



**HAL**  
open science

## Cordes vibrantes avec obstacles

Henri Cabannes

► **To cite this version:**

Henri Cabannes. Cordes vibrantes avec obstacles. Acta Acustica united with Acustica, 1984, 55, 1 (7), pp.14-20. hal-01527089

**HAL Id: hal-01527089**

**<https://hal.science/hal-01527089>**

Submitted on 23 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Cordes vibrantes avec obstacles\*

par H. Cabannes

Laboratoire de Mécanique Théorique, associé au C.N.R.S. Université Pierre et Marie Curie,  
4 place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05

## Sommaire

L'article suivant est une revue des principaux résultats relatifs aux mouvements d'une corde vibrante en présence d'un obstacle fixe: obstacle rectiligne ou obstacle ponctuel. On indique des conditions suffisantes pour que le mouvement soit une fonction presque périodique du temps, ou une fonction périodique, et on précise certaines propriétés du mouvement. Les démonstrations ne sont pas données, seules les idées générales sur lesquelles sont basées ces démonstrations sont indiquées; dans chaque cas toutefois, le lecteur est renvoyé aux références bibliographiques, dans lesquelles les démonstrations sont faites en détail.

## *Schwingende Saiten mit Hindernissen*

### Zusammenfassung

Der folgende Artikel stellt einen Überblick über die Hauptergebnisse der Bewegungen einer schwingenden Saite mit einem festen linienartigen oder punktförmigen Hindernis dar. Es werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Bewegung fast-periodisch oder periodisch erfolgt, und es werden bestimmte ihrer Eigenschaften näher beschrieben. Demonstrationsexperimente werden nicht im einzelnen angegeben, sondern lediglich die solchen Demonstrationen zugrundeliegenden allgemeinen Ideen, doch wird der Leser in jedem Fall auf Literaturstellen verwiesen, in welchen solche Versuche im einzelnen beschrieben sind.

## *Vibrating Strings and Obstacles*

### Summary

This article is a review of the principal results relating to the movements of a vibrating string in the presence of a field object, a rectilinear object or a pointed object. Sufficient conditions are given for the movement to be an almost periodic function of time, and certain properties of the motion are fixed. The demonstrations are not described but only the general ideas on which they are based; in each case the reader is referred to bibliographical references in which the demonstrations are given in detail.

## 1. Introduction

Les premières recherches relatives aux mouvements des cordes vibrantes remontent à d'Alembert et furent publiées en 1761 [1]. L'importance des mouvements vibratoires dans tous les chapitres de la Mécanique et de la Physique est à l'origine du nombre considérable de travaux consacrés au problème des cordes vibrantes. La prise en considération des contraintes unilatérales, c'est-à-dire l'étude du mouvement d'une corde qui vibre en présence d'un obstacle a été entreprise pour la première fois par Amério et Prouse en 1975 [3]. Ces auteurs ont démontré l'existence de la solution lorsque la corde, fixée à ses deux extrémités, oscille en présence d'un obstacle rectiligne fixe, parallèle à la position d'équilibre. Ce résultat a été étendu aux obstacles concaves par Schatzman [5]. Le cas des obstacles convexes est beaucoup plus difficile à

étudier à cause de la possibilité d'un contact persistant entre la corde et l'obstacle; aussi les seuls obstacles convexes étudiés en détails sont les obstacles ponctuels pour lesquels on peut citer les travaux de Reder [6] et Cabannes [10, 11, 14]. Le cas des obstacles rectilignes a également été très étudié; le principal résultat est l'existence de mouvements presque périodiques sous des conditions assez générales [9, 10]. En outre lorsque l'obstacle est initialement au repos dans une position dite unimodale, la fonction qui représente le mouvement de la corde en présence d'un obstacle parallèle à la position d'équilibre peut être exprimée par une formule explicite [12] qui généralise la formule relative à l'oscillation libre.

Cette formule a permis d'effectuer des calculs et ainsi d'observer certaines propriétés du mouvement de la corde; en particulier, quelle que soit la position initiale, la corde passe régulièrement au cours du mouvement par des positions dans lesquelles certains arcs de la corde sont parallèles à l'obstacle; ce résultat a été démontré [15]. Le caractère presque périodique du mouvement a pu être

---

\* Ce texte est celui d'une Conférence générale présentée le 17 mai 1983 aux Journées d'Analyse non-linéaire tenues à l'Université des Sciences et Techniques de Lille.

démontré également pour une corde initialement au repos dans une position qui n'est plus unimodale, à condition que l'obstacle rectiligne soit parallèle à la position d'équilibre et suffisamment voisin de cette position.

L'exposé qui suit est une synthèse des résultats démontrés par ailleurs et concernant d'une part le cas des obstacles rectilignes, d'autre part le cas des obstacles ponctuels.

## 2. Equations du problème

Le mouvement d'un fil est défini par la position à l'instant  $t$  du point  $M$  d'abscisse curviligne  $s$ . Le fil étant supposé inextensible  $s$  désigne aussi bien l'abscisse curviligne à l'état initial que dans un état quelconque; on a ainsi  $M = M(s, t)$  et  $|\partial M / \partial s| = 1$ . Le fil est supposé soumis à des forces extérieures de densité linéique,  $f$ , à l'exception de couples; dans ces conditions si le fil est parfaitement flexible, ce que nous supposons, les efforts intérieurs se réduisent en chaque point  $M$  à un vecteur  $T$ , tangent au fil:  $T = T(\partial M / \partial s)$ . La densité linéique du fil étant désignée par  $\rho(s)$ , les équations du mouvement sont les suivantes:

$$\rho \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial M}{\partial s} \right) + f, \quad \left| \frac{\partial M}{\partial s} \right| = 1. \quad (1)$$

Ces équations forment un système de quatre équations à quatre inconnues. La tension  $T$  sera supposée positive, cas correspondant à un fil tendu.

Au cours de son mouvement le fil peut rencontrer un obstacle fixe; la seule force  $f$  exercée sur le fil est la réaction  $R$  de l'obstacle, si bien qu'en l'absence de contact, on a:  $f = 0$ , tandis qu'au cours d'un contact persistant on a:

$$f = R = - \frac{\partial}{\partial s} \left( T \frac{\partial M}{\partial s} \right) = - T \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} - \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial M}{\partial s}. \quad (1')$$

Il résulte de la relation (1') que, par rapport à la tangente au fil, la réaction est située du côté opposé à  $(\partial^2 M / \partial s^2)$ , c'est-à-dire du côté opposé à la concavité: Fig. 1.

Pour satisfaire aux lois d'action de contact, la réaction  $R$  doit être orientée de l'obstacle vers le fil: en vertu de la relation (1') cela n'a lieu que dans le cas d'un obstacle qui est convexe (pour un observateur situé sur le fil); il en résulte qu'en présence d'un obstacle concave, tout contact persistant est impossible, la corde rebondit alors instantanément sur l'obstacle et si on admet que la réflexion est parfaite la composante normale de la vitesse du point du fil qui vient heurter l'obstacle, est multipliée par  $-1$  au cours du choc. Cette possibilité ou

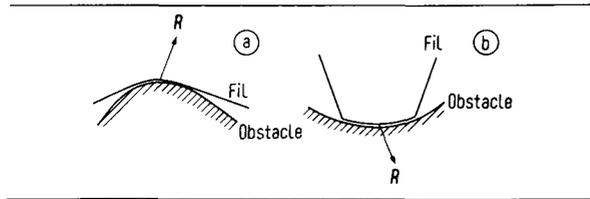


Fig. 1. Obstacle convexe (a) et obstacle concave (b).

impossibilité de la persistance du contact est à l'origine de la différence fondamentale entre les oscillations d'une corde vibrante en présence d'un obstacle convexe et les oscillations en présence d'un obstacle concave. Dans la pratique, seules les oscillations en présence d'obstacles ponctuels ou rectilignes ont pu être étudiées avec quelques détails; les premiers se comportant comme des obstacles convexes, les seconds comme des obstacles concaves.

## 3. Oscillations en présence d'un obstacle rectiligne [9, 11-13]

La corde peut osciller dans un plan  $x-u$ ; à l'équilibre elle est située sur le segment AB de l'axe des  $x$ ; les points A et B d'abscisses  $x = \pm \frac{1}{2}$ , sont des points fixes de la corde. Les petits mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre sont régis par l'équation classique des cordes vibrantes obtenue par linéarisation de l'éq. (1);  $u(x, t)$  désignant la position à l'instant  $t$  du point d'abscisse  $x$ , on doit avoir:

$$\square u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour } u(x, t) > -h, \quad (2)$$

$$u(\pm \frac{1}{2}, t) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (3)$$

Au cours du mouvement la corde vient heurter un obstacle rectiligne placé sur la droite  $u = -h$ , ( $h \geq 0$ ) et au cours du contact doit être satisfaite la relation (4); enfin à l'instant  $t = 0$ , la position et la vitesse de chaque point de la corde sont données: conditions (5).

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t+0) = - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t-0) \quad (4)$$

pour  $u(x, t) = -h$ ,

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) = \alpha(x) \geq -h, \quad \alpha(\pm \frac{1}{2}) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \beta(x), \quad \beta(\pm \frac{1}{2}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Le calcul de la solution peut être effectuée de proche en proche par la méthode d'Amério [3, 11].

On obtient de nombreuses propriétés du mouvement en utilisant le changement de variables.

$$u(x, t) = v(X, T), \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{F(x+t) + F(x-t)}{2}, \\ T &= \frac{F(x+t) - F(x-t)}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Si la fonction  $v(X, T)$  est une solution de l'éq. (2), il en est de même de la fonction  $u(x, t)$ . On peut étendre ce résultat au mouvement en présence de l'obstacle  $u = -h$ . Pour cela il suffit d'imposer à la fonction  $F$  les conditions suivantes:

$$\left. \begin{aligned} F(1+y) &= 1 - F(-y), \\ F(2+y) &= 2 + F(y), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$F'(y) > 0. \quad (9)$$

Ainsi, si  $v(X, T)$  est une solution du problème (2) – (4), il en est de même de la fonction  $u(x, t)$  [11]. Les conditions initiales relatives aux fonctions  $v(X, T)$  et  $u(x, t)$  sont liées par les relations:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= v\{F(x), 0\}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= F'(x) \frac{\partial v}{\partial T}\{F(x), 0\}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ces relations montrent que si la solution  $v(X, T)$  correspond à une corde initialement au repos, il en est de même pour la solution  $u(x, t)$ ; en outre, quelle que soit la position initiale  $u(x, 0) = \alpha(x)$ , il est toujours possible de choisir la fonction  $F$  de façon que la fonction  $v(X, 0)$  représente une ligne polygonale dont tous les segments ont même pente; il suffit de choisir:

$$F(x) = -\frac{1}{2} + \int_{-1/2}^x \frac{1}{k} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) \right| dx, \quad (11)$$

$$k = \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) \right| dx. \quad (12)$$

Les fonctions  $u(x, 0)$  et  $v(X, 0)$  possèdent les mêmes maxima  $M_i$  et les mêmes minima  $m_j$ .

### 3.1. Position initiale unimodale

Dans le cas d'une position initiale unimodale, c'est-à-dire d'une fonction  $u(x, 0)$  possédant un seul maxima dans l'intervalle  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ , maxima atteint pour  $x = a$  et que l'on peut supposer égal à 1, on a:

$$v(x, 0) = \tilde{v}(X, 0) = 1 - 2|X|, \quad (13)$$

$$2F(x) = \{1 - u(x, 0)\} \text{signe}(x - a). \quad (14)$$

Le mouvement  $v(X, T)$  est alors celui de la corde pincée symétrique; c'est une fonction périodique du temps de période  $1 + h$ , et on en déduit [9, 11, 13] que le mouvement  $u(x, t)$  est une fonction presque-périodique du temps; lorsque le nombre  $h$  est rationnel ( $h = p/q$ ,  $p$  et  $q$  entiers) le mouvement  $u(x, t)$  est alors une fonction périodique du temps dont la période est le plus petit multiple pair de  $p + q$ .

La fonction  $\tilde{v}(X, T)$  peut être développée en série de Fourier:

$$\tilde{v}(X, T) = a_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} a_p(x) \cos p \omega t \quad (15)$$

avec  $\omega = 2\pi/(1 + h)$ . Les coefficients  $a_p(x)$  s'expriment en fonction de lignes trigonométriques, et la transformation de produits de fonctions trigonométriques en sommes permet, après le regroupement des termes, d'exprimer la fonction  $\tilde{v}(X, T)$  fonction de deux variables à l'aide d'une fonction unique d'une variable.

$$\left. \begin{aligned} K(y) &= (y - \frac{1}{2})^2 \text{ pour } 0 \leq y \leq 1 \\ K(y+1) &= K(y). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

L'application des formules (6) et (7) fournit ensuite une formule explicite pour exprimer la solution  $u(x, t)$  du problème de la corde vibrante en présence de l'obstacle rectiligne  $u = -h$  [12]. La fonction  $F$  étant déterminée par la formule (14), on a:

Pour les points de la corde qui rencontrent l'obstacle, c'est-à-dire pour  $F(x+t) + F(x-t) \leq 1 - h$ ,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1-h}{2} - \frac{\{F(x+t) + F(x-t)\}^2}{2(1+h)} \\ &+ (1+h) \left\{ K\left(\frac{F(x+t)}{1+h}\right) + K\left(\frac{F(x-t)}{1+h}\right) \right. \\ &\left. - 2K\left(\frac{F(x+t) - F(x-t)}{2(1+h)} + \frac{1}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Pour les points de la corde qui ne rencontrent pas l'obstacle, c'est-à-dire pour

$$1 - h \leq |F(x+t) + F(x-t)| \leq 1,$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1-h}{1+h} \{1 - |F(x+t) + F(x-t)|\} \\ &+ (1+h) \left\{ K\left(\frac{F(x+t)}{1+h}\right) + K\left(\frac{F(x-t)}{1+h}\right) \right. \\ &\left. - K\left(\frac{1 - \varepsilon F(x+t)}{1+h}\right) - K\left(\frac{1 - \varepsilon F(x-t)}{1+h}\right) \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

$\varepsilon = \pm 1$ , possède le signe de  $F(x+t) + F(x-t)$ . Les formules (15) et (16) généralisent la formule classique:

$$u(x, t) = \frac{u(x+t, 0) + u(x-t, 0)}{2} \quad (19)$$

qui détermine le mouvement de la corde en l'absence d'obstacle. Elles permettent en outre d'écrire un programme calculant le mouvement de la corde; deux exemples, correspondant aux mêmes conditions initiales:

$$u(x, 0) = t - 2 \left| x + \frac{\cos \pi x}{\pi} \right|, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (20)$$

et à des positions différentes de l'obstacle sont représentées sur les Figs. 2 et 3.

### 3.2. Position initiale quelconque

Dans le cas d'une position initiale quelconque la corde étant toujours au repos à l'instant initial, il n'est pas possible d'obtenir des formules analogues aux formules (17) et (18), cependant on peut toujours grâce à la formule (11) se ramener au cas où on aurait:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial X}(X, 0) &= \pm k, \quad k > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial T}(X, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

on a alors pendant tout le mouvement, quels que soient  $X$  et  $T$

$$\frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial T} = 0, \quad \left( \frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)^2 = k^2. \quad (22)$$

Pour les valeurs entières du temps  $t = N$ , on a

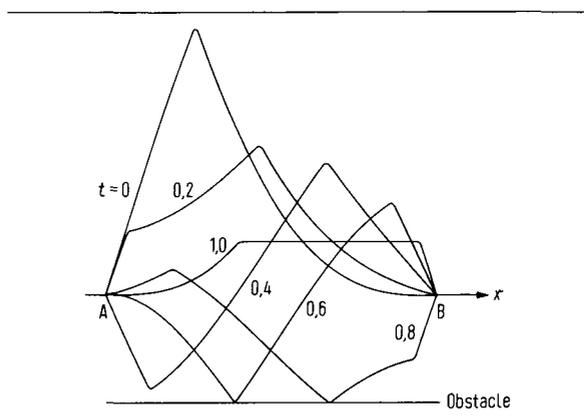


Fig. 2. Obstacle rectiligne:  $h = 2/5$ ,  $T = 14$ .

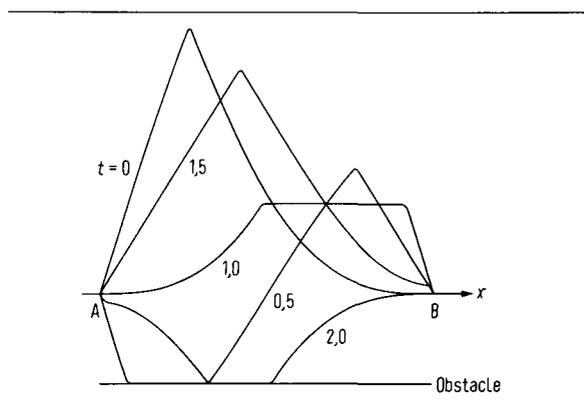


Fig. 3. Obstacle rectiligne:  $h = 1/3$ ,  $T = 4$ .

d'après les formules (7) et (8):  $T = N$  et

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, N) &= F'(x+N) \frac{\partial v}{\partial X}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, N) &= F'(x+N) \frac{\partial v}{\partial T}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

On en déduit que pour les valeurs entières du temps, la corde est dans une position qui comporte uniquement des arcs rectilignes parallèles à l'obstacle et des arcs sur lesquels la vitesse est nulle. Ce résultat est mis en évidence sur les Figs. 2 et 3.

### 4. Oscillations en présence d'un obstacle ponctuel [10]

Lorsque la corde oscille en présence d'un obstacle ponctuel fixe, le contact entre la corde et l'obstacle peut être persistant, et demeure aussi longtemps que la réaction de l'obstacle sur la corde satisfait les lois d'action de contact. La corde touche l'obstacle au point d'abscisse  $s_0$ ; en intégrant l'éq. (2) de  $s_0 - \varepsilon$  à  $s_0 + \varepsilon$  on obtient lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro:

$$R = - \left( T \frac{\partial M}{\partial s} \right) (s_0 + 0, t) + \left( T \frac{\partial M}{\partial s} \right) (s_0 - 0, t). \quad (24)$$

L'obstacle étant placé au point  $x = x_0$ ,  $u = u_0$ , les relations (2), (3) et (5) sont toujours valables tandis que la relation (4) doit être remplacée par la condition

$$- \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + 0, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 - 0, t) \geq 0 \quad \text{pour } u(x_0, t) = u_0. \quad (25)$$

Cette condition suppose que la corde est située au dessus de l'obstacle et que la corde est tendue (tension positive). Les résultats les plus nombreux

concernent le cas où l'obstacle est situé au milieu du segment qui joint les extrémités fixes; nous supposons dans la suite de l'exposé qu'il en est toujours ainsi. On a alors le résultat suivant: «Si les données initiales  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  sont décomposées en leur partie paire (d'indice  $p$ ) et leur partie impaire (d'indice  $i$ ):  $\alpha = \alpha_p + \alpha_i$ ,  $\beta = \beta_p + \beta_i$ , la fonction  $u(x, t)$  qui représente le mouvement de la corde est égal à la somme  $u_p + w_i$  où  $w_i$  représente l'oscillation libre correspondant aux données initiales  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , tandis que  $u_p$  représente le mouvement de la corde en présence de l'obstacle avec les données  $\alpha_p, \beta_p$ ».

Ce théorème permet de limiter l'étude du mouvement aux cas où les données sont symétriques, c'est-à-dire au cas où les fonctions  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  sont des fonctions paires.

#### 4.1. Construction de la solution

Les données initiales sont donc supposées symétriques et  $\alpha(0)$  est supposé positif. Au début du mouvement le mouvement est l'oscillation libre  $u = w(x, t)$  telle que  $w(x, 0) = \alpha(x)$ ,  $(\partial w / \partial t)(x, 0) = \beta(x)$ , soit:

$$w(x, t) = \frac{\alpha(x+t) + \alpha(x-t)}{2} + \frac{B(x+t) - B(x-t)}{2} \quad (26)$$

avec

$$B(x) = \int_0^x \beta(\lambda) d\lambda.$$

Le premier contact a lieu à l'instant  $t = C_0$  qui est la plus petite racine positive de l'équation.

$$w(0, t) = \alpha(t) + B(t) = 0. \quad (27)$$

Après l'instant  $C_0$ , aussi longtemps que le contact subsiste, on peut considérer que l'on se trouve en présence de deux cordes de longueur  $\frac{1}{2}$ , ayant leurs extrémités fixes et pour chacune de ces cordes le mouvement est l'oscillation libre correspondant aux données à l'instant  $t = C_0$ . Pour déterminer le mouvement de ces cordes, il est commode d'introduire, à côté de la fonction  $w$ , une nouvelle fonction  $v$ :<sup>1</sup>

$$v(x, t) = \frac{-\alpha(x+t) + \alpha(x-t)}{2} - \frac{B(x+t) + B(x-t)}{2}. \quad (28)$$

<sup>1</sup> La fonction  $v(x, t)$  introduite dans la section 4, formule (28), est sans rapport avec la fonction  $v(X, T)$  de la section 3, formule (6).

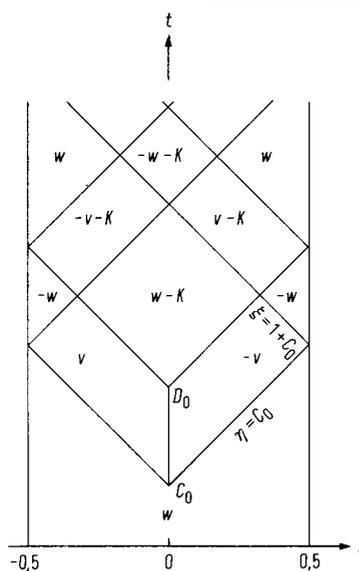


Fig. 4. Obstacle ponctuel, fonction  $u(x, t)$ .

Exprimées à l'aide des variables caractéristiques  $\xi = x + t$ , et  $\eta = x - t$  la somme  $w + v$  ne dépend que de la variable  $\eta$ , et la différence  $w - v$  que de la variable  $\xi$ . Par ailleurs on a  $v(0, t) = 0$ . Il en résulte que, pendant le contact, on a au voisinage de l'obstacle  $u = -v$  si  $x$  est positif,  $u = v$  si  $x$  est négatif: Fig. 4. La réaction de l'obstacle sur la corde a pour valeur:

$$R = -2T_0 \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = 2T_0 \{\alpha'(t) + \beta(t)\}. \quad (29)$$

$T_0$  désigne la tension (positive) de la corde dans la position d'équilibre. Le contact a lieu aussi longtemps que la réaction est positive, et cesse à l'instant  $t = D_0$ , qui est la plus petite racine supérieure à  $C_0$  de l'équation

$$-\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \alpha'(t) + \beta(t) = 0. \quad (30)$$

Après l'instant  $t = D_0$ , on a, au moins au début, une nouvelle oscillation libre, pour laquelle les valeurs de  $u(x, t)$  sont indiquées sur la Fig. 4; la constante  $K$  possède la valeur  $K = w(0, D_0)$ .

Après l'instant  $t = D_0$  on est donc ramené au problème initial. Comme on a  $w(x, t+1) = -w(x, t)$  la nouvelle oscillation libre, qui commence à l'instant  $t = D_0$ , cesse au plus tard à l'instant  $D_0 + 1$ . L'instant  $t = C_1$  du second contact vérifie donc l'égalité  $C_1 \leq 1 + D_0$ .

A titre d'exemple on peut traiter, [10], le cas d'une corde initialement au repos dans la position

$$u(x, 0) = \alpha(x) = \cos(2k + 1)\pi x \quad (31)$$

où  $k$  désigne un entier positif. On obtient:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{2(2k+1)}, & D_0 &= 2C_0, \\ C_n &= n \frac{2k+2}{2k+1}, & D_n &= C_n + D_0 \\ & & & (n = 1, 2, \dots, k+1). \end{aligned} \right\} (32)$$

Pour  $t = k+1 + C_0$  la corde est au repos dans la position  $u(x, k+1 + C_0) = 1 + |\sin(2k+1)\pi x|$ , et le mouvement est périodique, de période

$$T = 1 + 1 + 2k + \frac{1}{1+2k}. \quad (33)$$

Utilisant de nouveau la fonction  $v(X, T)$  introduite dans la formule (6), fonction qui sera notée  $\bar{v}$  pour éviter toute confusion avec la fonction  $v(x, t)$  introduite dans la formule (28), il est possible, à partir d'une fonction  $\bar{v}(X, T)$  qui représente le mouvement de la corde en présence de l'obstacle ponctuel placé au point  $u = \bar{v} = x = X = 0$ , d'obtenir une infinité de fonctions représentant un tel mouvement. On utilise pour cela les formules (6) et (7) avec une fonction  $F(y)$  impaire satisfaisant la première des relations (8). La formule (6) conserve les périodes entières; c'est-à-dire que l'identité  $\bar{v}(X, T+N) \equiv \bar{v}(X, T)$  ( $N$  entier) entraîne l'identité  $u(x, t+N) \equiv u(x, t)$ .

On en déduit, en se ramenant au cas des conditions initiales (31) avec  $k=0$ , que si une corde est initialement au repos dans une position formée de deux segments de droite (corde pincée) le mouvement est périodique avec la période  $T=3$ .

#### 4.2. Mouvement du milieu de la corde

Lorsqu'on connaît le mouvement de la corde, on connaît naturellement le mouvement du milieu. Réciproquement, dans le cas d'un mouvement symétrique, la connaissance du mouvement du milieu permet de déterminer le mouvement de la corde. Pour démontrer ce résultat, nous désignons par  $w^0(x, t)$  l'oscillation libre qui correspond aux données à l'instant  $t_0$ , et nous posons  $f^0(t) = w^0(0, t)$ . Dans le plan  $x-t$ , Fig. 4, nous considérons les régions (R<sub>1</sub>) et (R<sub>2</sub>):

$$(R_1) \quad D_0 \leq t \pm x \leq 1 + C_0,$$

$$(R_2) \quad 1 + C_0 \leq t \pm x \leq 1 + D_0.$$

Posant  $K = w^0(0, D_0)$  on a:

$$\text{dans } (R_1) \quad w^{D_0}(x, t) = w^0(x, t) - K$$

$$\text{dans } (R_2) \quad w^{D_0}(x, t) = -w^0(x, t) - K$$

on en déduit, dans (R<sub>1</sub>) comme dans (R<sub>2</sub>)

$$2w^{D_0}(x, t) = f^{D_0}(t+x) + f^{D_0}(t-x). \quad (34)$$

En particulier, si le mouvement du milieu de la corde est périodique, on aura après certains nombres de contacts  $f^{D_n}(t) = f^{D_0}(t)$  et l'oscillation libre qui a lieu après l'instant  $t = D_n$  est le même que l'oscillation libre qui a lieu après l'instant  $t = D_0$ . Ainsi:

*Théorème:* lorsque les données initiales sont paires, la condition nécessaire et suffisante pour le mouvement de la corde soit périodique est que le mouvement du milieu de la corde soit périodique.

Ce théorème qui permet de reconnaître le caractère périodique de certains mouvements de la corde est intéressant car le mouvement du milieu de la corde peut être déterminé sans qu'il soit nécessaire de connaître le mouvement de la corde. Dans la première oscillation libre, on a:

$$f^0(t) = w^0(0, t) = \alpha(t) + B(t), \quad (35)$$

$$\frac{df^0(t)}{dt} = -\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) \quad (36)$$

il résulte de ces relations que  $f^0(t)$  est déterminé par les conditions initiales et que le premier contact commence à l'instant  $t = C_0$ , qui est la plus petite valeur positive annulant  $f^0(t)$ , et se termine à l'instant  $t = D_0$ , qui est la plus petite racine supérieure à  $C_0$  annulant la dérivée de  $f^0(t)$ . Ensuite on a:

$$\begin{aligned} f^{D_0}(t) &= f^0(t) - f^0(D_0) \\ &\quad \text{pour } D_0 \leq t \leq 1 + C_0, \\ f^{D_0}(t) &= -f^0(t) - f^0(D_0) \\ &\quad \text{pour } 1 + C_0 \leq t \leq 1 + D_0, \end{aligned} \quad (37)$$

$$f^{D_0}(t+1) = -f^{D_0}(t). \quad (38)$$

Comme nous l'avons déjà remarqué chaque oscillation libre a lieu pendant une durée au plus égale à 1.

Comme exemple nous avons traité [14] le cas où la fonction  $f^{D_n}(t)$  nulle pour  $t = D_n$  et  $t = 1 + D_n$  possède dans l'intervalle  $D_n \leq t \leq 1 + D_n$  deux maxima  $M_1^n, M_2^n$  et un minimum  $m^n$ . D'après les formules (37) la fonction  $f^{D_{n+1}}(t)$  possède également deux maxima et un minimum et on a:

Si  $m^n \geq 0$

$$M_1^{n+1} = M_1^n - m^n$$

$$m^{n+1} = M_1^n - M_2^n$$

$$M_2^{n+1} = M_1^n.$$

Si  $m^n < 0$

$$M_1^{n+1} = -m^n + M_2^n$$

$$m^{n+1} = -m^n - M_1^n$$

$$M_2^{n+1} = -m^n.$$

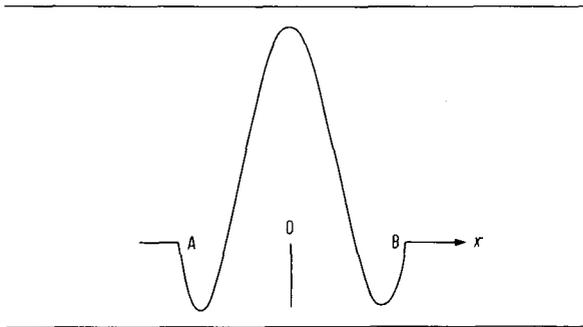


Fig. 5. Obstacle ponctuel, position initiale  $u(x, 0)$ .

Si la fonction  $f^0(t)$  est affine par morceaux, il en est de même de toutes les fonctions  $f^{D_n}(t)$  et si on suppose en outre que  $|df^0(t)/dt|$  est constant, ce qui est un cas auquel on peut toujours se ramener par le changement de variables (6), cette valeur constante est  $k = 2(M_1 - m + M_2)$ , quantité indépendante de l'indice  $n$ .

Il est intéressant d'appliquer ce résultat au cas d'une corde initialement au repos dans une position symétrique  $u(x, 0) = \alpha(x)$ , telle que la fonction  $\alpha(x)$  possède dans l'intervalle  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$  deux minima égaux à  $-1$  et un maximum  $M$  atteint pour  $x = 0$ : Fig. 5.

On démontre [14] que si  $M$  est irrationnel, le mouvement n'est pas périodique, tandis que si  $M$  est rationnel ( $M = p/q$ ,  $p$  et  $q$  entiers premiers entre eux) le mouvement est périodique avec la période:

$$T = 12q^2 + 3pq - 2p^2 \quad \text{si } p \leq 2q$$

$$T = 3p^2 + 3pq - 8q^2 \quad \text{si } p \geq 2q.$$

### 5. Conclusion

Les phénomènes physiques comportant des vibrations en présence d'obstacles sont fort nombreux. On peut citer, en génie civil, les vibrations des structures en présence d'un support en béton, en biomécanique les vibrations du tympan en présence d'osselets, en acoustique les vibrations des cordes de piano en présence des marteaux, et d'une façon générale tous les phénomènes d'écho. Naturellement le modèle que nous étudions est un schéma très simplifié de réalités fort complexes; même si la modélisation utilisée est dérisoire par rapport à cette complexité, on ne peut en déduire qu'elle soit mauvaise ou inutile. Les problèmes mathématiques

introduits sont nombreux et intéressants et nous espérons que cet exposé général qui résume les principaux résultats déjà acquis pourra servir de point de départ à des travaux ultérieurs aussi bien appliqués que théoriques.

### Bibliographie

- [1] d'Alembert, J., Opusculs mathématiques. David éditeur, Paris 1761.
- [2] Favard, J., Leçons sur les fonctions presque-périodiques. Gauthier-Villars, Paris 1935.
- [3] Amerio, L. et Prouse, G., Study of the motion of a string vibrating against an obstacle. Rendiconti di Matematica **8** [1975], 563.
- [4] Betro, B. et Gotusso, L., Calcolo numerico di una corda vibrante contra un obstacolo. Istituto per le applicazioni del calcolo «Mauro Picone» - Publ. serie III, n° 114, 1977.
- [5] Schatzman, M., An hyperbolic problem of second order with unilateral constraints: the vibrating string with a concave obstacle. Publ. Université Paris VI, n° 78031.
- [6] Reder, C., Etude qualitative d'un problème hyperbolique avec contrainte unilatérale. Thèse de 3ème Cycle, Université de Bordeaux 1979.
- [7] Citrini, C. et D'Acunto, B., Sur le choc de deux cordes. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris **289 A** [1979], 5.
- [8] Cabannes, H., Mouvements périodiques d'une corde vibrante en présence d'un obstacle rectiligne. J. Math. Phys. Appl. (Z.A.M.P.) **31** [1980], 473.
- [9] Cabannes, H. et Haraux, A., Mouvements presque-périodiques d'une corde vibrante en présence d'un obstacle rectiligne. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris **291 A** [1980], 563.
- [10] Cabannes, H., Mouvements périodiques d'une corde vibrante en présence d'un obstacle ponctuel. J. Mécan. **20** [1981], 41.
- [11] Cabannes, H. et Haraux, A., Mouvements presque-périodiques d'une corde vibrante en présence d'un obstacle fixe, rectiligne ou ponctuel. Intern. J. Non Linear Mechanics **16** [1981], 449.
- [12] Cabannes, H., Mouvements d'une corde vibrante en présence d'un obstacle rectiligne. Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, série II **295** [1982], 637.
- [13] Haraux, A. et Cabannes, H., Almost periodic motion of a string vibrating against a straight fixed obstacle. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications **7** [1983], 129.
- [14] Cabannes, H., Periodic Motions of a string vibrating against a fixed pointmass obstacle. Mathematical Methods in Applied Sciences (à paraître).
- [15] Cabannes, H., Mouvement d'une corde vibrante en présence d'un obstacle rectiligne. J. Mécan. Théorique Appl. (à paraître) et Comptes Rendus, Acad. Sc. Paris, série II, **296** [1983], 1367.