{iq}}^p) \in [0,1] \right\}$$

3.2.3. Remarque. Dans les modèles behavioristes, notamment les modèles de l'Expectancy-Value Theory [4], on admet que l'appréciation des caractéristiques porte sur des biens non localisés et qu'elle est précise. Autrement dit, on a:

$$\mu_Y(x_i) \in \{0,1\} \quad \text{avec } i=1, \dots, n.$$

Un bien possède ou ne possède pas une caractéristique donnée. La fonction μ_Y est booléenne.

Dans les modèles inspirés par la théorie de Lancaster [3], les caractéristiques sont des quantités mesurables, liées linéairement aux quantités de biens (non localisés) consommées, additives et divisibles.

La présente formulation est différente et plus générale, intégrant ces deux familles de modèles comme cas particuliers. En effet, hormis ces cas limites, le consommateur apprécie subjectivement l'importance des caractéristiques des complexes de biens localisés. Celles-ci ne sont ni quantifiables objectivement (mesurables), ni liées strictement aux quantités consommées, ni additives. En fait, une caractéristique est plus ou moins attachée à un complexe de biens localisés par l'agent. Elle n'a que la propriété de divisibilité, en ce sens qu'elle existe plus ou moins dans l'évaluation du consommateur, selon les complexes de biens considérés et les lieux d'offre de leurs composantes.

3.2.4. On doit alors résoudre le problème multidimensionnel suivant: trouver le sous-ensemble flou, noté D^C , demande floue des caractéristiques, tel que:

$$D^C = \left(\bigwedge_{q=1}^S Y^q \right) \wedge (C)$$

où C est défini comme au paragraphe 1.3.2. en remplaçant h_k par $h_{y_{iq}}^p$ dans son expression.

La solution utilise une généralisation du théorème énoncé au paragraphe 2.2.2.

On démontre en effet que la relation suivante est vraie (1):

$$\sup_{h_{y_{iq}}^p \in Y} \mu_{D^C}(h_{y_{iq}}^p) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \sup_{h_{y_{i1}}^p \in C_\alpha} \mu_{Y^1}(h_{y_{i1}}^p) \wedge \dots \wedge \mu_{Y^S}(h_{y_{is}}^p)]$$

$$\text{où } C_\alpha = \left\{ h_{y_{iq}}^p ; h_{y_{iq}}^p \in Y, \mu_C(h_{y_{iq}}^p) \geq \alpha \right\} \quad \text{avec } \alpha \in [0,1].$$

Il suit de cette proposition qu'il n'y avait aucune perte de généralité à traiter précédemment le cas où la fonction-objectif est unique. Il en irait d'ailleurs de même pour des contraintes floues multiples [5].

(1) Voir Appendice A.10.

A partir de là, il suffit de suivre la procédure développée du paragraphe 2.2.2. au paragraphe 2.2.4.

A l'équilibre, la solution obtenue détermine le vecteur des caractéristiques qui procure au consommateur la plus grande utilité floue. On utilise l'application inverse f^{-1} , définie au paragraphe 3.2.1., qui est continue, pour identifier la consommation optimale (complexe de biens localisés optimal).

3.3. Introduction de contraintes sur les caractéristiques.

3.3.1. Une formulation légèrement différente du problème précédent s'impose si le consommateur exige des complexes de biens localisés qu'ils possèdent au moins certains niveaux minima de toutes les caractéristiques ou de quelques-unes d'entre elles.

On note ces minima ϵ^q , $\forall q=1, \dots, s$ avec $0 \leq \epsilon^q \leq 1$.

Dans ces conditions, on peut exprimer ce type de contraintes par un ensemble d'applications, notées μ^q , telles que:

$$\begin{aligned} \forall q=1, \dots, s : \mu^q : Y &\longrightarrow [\epsilon^q, 1] \\ h_{y_{iq}}^p &\longmapsto \mu^q(h_{y_{iq}}^p) \in [\epsilon^q, 1] . \end{aligned}$$

On définit s sous-ensembles flous, notés Y^q , tels que:

$$\forall q=1, \dots, s : Y^q = \left\{ h_{y_{iq}}^p, \mu_{Y^q} ; \forall h_{y_{iq}}^p \in Y : \mu_{Y^q}(h_{y_{iq}}^p) \in [\epsilon^q, 1] \right\}$$

En d'autres termes, on définit s fonctions-objectifs et pour chacune d'elles, la contrainte imposée sous la forme d'un niveau minimum d'une caractéristique se traduit par une restriction sur l'ensemble où sa fonction d'appartenance prend sa valeur.

3.3.2. A partir de là, on est ramené au problème posé au paragraphe 3.2.4.

A l'équilibre, sa solution donne le vecteur des caractéristiques qui procure au consommateur la plus grande utilité

floue, en respectant la contrainte de richesse et les contraintes imposées par les niveaux désirés des caractéristiques.

3.4. Choix de la localisation du consommateur

3.4.1. Jusqu'ici la localisation du consommateur était donnée. Il est possible d'en faire une inconnue.

On suggère, sans développer ici le modèle, de prendre en considération les caractéristiques de l'espace lui-même et de formuler une demande de résidence, assimilée à une demande d'espace [9] .

La nature des caractéristiques recherchées est alors différente de celle des caractéristiques des complexes de biens localisés. Le consommateur s'attache à des critères d'accessibilité (distance à un point central à préciser), de surface de la résidence, de qualité du logement (confort), de statut social des voisins (mode de vie), etc.

La spécification d'un tel modèle doit déterminer le point à partir duquel sont calculées les distances aux points d'offre des biens et au lieu de travail: barycentre, centre-ville, etc. puisque ce point n'est plus une donnée de l'analyse.

3.4.2. Il est clair que les appréciations portées par l'agent sur les caractéristiques de sa résidence et de sa localisation sont généralement imprécises. On est ramené formellement à un problème multidimensionnel de la même famille que celui traité en 3.2.

4 - CONCLUSION

4.1. Le recours à la théorie des sous-ensembles flous rend possible la détermination de l'équilibre spatial du consommateur dans un contexte imprécis, en permettant de formaliser rigoureusement le calcul économique de la maximisation de l'utilité floue sous la contrainte de richesse. Le caractère imprécis du comportement humain, dû à sa nature, à l'imperfection de l'information et/ou de sa perception et de son traitement par l'agent, est pleinement reconnu.

4.2. Cette analyse ne doit pas être opposée aux diverses formulations de la théorie du consommateur existantes: néo-classique, lancasterienne et behavioristes. Elle les contient comme cas particuliers.

4.3. L'application de la théorie des sous-ensembles flous ne conduit pas seulement à cette généralisation. Elle permet aussi l'énoncé de résultats nouveaux: l'équilibre n'est plus nécessairement déterminé en un point de l'ensemble de budget; les comportements de consommation et d'épargne (globale) sont traités dans un même cadre théorique.

4.4. Ce type de modèle appelle des prolongements. On peut penser qu'il ouvre un cadre d'analyse pertinent pour approfondir l'étude du comportement d'épargne, en rendant compte de la structure de cette dernière.

De même les aspects dynamiques méritent d'être intégrés, en termes de maximisation d'une utilité espérée floue.

Enfin, le problème délicat de la localisation du consommateur (choix de la résidence), sommairement esquissé ici, devra être repris en détail et entièrement résolu.

5 - APPENDICE (★)

A.1. Définition. On appelle α -coupure, avec $\alpha \in [0,1]$, d'un sous-ensemble flou C , $C \subset \underline{K}$, l'ensemble, noté \underline{C}_α , tel que:

$$\underline{C}_\alpha = \left\{ h_k; h_k \in \underline{K}, \mu_C(h_k) \geq \alpha \right\}$$

L'ensemble des α -coupures, noté $\left\{ \underline{C}_\alpha \right\}_{\alpha \in [0,1]}$, est une suite décroissante telle que:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \implies \underline{C}_{\alpha_1} \supseteq \underline{C}_{\alpha_2} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1] .$$

et $\underline{C}_0 = \underline{K}$.

De nombreuses propriétés des sous-ensembles flous sont obtenues à partir des propriétés de leurs α -coupures.

A.2. Théorème de décomposition: Soit $C \in \mathcal{F}(\underline{K})$ et $\left\{ \underline{C}_\alpha \right\}_{\alpha \in [0,1]}$ ses α -coupures, alors:

$$C = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \underline{C}_\alpha$$

En effet,
$$\mu_{\underline{C}_{\alpha_i}}(h_k) = 1 \quad \text{si} \quad \mu_C(h_k) \geq \alpha_i$$

$$\mu_{\underline{C}_{\alpha_i}}(h_k) = 0 \quad \text{si} \quad \mu_C(h_k) < \alpha_i$$

Ainsi, la fonction d'appartenance de C s'écrit:

$$\mu(h_k) = \bigvee_{\alpha_i} [\alpha_i \cdot \underline{C}_{\alpha_i}] = \bigvee_{\alpha_i} [\alpha_i] = \mu_C(h_k)$$

$$\alpha_i \quad \mu_C(h_k) \geq \alpha_i$$

[Q.E.D.]

(★) Les définitions des concepts flous sont développées dans plusieurs ouvrages de base, notamment [2] et [8]. L'optimisation d'une ou de plusieurs fonction(s) floue(s) sous contrainte(s) floue(s) a fait l'objet de quelques articles dont les premiers résultats ont été rassemblés dans l'ouvrage [5]. L'auteur tient à remercier M. Prevot (IME) dont les suggestions lui ont permis de simplifier et compléter certaines démonstrations. Mais il demeure évidemment seul responsable des insuffisances ou erreurs éventuelles.

A.3. Théorème: La relation suivante est vraie:

$$\sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \sup_{h_k \in \underline{C}_\alpha} \mu_K(h_k)]$$

où

$$\underline{C}_\alpha = \{h_k; h_k \in \underline{K}, \mu_C(h_k) \geq \alpha\}, \text{ avec } \alpha \in [0,1].$$

En effet, d'après le théorème de décomposition,

$$\mu_C(h_k) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge \mu_{\underline{C}_\alpha}(h_k)) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge \mu_{\underline{C}_\alpha}(h_k))$$

où $\mu_{\underline{C}_\alpha}$ est la fonction caractéristique de \underline{C}_α

Par définition, on a:

$$\mu_D(h_k) = \mu_K(h_k) \wedge \mu_C(h_k)$$

$$= \mu_K(h_k) \wedge \left[\bigvee_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge \mu_{\underline{C}_\alpha}(h_k)) \right]$$

(propriété de \underline{C}_α)

$$= \bigvee_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \mu_{\underline{C}_\alpha}(h_k) \wedge \mu_K(h_k)]$$

(propriété de distributivité)

D'où il suit que:

$$\sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k) = \bigvee_{h_k \in \underline{K}} \bigvee_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \mu_{\underline{C}_\alpha}(h_k) \wedge \mu_K(h_k)]$$

$$= \bigvee_{\alpha \in [0,1]} \bigvee_{h_k \in \underline{K}} [\alpha \wedge \mu_{\underline{C}_\alpha}(h_k) \wedge \mu_K(h_k)]$$

(propriétés d'associativité
et de commutativité)

$$= \bigvee_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \bigvee_{h_k \in \underline{K}} \mu_{\underline{C}_\alpha}(h_k) \wedge \mu_K(h_k)]$$

(car α est indépendant de h_k)

Mais on a :

$$\begin{aligned}
 \bigvee_{h_k \in \underline{K}} [\mu_{\underline{C}_\alpha}^{(h_k)} \wedge \mu_K^{(h_k)}] &= \\
 &= \bigvee_{h_k \in \underline{C}_\alpha} [\mu_{\underline{C}_\alpha}^{(h_k)} \wedge \mu_K^{(h_k)}] \bigvee_{h_k \notin \underline{C}_\alpha} [\mu_{\underline{C}_\alpha}^{(h_k)} \wedge \mu_K^{(h_k)}] \\
 &\quad \text{(en partitionnant } \underline{C}_\alpha \text{)} \\
 &= \bigvee_{h_k \in \underline{C}_\alpha} [1 \wedge \mu_K^{(h_k)}] \bigvee_{h_k \notin \underline{C}_\alpha} [0 \wedge \mu_K^{(h_k)}] \\
 &= \bigvee_{h_k \in \underline{C}_\alpha} \mu_K^{(h_k)} = \sup_{h_k \in \underline{C}_\alpha} \mu_K^{(h_k)}
 \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D^{(h_k)} = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \sup_{h_k \in \underline{C}_\alpha} \mu_K^{(h_k)}] \quad [\text{Q.E.D.}]$$

A.4. Définitions :

Soit les fonctions :

$$\begin{aligned}
 \varphi : [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\
 \alpha &\longmapsto \varphi(\alpha) = \sup_{h_k \in \underline{C}_\alpha} \mu_K^{(h_k)} \\
 \Psi : [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\
 \alpha &\longmapsto \Psi(\alpha) = \alpha \wedge \varphi(\alpha)
 \end{aligned}$$

Il vient d'après le théorème A.3. :

$$\sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D^{(h_k)} = \sup_{\alpha \in [0,1]} \Psi(\alpha)$$

A.5. Propriétés de la fonction φ :

$$\text{A.5.1. : } \varphi(0) = \sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_K^{(h_k)}$$

Evident, puisque $\underline{C}_0 = \underline{K}$

$$A.5.2.: \alpha \leq \beta \Rightarrow \varphi(\alpha) \geq \varphi(\beta)$$

En effet, d'après le théorème A.2.:

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \underline{C}_\beta \subseteq \underline{C}_\alpha \quad \text{et ainsi:}$$

$$\varphi(\beta) = \sup_{h_k \in \underline{C}_\beta} \mu_K(h_k) \leq \sup_{h_k \in \underline{C}_\alpha} \mu_K(h_k) = \varphi(\alpha)$$

[Q.E.D.]

A.6. Théorème : Si φ est continue et décroissante sur l'intervalle $[0,1]$, alors:

(i) φ a un point fixe, c'est-à-dire:

$$\exists \bar{\alpha} \in [0,1] / \varphi(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} \quad \text{et} \quad \bar{\alpha} = \sup_{h_k \in \underline{C}_{\bar{\alpha}}} \mu_K(h_k)$$

En effet, on montre d'abord que toute application continue et décroissante d'un ensemble dans lui-même admet un point fixe.

Soit $\varphi(\alpha) - \alpha = f(\alpha)$. Cette fonction est continue.

On a : $f(0) = \varphi(0) > 0$

$$f(1) = \varphi(1) - 1 \leq 0$$

et il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour vérifier l'existence d'un point fixe.

Ensuite, d'après la continuité de φ :

$$\forall \alpha_0 \in [0,1], \alpha_n \rightarrow \alpha_0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{h_k \in \underline{C}_{\alpha_n}} \mu_K(h_k) \right] = \sup_{h_k \in \underline{C}_{\bar{\alpha}}} \mu_K(h_k)$$

[Q.E.D.]

$$(ii) \quad \sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k) = \bar{\alpha}$$

En effet, d'après le théorème A.3.:

$$\begin{aligned} \sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \sup_{h_k \in \underline{C}_\alpha} \mu_K(h_k)] \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \Psi(\alpha) \quad (\text{d'après la définition de } \Psi(\alpha)). \end{aligned}$$

De plus, $\Psi(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} \wedge \varphi(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} \wedge \bar{\alpha} \quad (\text{d'après (i)})$
 $= \bar{\alpha}$

On montre que : $\Psi(\alpha) \leq \bar{\alpha}$

Si $\alpha < \bar{\alpha}$ on a : $\varphi(\alpha) \geq \varphi(\bar{\alpha})$, d'après A.5.2.

$\varphi(\alpha) \geq \varphi(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} > \alpha$, d'après (i)

et $\Psi(\alpha) = \alpha \wedge \varphi(\alpha) = \alpha < \bar{\alpha} = \Psi(\bar{\alpha})$

Si $\alpha \geq \bar{\alpha}$, on a : $\varphi(\alpha) \leq \varphi(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} \leq \alpha$

et $\Psi(\alpha) = \alpha \wedge \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha) \leq \bar{\alpha} = \Psi(\bar{\alpha})$

Dans tous les cas:

$$\Psi(\alpha) \leq \Psi(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}$$

D'où

$$\bar{\alpha} = \sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k) \quad [\text{Q.E.D.}]$$

A.7. Définition . On appelle support d'un sous-ensemble flou C, $C \subset \underline{K}$, le sous-ensemble non flou, noté $\text{supp} \underline{C}$, tel que:

$$\text{supp} \underline{C} = \left\{ h_k; \forall h_k \in \underline{K}, \mu_C(h_k) > 0 \right\}.$$

A.8. Théorème: La relation suivante est vraie:

$$\sup_{h_k \in \underline{A}} \mu_K(h_k) = \sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k),$$

avec

$$\underline{A} = \left\{ h_k; h_k \in \underline{K}, \mu_C(h_k) \geq \mu_K(h_k) \right\}$$

En effet, on montre d'abord que : $\underline{C}_{\bar{\alpha}} \subset \underline{A}$

On a:

$$\begin{aligned} \forall o_k \in \underline{C}_{\bar{\alpha}} &\Rightarrow \mu_C(o_k) \geq \bar{\alpha} = \sup_{h_k \in \underline{C}_{\bar{\alpha}}} \mu_K(h_k) \geq \mu_K(o_k) \\ &\Rightarrow \mu_C(o_k) \geq \mu_K(o_k) \Rightarrow o_k \in \underline{A}. \end{aligned}$$

De plus, on a:

$$\underline{A} = (\underline{A} \cap \text{supp}\underline{C}) \cup (\underline{A} \cap \complement \text{supp}\underline{C})$$

et

$$\sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k) = \sup_{h_k \in \text{supp}\underline{C}} (\mu_C \wedge \mu_K)(h_k) \geq \sup_{h_k \in \underline{A} \cap \text{supp}\underline{C}} (\mu_C \wedge \mu_K)(h_k)$$

$$\begin{aligned} \text{Mais, } \sup_{h_k \in \underline{A}} (\mu_C \wedge \mu_K)(h_k) &= \max \left[\sup_{\underline{A} \cap \text{supp}\underline{C}} (\mu_C \wedge \mu_K), \sup_{\underline{A} \cap \complement \text{supp}\underline{C}} (\mu_C \wedge \mu_K) \right] \\ &= \sup_{\underline{A} \cap \text{supp}\underline{C}} (\mu_C \wedge \mu_K) \end{aligned}$$

Il suit que:

$$\sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k) \geq \sup_{h_k \in \underline{A}} (\mu_C \wedge \mu_K)(h_k) = \sup_{h_k \in \underline{A}} \mu_K(h_k) \geq \sup_{h_k \in \underline{C}_{\bar{\alpha}}} \mu_K(h_k)$$

(puisque $\underline{C}_{\bar{\alpha}} \subset \underline{A}$)

et ainsi:

$$\sup_{h_k \in \underline{K}} \mu_D(h_k) = \sup_{h_k \in \underline{A}} \mu_K(h_k)$$

[Q.E.D.]

A.9. Conditions de continuité

A.9.1.: Théorème : Si μ_K est héli-continue supérieurement, $\varphi(\alpha)$ est continue à gauche.

En effet, soit la suite $\{\alpha_n\}$ croissante:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \longrightarrow \alpha_0$$

$$\underline{C}_{\alpha_n} \subset \underline{C}_{\alpha_{n-1}} \subset \dots \subset \underline{C}_{\alpha_1} \quad \text{et} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} (\underline{C}_{\alpha_n}) = \underline{C}_{\alpha_0}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{h_k \in \underline{C}_{\alpha_n}} \mu_K(h_k) = \inf_{n \geq 1} \left[\sup_{h_k \in \underline{C}_{\alpha_n}} \mu_K(h_k) \right] \geq \sup_{h_k \in \underline{C}_{\alpha_0}} \mu_K(h_k)$$

On suppose qu'il existe une inégalité stricte:

$$\inf_{n \geq 1} \varphi(\alpha_n) > \underline{C} > \varphi(\alpha_0)$$

D'après la définition de φ , il existe $(h_k)_n \in \underline{C}_{\alpha_n}$ tel que:

$$\mu_K(h_k)_n > \underline{C} > \varphi(\alpha_0)$$

Puisque $(h_k)_n \in \underline{C}_{\alpha_1}$, il existe une sous-suite $(h_k)_{n_j} \longrightarrow (h_k)_0 \in \underline{C}_{\alpha_1}$, d'où: $(h_k)_0 \in \underline{C}_{\alpha_0}$

Donc: $\mu(h_k)_{n_j} > \underline{C} > \varphi(\alpha_0)$

D'après la semi-continuité de μ_K :

$$\mu_K(h_k)_0 \geq \underline{C} > \varphi(\alpha_0)$$

On aboutit à une contradiction.

[Q.E.D.]

A.9.2.: Théorème : Si le sous-ensemble flou K est strictement convexe et si μ_K est continue, alors φ est une fonction continue.

Il suffit de montrer la continuité à droite.

En effet, soit la suite $\{\alpha_n\}$ décroissante:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \longrightarrow \alpha_0$$

$$\underline{C}_{\alpha_1} \subseteq \underline{C}_{\alpha_2} \subseteq \dots \subseteq \underline{C}_{\alpha_n} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \underline{C}_{\alpha_n} = \underline{C}_{\alpha_0}$$

$$\varphi(\alpha_n) \longrightarrow \sup_{h_k > \alpha_0} \mu_K(h_k)$$

On suppose qu'il existe une inégalité stricte:

$$\sup_{h_k \geq \alpha_0} \mu_K(h_k) > \sup_{h_k > \alpha_0} \mu_K(h_k)$$

D'après cette inégalité, $\exists a \in \underline{C}_{\alpha_0}$ tel que:

$$\sup_{h_k > \alpha_0} \mu_K(h_k) < \mu_K(a)$$

En vertu de la stricte convexité de K , on a:

$$\forall h_k > \alpha_0, \quad \mu_K \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) a + \frac{1}{n} h_k \right] > \mu_K(a) \wedge \mu_K(h_k) = \alpha_0$$

$$\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) a + \frac{1}{n} h_k \right] > \alpha_0 \quad \text{et} \quad \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) a + \frac{1}{n} h_k \right] \longrightarrow a$$

$$\mu_K \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) a + \frac{1}{n} h_k \right] \leq \sup_{h_k > \alpha_0} \mu_K(h_k) < \mu_K(a)$$

D'après la continuité de μ_K , on a :

$$\mu_K(a) \leq \sup_{h_k > \alpha_0} \mu_K(h_k) < \mu_K(a)$$

On aboutit à une contradiction.

[Q.E.D.]

A.10. Théorème: Soit s fonctions-objectifs floues

$\mu_{Y1}, \dots, \mu_{Ys}$ et une contrainte floue μ_C , alors la relation suivante est vraie:

$$\sup_{h_{Yiq}^p \in Y} \mu_{D^C}(h_{Yiq}^p) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \sup_{h_{Y11}^p \in \underline{C}_\alpha} \mu_{Y1}(h_{Y11}^p) \wedge \dots \wedge \mu_{Ys}(h_{Yis}^p)]$$

où $\underline{C}_\alpha = \{ h_{Yiq}^p; h_{Yiq}^p \in Y, \mu_C(h_{Yiq}^p) \geq \alpha \}$ avec $\alpha \in [0,1]$

En effet, d'après le théorème de décomposition A.2.:

$$\mu_C(h_{Yiq}^p) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge \mu_{\underline{C}_\alpha}(h_{Yiq}^p))$$

$$\text{où } \mu_{\underline{C}_\alpha}(h_{Yiq}^p) = 1 \quad \text{si } (h_{Yiq}^p) \in \underline{C}_\alpha$$

$$\mu_{\underline{C}_\alpha}(h_{Yiq}^p) = 0 \quad \text{si } (h_{Yiq}^p) \notin \underline{C}_\alpha$$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \mu_{D^C}(h_{Yiq}^p) &= \mu_C(h_{Yiq}^p) \wedge \mu_{Y1}(h_{Y11}^p) \wedge \dots \wedge \mu_{Ys}(h_{Yis}^p) \\ &= [\bigvee_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \wedge \mu_{\underline{C}_\alpha}(h_{Yiq}^p))] \wedge \mu_{Y1}(h_{Y11}^p) \wedge \dots \wedge \mu_{Ys}(h_{Yis}^p) \\ &= \bigvee_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \mu_{\underline{C}_\alpha}(h_{Yiq}^p) \wedge \mu_{Y1}(h_{Y11}^p) \wedge \dots \wedge \mu_{Ys}(h_{Yis}^p)] \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sup_{h_{y_{iq}}^p \in Y} \mu_{D^c}^{(h_{y_{iq}}^p)} &= \bigvee_{h_{y_{iq}}^p \in Y} \bigvee_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \mu_{\underline{C}_\alpha}^{(h_{y_{i1}}^p)} \wedge \mu_{Y^1}^{(h_{y_{iq}}^p)} \wedge \dots \wedge \mu_{Y^s}^{(h_{y_{is}}^p)}] \\
&= \bigvee_{\alpha \in [0,1]} \bigvee_{h_{y_{iq}}^p \in Y} [\alpha \wedge \mu_{\underline{C}_\alpha}^{(h_{y_{iq}}^p)} \wedge \mu_{Y^1}^{(h_{y_{i1}}^p)} \wedge \dots \wedge \mu_{Y^s}^{(h_{y_{is}}^p)}] \\
&= \bigvee_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \bigvee_{h_{y_{iq}}^p \in Y} (\mu_{\underline{C}_\alpha}^{(h_{y_{iq}}^p)} \wedge \mu_{Y^1}^{(h_{y_{i1}}^p)} \wedge \dots \wedge \mu_{Y^s}^{(h_{y_{is}}^p)})]
\end{aligned}$$

Mais on a :

$$\begin{aligned}
&\bigvee_{h_{y_{iq}}^p \in Y} [\mu_{\underline{C}_\alpha}^{(h_{y_{iq}}^p)} \wedge \mu_{Y^1}^{(h_{y_{i1}}^p)} \wedge \dots \wedge \mu_{Y^s}^{(h_{y_{is}}^p)}] \\
&= \bigvee_{h_{y_{iq}}^p \in \underline{C}_\alpha} [\mu_{\underline{C}_\alpha}^{(h_{y_{iq}}^p)} \wedge \mu_{Y^1}^{(h_{y_{i1}}^p)} \wedge \dots \wedge \mu_{Y^s}^{(h_{y_{is}}^p)}] \\
&\quad \bigvee_{h_{y_{iq}}^p \notin \underline{C}_\alpha} [\mu_{\underline{C}_\alpha}^{(h_{y_{iq}}^p)} \wedge \mu_{Y^1}^{(h_{y_{i1}}^p)} \wedge \dots \wedge \mu_{Y^s}^{(h_{y_{is}}^p)}] \\
&= \bigvee_{h_{y_{iq}}^p \in \underline{C}_\alpha} [\mu_{Y^1}^{(h_{y_{i1}}^p)} \wedge \dots \wedge \mu_{Y^s}^{(h_{y_{is}}^p)}]
\end{aligned}$$

D'où il suit que :

$$\sup_{h_{y_{iq}}^p \in Y} \mu_{D^c}^{(h_{y_{iq}}^p)} = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \sup_{h_{y_{iq}}^p \in \underline{C}_\alpha} (\mu_{Y^1}^{(h_{y_{i1}}^p)} \wedge \dots \wedge \mu_{Y^s}^{(h_{y_{is}}^p)})]$$

[Q.E.D.]

6 - BIBLIOGRAPHIE

- [1] DEBREU (G.) : Theory of Value. Cowles Foundation Monograph 17 - John Wiley and Sons, Inc., New-York, 1959.
Traduction française: Théorie de la valeur.
A.F.I.R.O., Dunod, Paris, 1966, 121 p.
- [2] KAUFMANN (A.): Introduction à la théorie des sous-ensembles flous. 4 volumes. Masson, Paris, 1973 à 1977.
- [3] LANCASTER (K.): Consumer Demand. A new Approach. Columbia University Press, New-York, London, 1971,
- [4] MARTIN (C.): Contribution à l'étude du comportement de consommation. Thèse complémentaire, Université de Dijon, 1976, 533 p.
- [5] NEGOITA (C.V.) et RALESCU (D.A.): Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1975, 191 p.
- [6] PONSARD (C.) : On the Imprecision of Consumer's Spatial Preferences. Papers of the Regional Science Association, vol.42, 1980.
- [7] PONSARD (C.) : Le temps, l'espace et leurs structures formelles. *Ruch Prawniczy Ekonomiczny i Socjologiczny*. *Panstwowe Wydawnictwo Naukowe*, Warszawa - Poznan, 1980.
- [8] PREVOT (M.) : Sous-ensembles flous. Collection de l'Institut de Mathématiques Economiques, vol.14, Sirey, Paris, 1977, 136 p.
- [9] ROUGET (B.) : La consommation des biens localisés. Contribution à l'analyse multidimensionnelle des choix spatialisés. Thèse complémentaire, Université de Dijon, 1980.