



**HAL**  
open science

## Quasi-ordre, pseudo-ordre et non ordre

Hilarion Josaphat Mfouka

► **To cite this version:**

Hilarion Josaphat Mfouka. Quasi-ordre, pseudo-ordre et non ordre. [Rapport de recherche] Laboratoire d'analyse et de techniques économiques(LATEC). 1995, 24 p., ref. bib.: 9 ref. hal-01526967

**HAL Id: hal-01526967**

**<https://hal.science/hal-01526967>**

Submitted on 23 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LATEC

## LABORATOIRE D'ANALYSE ET DE TECHNIQUES ÉCONOMIQUES

UMR 5601 CNRS

DOCUMENT DE TRAVAIL



Pôle d'Economie et de Gestion

2, boulevard Gabriel - 21000 DIJON - Tél. 03 80 39 54 30 - Fax 03 80 39 54 43

ISSN : 1260-8556

**n° 9502**

**QUASI-ORDRE, PSEUDO-ORDRE ET NON ORDRE**

**Hilarion Josaphat MFOUKA**

**Février 1995**

---

QUASI-ORDRE TOTAL, PSEUDO-ORDRE ET NON ORDRE

Hilarion Josaphat MFOUKA

---

Tous mes remerciements à Mr M. PREVOT.

---

*" La connaissance produit la culture dans les sillons de l'âme. Quand elle est honorablement et dignement domptée, loin de toute ruse et de toute méchanceté par l'esprit de sagesse, elle devient un merveilleux instrument de vie capable de dénouer les énigmes et de redonner confiance et espoir."*

**KONGO BANTU**

---

## RESUME

Ce travail présente la structure de non ordre comme un modèle qui généralise les structures de quasi-ordre total et de pseudo-ordre. L'étude analytique repose sur des concepts courants de l'approche relationnelle de la modélisation des préférences et sur quelques autres nouveaux concepts et principes adaptés au contexte vague et imprécis des préférences. Ainsi, le postulat généralisé de comparabilité limitée et, des concepts de composants et d'états relationnels sont utilisés pour décrire les fondements optionnels des préférences. Pour expliquer la cohérence des structures de préférence les propriétés de transitivité et d'intransitivité imprécises ont été introduite. Par ailleurs, le principe du pouvoir discriminant imprécis justifie la nature imprécise des préférences.

## SUMMARY

This study, after having presented the structure of total semi-order and that of pseudo-order one, presents a new preference structure called non order. This one generalizes both the semi-order structure and the pseudo-order one. The details analysis are based on the usual concepts of the relationnal approach of preference modelling and on some new concepts and principles which fit the imprecise context. These new principles are : imprecise discriminant power, imprecise transitivity, imprecise intransitivity and generalized limited comparability. The new concepts are : preference relationnal constituent and preference relationnal state.

## MOTS CLES

*Comparabilité, composant relationnel, état relationnel, imprécision, non ordre, pseudo-ordre, pouvoir discriminant, quasi-ordre, préférence, rassembleur, relation, système relationnel.*

## TABLE DES MATIERES

	pages
INTRODUCTION	1
I- PRELIMINAIRES	2
1- Options globales de préférence	2
2- Opérations sur les relations	2
3- Définitions	3
II- STRUCTURES DE QUASI-ORDRE ET DE PSEUDO-ORDRE	6
1 Quasi-Ordre Total (Q.O.T)	6
2 Pseudo-Ordre (P.O.)	10
III- STRUCTURE DE NON ORDRE LARGE (N.O.L.)	13
1 Comparabilité limitée généralisée	13
2 Fondement Théorique	14
3 Définition, Propriétés et Commentaires	18
CONCLUSION	24
BIBLIOGRAPHIE	24

### Quelques notations

N.O.R.I. : Non Ordre Relativement Indéterminé.

N.O.L. : Non Ordre Large.

C.R.P. : Composant Relationnel de Préférence.

S.R.P. : Système Relationnel de Préférence.

S.R.F.P. : système relationnel fondamental de préférence.

S.R.R.P. : système relationnel regroupé de préférence.

Q.O.T. : quasi-ordre total.

P.O. : pseudo-ordre.

## INTRODUCTION

Ce travail met d'abord en lumière les fondements essentiels des structures de **quasi-ordre (Q.O.) et de pseudo ordre (P.O.) totaux** à partir des concepts de composants relationnels, de rassembleurs et de systèmes relationnels de préférence. Une généralisation de ces structures est ensuite faite à travers la structure appelée **non ordre (N.O.)** ; cf. H. MFOUKA [2] ). A partir de certaines propriétés, ce travail montre particulièrement que les Q.O.T. et les P.O. sont des N.O. particuliers. Cette généralisation met en évidence les limites fondamentales des deux premières structures et la nécessité d'élargir le cadre d'analyse des préférences. Une étude similaire a déjà été faite dans le cadre des non ordres additifs. Cependant, dans ce travail, on ne pose pas l'hypothèse d'additivité comme préalable : il s'agit de non ordres quelconques.

Les non ordres sont des structures qui présentent deux caractéristiques :

- elles sont amorphes : elles n'ont pas de fortes propriétés de cohérence, on y admet les incohérences classiques de non transitivité ( comme elles peuvent apparaître dans le paradoxe de CONDORCET (cf. B. ROY [5])) ;

- ce sont, en général, des "**pré-structures**" au sens où elles permettent de construire des structures plus cohérentes.

L'incohérence qu'elles peuvent refléter, incohérence qui peut s'apparenter à un désordre, dénote une imprécision plus ou moins épaisse qui caractérise la notion de préférence. En outre, la structure de non ordre est une réponse aux critiques portées sur l'attitude trop normative ou sur la portée trop restrictive et trop contraignante de certains modèles de préférence. Elle est fondée sur la prise en compte de nouvelles variables, d'hypothèses supplémentaires et l'élargissement d'un cadre de modélisation qui intègre progressivement des hypothèses plus proches de la réalité.

## I- PRELIMINAIRES

### 1- Options globales de préférence

Notons  $\mathcal{R}$  la relation de préférence. Soient  $a$  et  $b$  deux actions quelconques d'un ensemble fini  $A$ . On distingue généralement les cas de préférence suivants (cf. B. ROY [5] et H.J. MFOUKA [2]) :

$$- a \mathcal{R} b \text{ et } b \mathcal{R} a \iff a \overset{\cdot}{\mathcal{R}} b \quad (1)$$

il y a **préférence réversible** - que nous notons  $\overset{\cdot}{\mathcal{R}}$  - entre  $a$  et  $b$  (la relation classique d'indifférence - notée  $I$  - est une option de préférence réversible) ;

$$- a \mathcal{R} b \text{ et non } b \mathcal{R} a \iff a \overset{\rightarrow}{\mathcal{R}} b, \quad (2)$$

il y a **préférence irréversible** - que nous notons  $\overset{\rightarrow}{\mathcal{R}}$  - en faveur de  $a$  :  $b$  n'est pas préférée à  $a$  (la relation de **préférence stricte** - notée  $P$  - est une option de préférence irréversible) ;

- non  $a \mathcal{R} b$  et non  $b \mathcal{R} a$  : il y a **non préférence** entre  $a$  et  $b$  (et vice-versa). Ce cas est souvent assimilé à l'**incomparabilité** que l'on note  $R$ .

### 2- Opérations sur les relations

Définissons enfin les opérations suivantes (cf. M. ROUBENS, P. VINCKE [4]) entre deux relations binaires  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$  :  $\forall (a, b) \in A^2$  :

$$- \text{l'inclusion} : \mathcal{R}'' \subset \mathcal{R}' \iff (a \mathcal{R}'' b \implies a \mathcal{R}' b), \quad (3)$$

$$- \text{l'union} : a(\mathcal{R}'' \cup \mathcal{R}') b \iff a \mathcal{R}'' b \text{ ou } a \mathcal{R}' b, \quad (4)$$

$$- \text{l'intersection} : a(\mathcal{R}'' \cap \mathcal{R}') b \iff a \mathcal{R}'' b \text{ et } a \mathcal{R}' b, \quad (5)$$

$$- \text{le produit} : a \mathcal{R}'' \mathcal{R}' b \iff \exists c \in A / a \mathcal{R}'' c \text{ et } c \mathcal{R}' b. \quad (6)$$

**3 Définitions** (H. J. MFOUKA [2] et [3], B. ROY [5])

**31 Composant relationnel d'un système de préférence** (H. J. MFOUKA [2] et [3])

Soit  $M_0 = \{1, 2, \dots, t\}$  un ensemble d'indices.

On appellera **système de préférence**, l'énoncé des préférences d'un acteur de la décision ou celui des préférences observées ou constatées par l'homme d'étude.

On appellera **composant relationnel** -noté  $\mathcal{R}_i$  ( $i \in M_0$ )- **d'un système de préférence** ou **composant relationnel de préférence** (C.R.P.), un support



descriptif et représentatif d'un ou de plusieurs **aspects particuliers ou globaux, simples ou complexes**, caractérisant l'énoncé des préférences, tel que :

$$\forall (a,b) \in A^2, a \mathcal{R}_i b \implies a \mathcal{R} b \text{ (soit } \mathcal{R}_i \subset \mathcal{R} \text{)}. \quad (7)$$

Les relations de préférence faible et de préférence stricte - notées respectivement Q et P (cf. B.ROY [5] et [6], Ph.VINCKE [9]) - sont par exemple des composants relationnels de préférence irréversible.

Un **composant**  $\mathcal{R}_i$  sera dit **fondamental** s'il est admis que celui-ci représente **un ou plusieurs aspects jugés indissociables et significatifs** de préférence **que nul autre composant** (n'associant pas  $\mathcal{R}_i$ ), distinct de  $\mathcal{R}_i$ , **ne représente intégralement**.

On appellera composant relationnel principal des C.R.P.  $\mathcal{R}_i$  le C.R.P.  $\mathcal{R}$  tel que :

$$\mathcal{R} = \bigcup_{i \in M_0} \mathcal{R}_i. \quad (7')$$

### 32 Rassembleur de composants relationnels fondamentaux

La notion de rassembleur (H.J.MFOUKA [2] et [3]) va nous permettre de rechercher des composants significatifs, à partir de composants fondamentaux d'un système préexistant, pour répondre aux nécessités du processus décisionnel. Ceci suppose l'existence d'un premier système qui induit un autre. Le premier sera appelé **système inducteur** et, le second, **système résultant**. Les rassembleurs seront des composants de ce dernier système.

Lorsqu'un système de composants n'est pas bien adapté à un énoncé de préférence, on peut chercher à regrouper (exemple :  $T_0$  et  $T_1$  ; cf. II 22) ou à dissocier (exemple : on peut dissocier  $T_1$  en  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  ; cf. II 2) certains aspects de préférence en les représentant et en les rassemblant à partir de composants plus adéquats issus des composants fondamentaux d'un système inducteur. On dépasse alors l'objectif d'un simple regroupement (comme il en est le cas dans les systèmes relationnels regroupés de préférence ; cf. B. ROY [5] et B. ROY, Ph.VINCKE [6]) pour rechercher - à partir d'un inducteur fondamental inadéquat - un système résultant fondamental plus attrayant, plus clair, plus pertinent pour modéliser les préférences.

On appellera **rassembleur** tout composant relationnel **fondamental** issu d'un (par éclatement ou dissociation) ou de plusieurs (par regroupement ou association) composants fondamentales. Les rassembleurs obtenus par

dissociation ou éclatement seront appelés **rassembleurs de désagrégation** d'un C.R.P. ; ceux obtenus par association seront appelés **rassembleurs d'agrégation** de C.R.P..

### 33 Etats relationnels (H. J. MFOUKA [2] et [3])

#### 331 Comparaisons et combinaison relationnelles

Considérons deux actions quelconques a et b. Nous dirons que la **comparaison** entre a et b est **directe** si l'on peut décrire la préférence de a par rapport à b (ou vice versa) sans faire allusion à une quelconque autre action. C'est le cas où il existe un composant relationnel  $\mathcal{R}_1$  tel que :

$$a \mathcal{R}_1 b \text{ ou } b \mathcal{R}_1 a. \quad (8)$$

Lorsqu'on compare a à b par l'intermédiaire de quelque(s) autre(s) action(s), on dira que la **comparaison est indirecte**. C'est le cas où le lien de préférence entre a et b est décrit au moyen d'une opération ou de quelques opérations  $O_j$  ( $j=1,2,\dots,h'$ . Cf. 2) combinant plus d'un composant relationnel :

$$a \mathcal{R}_1 O_1 \mathcal{R}_1 O_2 \mathcal{R}_1 O_3 \dots O_s \mathcal{R}_h b. \quad (9)$$

Exemple : a IUP b : b n'est pas irréversiblement préférée à a.

On appellera **composant induit** par l'expression relationnelle (9) tout composant  $\mathcal{R}_h$ , tel que :

$$a \mathcal{R}_1 O_1 \mathcal{R}_1 O_2 \mathcal{R}_1 O_3 \dots O_s \mathcal{R}_h b \text{ et } a \mathcal{R}_h b. \quad (10)$$

Exemple : a IP b et a P b : l'existence d'une action c telle que : aIc et cPb est compatible avec la préférence stricte de a en défaveur de b.

#### 332 Etats relationnels

On appellera **état relationnel** d'un couple d'actions (a,b), notons-le  $E_1(a,b)$  ( $l=1,\dots,l_e$ ), un lien particulier établi entre a et b au moyen d'un composant ou d'une combinaison de composants relationnels.

Certains états sont compatibles avec une comparaison directe :

$$E_1(a,b) \Rightarrow a \mathcal{R}_1 b, \quad (11)$$

on les appellera **états relationnels directs** ; d'autres états sont compatibles avec une comparaison indirecte :

$$E_1(a, b) \Rightarrow a \mathcal{R}_1 O_1 \mathcal{R}_1 O_2 \mathcal{R}_1 O_3 \dots O_s \mathcal{R}_h b \text{ et } a \mathcal{R}_h b ; \quad (12)$$

on les appellera **états relationnels indirects**.

### 34 Autres définitions (H. J. MFOUKA [2] et [3], B. ROY [5], [6])

Considérons deux composants  $\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{R}_i'$ . On dira que  $\mathcal{R}_i$  est  $\mathcal{R}_i'$ -transitif (cf. B. ROY [5]) si :

$$\left( \mathcal{R}_i \mathcal{R}_i' \cup \mathcal{R}_i' \mathcal{R}_i \right) \subset \mathcal{R}_i . \quad (12')$$

On dira qu'un triplet de C.R.P.  $(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_i', \mathcal{R}_i'')$  vérifie la propriété de transitivité imprécise si l'on a :

$$\mathcal{R}_i \mathcal{R}_i' \subset \mathcal{R}_i''.$$

Notons  $\overline{\mathcal{R}}_i$  un C.R.P. tel que :

$$\forall a, b \in A : a \overline{\mathcal{R}}_i b \Rightarrow b \mathcal{R}_i a.$$

On dira qu'un triplet de C.R.P.  $(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_i', \mathcal{R}_i'')$  vérifie la propriété d'intransitivité imprécise si l'on a :

$$\mathcal{R}_i \mathcal{R}_i' \subset \overline{\mathcal{R}}_i''.$$

On peut remarquer que si tout triplet de C.R.P.  $(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_i', \mathcal{R}_i'')$  de  $\mathcal{R}$  vérifie la transitivité imprécise, alors  $\mathcal{R}$  est transitive. De même lorsque l'intransitivité imprécise est satisfaite par tout triplet de C.R.P. de  $\mathcal{R}$ , ce dernier composant est intransitif (excepté le cas où tous les C.R.P. de  $\mathcal{R}$  seraient symétriques). En substituant  $\overline{\mathcal{R}}$  à  $\mathcal{R}$ , ces remarques demeurent valables. Ainsi, postuler la transitivité (ou l'intransitivité) imprécise au niveau de tous les triplets de C.R.P. revient à admettre la transitivité classique au niveau du composant principal  $\mathcal{R}$  (ou  $\overline{\mathcal{R}}$ ).

On appellera **système de composants fondamentaux (resp. de rassembleurs) de préférence** un système de préférence dont les composants relationnels sont :

- fondamentaux (resp. des rassembleurs),
- représentatifs, exclusifs et exhaustifs.

Il sera représenté par un composant principal que l'on peut éclater ou décomposer en composants fondamentaux. Dans la suite :

- "S.R.F.P." désignera un système relationnel fondamental de préférence (cf. [5]) ou un système de composants relationnels fondamentaux de préférence (S.C.R.F.P. ; cf. H. J. MFOUKA [2]) ;

- "S.R.R.P." (cf. H. J. MFOUKA [2]) désignera un système relationnel de

rassembleurs de préférence (dont le système relationnel regroupé de préférence est un cas particulier ; cf. [5]).

Nous admettrons que  $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_t)$  est un **système de composants relationnels de préférence muni d'un descripteur -  $M_0$  - de niveau de préférence** (c'est à dire que chaque élément  $i$  de  $M_0$  indique un niveau de préférence qui croit avec  $i$ ).

## II- STRUCTURES DE QUASI-ORDRE ET DE PSEUDO-ORDRE

Ces structures sont des systèmes de composants relationnels fondamentaux ou de rassembleurs de préférence (cf. H.J.MFOUKA [2], B.ROY [5] et [6], Ph.VINCKE [7], [8] et [9]).

### 1 QUASI-ORDRE TOTAL (Q.O.T)

Le Q.O.T. est une structure constitué de deux composants relationnels fondamentaux de préférence irréversible et de non préférence irréversible. La non préférence irréversible est souvent réduite à l'indifférence - que l'on note I- et, la préférence irréversible est assimilée à la préférence stricte notée P. Pour généraliser la portée des composants du Q.O.T., nous notons  $\mathcal{R}_1$  le composant de préférence irréversible et,  $\mathcal{R}_0$  le composant de non préférence irréversible ; cette dernière option sera, en général, non assimilable à l'incomparabilité ( $\mathcal{R}_0 \neq R$ ) sinon la structure serait partielle.

#### 11 Notion de Seuil d'Indifférence et Pouvoir Discriminant

La notion de seuil d'indifférence -introduite par D. LUCE ([0])- justifie la remise en question de la transitivité a priori de l'indifférence. L'exemple de la tasse à café repris par Ph. VINCKE (cf. [7], p.1 (1.30-33) et p.2 (1.1-3)) montre bien que les préférences ne sont pas -en général- régies par la rationalité mathématique classique.

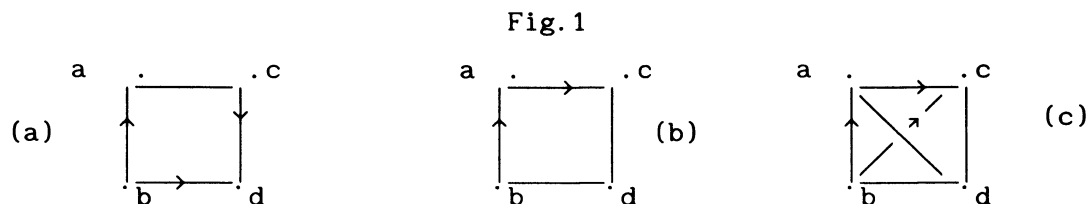
L'introduction du seuil d'indifférence signifie que le **pouvoir discriminant** (cf. B. ROY, [5]) des acteurs n'est pas **absolu** : deux actions peuvent donc être distinctes, mais, tant que la nuance entre les deux n'est pas significative, on ne peut préférer irréversiblement une action à une autre. On dit alors - dans ce cas - que les acteurs ont un **pouvoir discriminant nuancé** (cf. B.ROY [5]).

## 12 Définition d'un quasi ordre total

Un S.R.F.P. ou un S.R.R.P. noté  $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1)$  défini dans  $A$  est un quasi-ordre total si et seulement si :

- (1) le composant principal  $\mathcal{R}$  est total ( $\mathcal{R}=\emptyset$ ) ;,
- (2)  $\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_1$ ,
- (3)  $\mathcal{R}_1^2 \cap \mathcal{R}_0^2 = \emptyset$ .

La figure 1(a) traduit l'axiome (2) et, l'axiome (3) interdit la figure 1(b) que l'on peut retrouver dans un O.I. (cf. Fig.1(c)).



**Exemple** : dans le tableau suivant on donne un exemple de Q.O.T.. Pour chaque action, on précise la performance (saisie à partir d'une évaluation) et le seuil d'indifférence qui varie d'une action à une autre. Notons  $q(o)$  et  $g(o)$  - respectivement - le seuil et la performance associée à une action quelconque  $o$ . On admettra que :

$$\left[ \begin{array}{l} g(a)-g(o) \leq q(o) \\ g(o)-g(a) \leq q(a) \end{array} \right] \Rightarrow o \mathcal{R}_0 a \quad \text{et} \quad \left[ g(a)-g(o) > q(o) \Rightarrow a \mathcal{R}_1 o \right].$$

actions	a	b	c	d	e
seuils $q$	10	20	35	32	25
évaluations $g$	350	300	250	270	280

Tab. 1

On a :

$$a \mathcal{R}_1 b \mathcal{R}_1 c \mathcal{R}_0 d \mathcal{R}_0 e, \quad a \mathcal{R}_1 c, \quad a \mathcal{R}_1 d, \quad a \mathcal{R}_1 e, \quad b \mathcal{R}_0 d, \quad b \mathcal{R}_0 e \quad \text{et} \quad c \mathcal{R}_0 e.$$

## 13 Propriétés et Commentaires

### 131 Quelques Propriétés

Posons :  $\mathcal{R}_0 \equiv I$  et  $P \equiv \mathcal{R}_1$ .

$P_1$  - Soit  $\mathcal{R}_1$  ( $i \in \{1, 2\}$ ,  $\mathcal{R}_1 \neq \mathcal{R}$ ) un C.R.P. d'un S.R.P.  $\mathcal{R}$ . Si le composant  $P$  est  $\mathcal{R}_1$ -transitif, alors :  $\mathcal{R}$  est un Q.O.T..

Justification 1 :

$$PI \equiv P\mathcal{R}_1 cP \Rightarrow PIcP \Rightarrow PIP \equiv P^2 cP.$$

Supposons  $P^2 \cap I^2 \neq \emptyset$ . Il s'en suit que :

$$\exists \mathcal{R}_1 / P^2 c\mathcal{R}_1 \text{ et } I^2 c\mathcal{R}_1 \quad (P^2 c\mathcal{R}_1 \Rightarrow P \equiv \mathcal{R}_1)$$

$$I^2 cP \Rightarrow IPcI \Rightarrow \mathcal{R}_1 PcI,$$

P n'est plus  $\mathcal{R}_1$ -transitif, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

CQFD

$P_2$  - Soit  $\mathcal{R}$  un S.R.P. tel que  $PIPcP$ .

(1)  $P^2 cP$ ,

(2)  $(PI \cup IP) cP$ ,

(3)  $\left( P\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_1, P \right) cP$  où  $IPc\mathcal{R}_1$  et  $PIc\mathcal{R}_1$ .

Justification 2 : soit un C.R.P.  $\mathcal{R}_1$  ( $i \in \{1, 0\}$ ).

(1) :  $aPbIbPc \Rightarrow aPc, \forall a, b, c \in A \Rightarrow PP \equiv P^2 cP$ .

(2) :  $PIc\mathcal{R}_1$  :

$$P \equiv \mathcal{R}_1 \Rightarrow P^2 cP \text{ (donc } PIcP),$$

$$I \equiv \mathcal{R}_1 \Rightarrow \exists IP / IPcP \text{ (car } PIPcP),$$

l'une au moins des deux alternatives est vraie, soit  $(PI \cup IP) cP$ . Examinons le deuxième cas :

$IPc\mathcal{R}_1$  :

$$P \equiv \mathcal{R}_1 \Rightarrow P^2 cP \text{ (donc } IPcP \text{ car } PIPcP),$$

$$I \equiv \mathcal{R}_1 \Rightarrow \exists PI / PIcP \text{ (car } PIPcP),$$

d'où  $(PI \cup IP) cP$ .

(3) : remarquons que :

$$PIP \Rightarrow \exists \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1 / \left( P\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_1, P \right) \text{ et } IPc\mathcal{R}_1 \text{ et } PIc\mathcal{R}_1.$$

C.Q.F.D

$P_3$  - Si l'on  $P^2 \cap I^2 = \emptyset$ , alors :

(1)  $\left( P^2 I \cup IP^2 \right) c \left( P \cup \bar{P} \right)$  et  $\left( PI^2 \cup I^2 P \right) c \left( I \cup P \right)$ ,

(2)  $PIPcP$  alors :

(a) :  $\left( IP^2 \cap P^2 I \right) c P$ ,

(a') :  $\left( IP^2 \cap P^2 I \right) c P \Rightarrow \left( IP \cap PI \right) c P$ ,

(b) :  $I^2 cI \Rightarrow \left( IP \cup PI \right) c P$ ,

(c)  $\left( I\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_1 I \right) c P, \forall P^2 c \mathcal{R}_1$  (soit  $\mathcal{R}_1 \equiv P$ ),

(d)  $\left( P\mathcal{R}_1 \cap \bar{\mathcal{R}}_1 P \right) c P, \forall PI c \mathcal{R}_1$ ,

$$(3) \left( \mathcal{R}_1 P \cap P \mathcal{R}_1 \cap I \mathcal{R}_1 \cap \bar{\mathcal{R}}_1, I \right) \subset \left( I \cup P \right), \forall I^2 \subset \mathcal{R}_1, \forall I P \subset \mathcal{R}_1, .$$

Justification 3 : supposons que l'on ait  $P^2 \cap I^2 = \emptyset$ . Seuls les cas suivants sont possibles :  $P^2 I \subset P$ ,  $P^2 I \subset \bar{P}$  (ou  $P^3 \subset I$ ),  $I P^2 \subset P$ ,  $I^2 P \subset P$ ,  $I^2 P \subset I$  (ou  $I^3 \subset P$ ),  $P I^2 \subset P$ ,  $P I^2 \subset I$  (ou  $I^3 \subset P$ ).

Par ailleurs,

$$P I P \subset P \Rightarrow P^2 \subset P \Rightarrow \left( I^2 P \cup P I^2 \cup P I \cup I P \cup I^3 \right) \subset P \text{ car } P^3 \subset P,$$

on ne peut donc avoir  $\left( P^2 I \cap I P^2 \right) \subset \bar{P}$  (car  $P^3 \subset P$ ) ; il reste une seule alternative :  $\left( P^2 I \cap I P^2 \right) \subset P$ . Par ailleurs,

$$P I P \subset P \text{ et } I^2 \subset I \Rightarrow \left( I P \cup P I \right) \subset P \text{ car } I^3 \subset I.$$

(c) et (d) sont une autre formulation de (a) dans le cadre de l'axiome de transitivité imprécise. L'axiome (3) est également une autre formulation de la chaîne  $\left( P I^2 \cup I^2 P \right) \subset \left( I \cup P \right)$  dans le cas de la transitivité imprécise.

C.Q.F.D.

### 132 Commentaires

D'après  $P_1$ , la propriété de  $\mathcal{R}_1$ -transitivité, lorsqu'elle est admise sur un S.R.P. total, celui-ci est un Q.O.T..

$P_2$  est une propriété de cohérence. Lorsque tout chemin contenant successivement les arcs P, I et P ne peut générer un circuit, la préférence irréversible est transitive et, l'état direct de la préférence induite est irréversible. La propriété (3) de  $P_2$  traduit la condition  $P I P \subset P$  sous la forme d'une transitivité imprécise particulièrement soumise à quelques conditions.

Lorsque deux états successifs de préférence irréversible (d'une part) et de préférence réversible (d'autre part) sont incompatibles,  $P_3$  précise les possibilités de cohérence des préférences qui s'en suivent. Le cas où la cohérence transitive est vérifiée correspond à  $P_3(3)$ .

La structure que nous venons de voir s'inscrit dans le cadre du postulat de comparabilité limitée. Lorsque l'on considère globalement le système  $(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1)$ , la transitivité est remise en question ; la comparabilité l'est aussi puisque le composant  $\mathcal{R}_0$  de non préférence irréversible n'est pas équivalente à l'indifférence. La prise en compte du seuil d'indifférence qui est à l'origine de l'abandon de la contrainte de transitivité sur  $\mathcal{R}_0$  aboutit déjà à la prise en compte de l'imprécision dans la notion de préférence.

## 2 PSEUDO-ORDRE (P.O.)

Le P.O. est une structure représentée par un triplet de composants. Habituellement, en dehors des composants classiques I et P, on introduit un autre composant - Q - dit de préférence faible. Lorsque l'on associe à  $\mathcal{R}$  le descripteur  $M_0$  de niveaux de préférence, on peut généralement construire un système à trois composants :  $\mathcal{R}_0$ ,  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  :  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  sont des composants de préférence irréversible,  $\mathcal{R}_0$  est, comme dans le cas précédent, un composant de non préférence irréversible. Remarquons que, par rapport au cas précédents (cf. I 1),  $\mathcal{R}_1$  ne correspond plus à P mais à Q. L'introduction d'une troisième option relationnelle de préférence dite faible, Q, et la prise en compte d'un deuxième seuil sont les principaux traits caractéristiques de cette structure.

### 21 Seuils d'Indifférence et de Préférence

On a vu que le seuil d'indifférence assurait la transition de  $\mathcal{R}_0$  vers un composant de préférence irréversible. Le composant de préférence irréversible  $\mathcal{R}_2$  est, par rapport à  $\mathcal{R}_1$ , de niveau supérieur sur l'échelle des niveaux de préférence. L'introduction d'un troisième composant implique celle d'un deuxième seuil qu'on appelle seuil de préférence (défini dans le cadre du système (I, Q, P)). On suppose qu'il existe deux points de rupture : un seuil de passage de  $\mathcal{R}_0$  (ou I) à  $\mathcal{R}_1$  (ou Q) qui devient le seuil d'indifférence et un seuil de passage de  $\mathcal{R}_1$  à  $\mathcal{R}_2$  (ou P) qui est un seuil de préférence.

### 22 Définitions

Notons  $T_0$  et  $T_1$  deux rassembleurs définis comme suit :

$$\forall a, b \in A, T_0 \equiv I \cup \bar{Q} \cup Q \equiv \mathcal{R}_0 \cup \bar{\mathcal{R}}_1 \quad \text{et} \quad T_1 \equiv \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \equiv Q \cup P. \quad (13)$$

#### 221 Définition d'un pseudo-ordre

Un S.R.F.P. ou un S.R.R.P.  $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$  est un pseudo-ordre défini dans A si et seulement si :

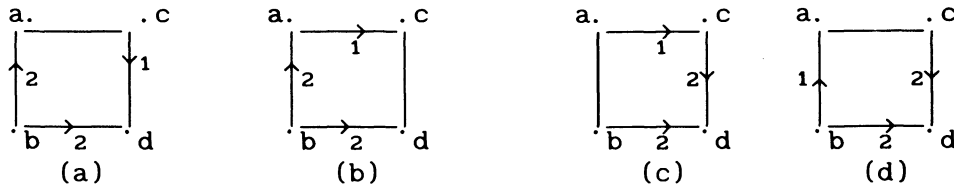
- (1) la relation  $\mathcal{R}$  est totale,
- (2)  $(\mathcal{R}_0, T_1)$  est un quasi-ordre,
- (3)  $(T_0, \mathcal{R}_2)$  -"- -"- ,



$$(4) \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_2.$$

Les figures suivantes représentent les quatre chaînes de l'axiome (4).

Fig.2



**Exemple :** par rapport à l'exemple précédent, dans le cas du P.O. (cf. Tab.2), on introduit le seuil de préférence p. Les préférences s'obtiennent alors de la façon suivante :

$$\left[ \begin{array}{l} g(a) - g(o) \leq q(o) \\ g(o) - g(a) \leq q(a) \end{array} \Rightarrow o \mathcal{R}_0 a \right], \left[ p(o) \geq g(a) - g(o) > q(o) \Rightarrow a \mathcal{R}_1 o \right]$$

$$\text{et } [g(a) - g(o) > p(o) \Rightarrow a \mathcal{R}_2 o].$$

actions	a	b	c	d	e	f
seuils q	25	15	20	15	15	10
seuils p	30	20	30	20	20	15
évaluations g	354	330	340	327	333	310

Tab.2

On a :

$a \mathcal{R}_2 b \mathcal{R}_0 c \mathcal{R}_0 d \mathcal{R}_0 e \mathcal{R}_2 f$ ,  $a \mathcal{R}_0 c$ ,  $a \mathcal{R}_2 d$ ,  $a \mathcal{R}_2 e$ ,  $a \mathcal{R}_2 f$ ,  $b \mathcal{R}_0 d$ ,  $b \mathcal{R}_0 e$ ,  $b \mathcal{R}_2 f$ ,  $c \mathcal{R}_0 e$ ,  $c \mathcal{R}_2 f$  et  $d \mathcal{R}_2 f$ .

On remarquera que le C.R.P.  $\mathcal{R}_1$  n'est pas nécessaire.

## 2221 Propriétés

$P_1$ - Soient  $(T_0, \mathcal{R}_2)$  et  $(\mathcal{R}_0, T_1)$  deux quasi-ordres totaux. Il s' en suit que :

- (1)  $\mathcal{R}_2$  et  $T_1$  sont transitifs,
- (2)  $(\mathcal{R}_2^2 T_0 \cap T_0 \mathcal{R}_2^2) \subset \mathcal{R}_2$  et  $(T_0^2 \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_2 T_0^2) \subset (T_0 \cup \mathcal{R}_2)$ ,
- (3)  $(T_1^2 \mathcal{R}_0 \cap \mathcal{R}_0 T_1^2) \subset T_1$  et  $(\mathcal{R}_0^2 T_1 \cap T_1 \mathcal{R}_0^2) \subset (T_1 \cup \mathcal{R}_0)$ ,
- (4)  $\mathcal{R}_2 T_0 \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_2$  et  $T_1 \mathcal{R}_0 T_1 \subset T_1$ .

Justification 1 : on se réfèrera à la propriété  $P_3$  des Q.O.T. (cf. II

131).

$P_2$ - Soient  $(T_0, \mathcal{R}_2)$  et  $(\mathcal{R}_0, T_1)$  deux quasi-ordres totaux ; alors :

$$\left( \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_2 \right) \subset T_1.$$

Justification 2 : on se réfèrera à l'axiome (2) du Q.O.T. et à la propriété  $P_3(a)$  des Q.O.T. (sachant que  $(T_0, \mathcal{R}_2)$  est un Q.O.T. ; cf. II 131).

$P_3$ - Soient  $\mathcal{R}=(I, Q, P)$  un P.O. et  $\mathcal{R}_1$  l'un de ses composants fondamentaux.

$$(1) : \left( P\mathcal{R}_1 \cap \overline{\mathcal{R}_1}P \cap P\overline{\mathcal{R}_1} \cap \mathcal{R}_1P \right) \subset P, \forall IQ \subset \mathcal{R}_1,$$

$$(2) : \left( \mathcal{R}_1Q \cap Q\overline{\mathcal{R}_1} \right) \subset P, \forall PI \subset \mathcal{R}_1,$$

$$(3) : \left( \mathcal{R}_1I \cap I\overline{\mathcal{R}_1} \right) \subset P, \forall PQ \subset \mathcal{R}_1.$$

Justification 3 : remarquons d'abord que :  $\mathcal{R}_1 \in \{I, Q, P\}$ . La propriété  $P_3$  (1) est une reformulation des conditions de chaîne indiquée par l'axiome (4) des P.O.. Elle montre que le composant relationnel P est  $\left( \mathcal{R}_1 \cup \overline{\mathcal{R}_1} \right)$ -transitif. Les propriétés  $P_3$  (2) et  $P_3$  (3) sont une reformulation des conditions de chaîne suivantes (respectivement) :

$$\left( PIQ \cup QIP \right) \subset P \text{ et } \left( PQI \cup IQP \right) \subset P.$$

On peut généraliser cette propriété à tout P.O.  $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ .

## 2222 Commentaires

$P_1$  montre que le composant de préférence irréversible,  $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ , est imprécisément transitif (si l'on distingue  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ ). Cependant, pris individuellement, seul  $\mathcal{R}_2$  est transitif. En dehors de ces cas de cohérence classique, les autres propriétés (comme dans le cas des Q.O.T.) ne concernent que les chaînes constituées de quatre composants.

La propriété  $P_2$  montre bien que l'axiome (4) des P.O. ne découle pas des axiomes (1), (2) et (3). Il précise clairement le composant de préférence irréversible  $\mathcal{R}_2$  (au lieu de  $\mathcal{R}_1$  ou, imprécisément,  $T_1$ ) induit par les quatre chaînes

$$\mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \text{ et } \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_2.$$

La propriété  $P_3$  montre que le composant P de préférence strict est  $\left( P \cup \overline{P} \right)$ -transitif (cf.  $P_3(1)$ ). En général, que ce soit dans les Q.O.T. ou

dans les P.O., aucun circuit triangulaire ne peut contenir plus de deux options de préférence irréversible. On ne peut non plus y trouver un quadrilatère qui soit un circuit contenant au moins deux options de préférence irréversible.

On constate la transitivité des options de préférence irréversible  $T_1$  et  $\mathcal{R}_2$ . La cohérence globale est donc maintenue à ce niveau. Dans le pseudo-ordre, on intègre de plus en plus l'imprécision et la diversité des options de préférence (par rapport au Q.O.T.). Le pouvoir discriminant devient de plus en plus nuancé.

### III- STRUCTURE DE NON ORDRE LARGE (N.O.L.)

Cette structure s'inscrit dans le cadre du postulat suivant de comparabilité limitée généralisée.

#### 1 Comparabilité limitée généralisée

Nous admettons le postulat suivant de comparabilité limitée (cf. H.J.MFOUKA [2]) : on peut bâtir un modèle satisfaisant de préférence à partir des composants fondamentaux ou de quelques autres rassembleurs issus d'un système de préférence des acteurs,

- sans contrainte a priori -injustifiée- sur leur nombre, leur signification, leurs propriétés,

- sans exclusion a priori -injustifiée- de certaines options,

il suffit que l'on ait un système de composants fondamentaux et/ou de rassembleurs de préférence.

La généralisation de ce postulat accorde plus de liberté au décideur et, à l'homme d'étude qui peut désormais envisager plusieurs cas éventuels de préférence (au lieu des seuls cas I, Q, P et R ; ou, des éventuelles options regroupées - I<sub>0</sub>Q<sub>0</sub>P, I<sub>0</sub>Q, I<sub>0</sub>R et  $T_1$  (cf.B.ROY [5] et [6])). Elle permet un cadre plus libre d'expression des préférences, les seules contraintes admises étant inhérentes aux capacités et facultés des acteurs. Il est nécessaire que le nombre de composants du système relationnel ne soit ni trop grand ni insuffisant. Cependant, on ne peut limiter ce nombre sans préjuger des facultés effectives ou des possibilités imprévues des acteurs de la décision et de la complexité du processus de modélisation. On peut par exemple constater que l'option  $T_0$  n'a pas été prévue dans le cadre

du postulat limité énoncé par B. ROY. L'objectif primordial de l'homme d'étude sera donc la recherche d'un système de composants fondamentaux ou de rassembleurs de préférence adéquats.

## 2 FONDEMENT THEORIQUE

Cette structure trouve son fondement dans la nature imprécise des préférences que l'on constate déjà dans les structures de pseudo ordre (et donc de quasi-ordre) et aussi dans celles, plus générales, de quasi-ordres généralisés (cf. Ph. VINCKE [7]).

### 21 Imprécision et variabilité de la préférence induite

Soit  $O_j$  ( $j=j, j+1, \dots, s$ ) une opération relationnelle (cf. I 2). Considérons les composants  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$  et  $\mathcal{R}_{1''}$ . Appellons **domaine de variation** - noté  $\mathcal{D}_h$  - d'un composant relationnel quelconque -  $\mathcal{R}_h$  - induit par une chaîne -  $\mathcal{R}_1 O_j \mathcal{R}_2 O_{j+1} \dots O_s \mathcal{R}_{1''}$  - l'ensemble des composants relationnels susceptibles de correspondre à  $\mathcal{R}_h$  et qui représentent des états relationnels directs. Nous définissons  $\mathcal{D}_h$  comme suit :

$$\mathcal{D}_h = \left\{ \left( \mathcal{R}_h \cup \bar{\mathcal{R}}_h \right) / \exists (a, b) \in A / a \mathcal{R}_1 O_j \mathcal{R}_2 O_{j+1} \dots O_s \mathcal{R}_{1''} b \text{ et } a \left( \mathcal{R}_h \cup \bar{\mathcal{R}}_h \right) b \right\}, \quad (13')$$

où  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_{1''}$  et  $\mathcal{R}_h$  sont des composants de  $\mathcal{R}$ . Nous distinguerons deux sous-ensembles  $\mathcal{D}_h^+$  et  $\mathcal{D}_h^-$  de  $\mathcal{D}_h$  :

$$\mathcal{D}_h^+ = \left\{ \mathcal{R}_h / \exists (a, b) \in A / a \mathcal{R}_1 O_j \mathcal{R}_2 O_{j+1} \dots O_s \mathcal{R}_{1''} b \text{ et } a \mathcal{R}_h b \right\}, \quad (14)$$

$\mathcal{D}_h^+$  contient les composants  $\mathcal{R}_h$  de non aversion de la préférence en faveur de a (c'est à dire des composants d'approbation de la préférence ou, simplement, de non préférence).  $\mathcal{D}_h^-$  contient au cas contraire des composants  $\mathcal{R}_h$  de non aversion de la préférence en faveur de b. On a :

$$\mathcal{D}_h^- = \left\{ \bar{\mathcal{R}}_h / \exists (a, b) \in A / a \mathcal{R}_1 O_j \mathcal{R}_2 O_{j+1} \dots O_s \mathcal{R}_{1''} b \text{ et } a \bar{\mathcal{R}}_h b \right\}. \quad (15)$$

Il s'en suit que :

$$\mathcal{D}_h = \mathcal{D}_h^+ \cup \mathcal{D}_h^-, \quad (\forall h \in M_0) \text{ et } \left( \mathcal{R}_h \in \mathcal{D}_h^+ \cap \mathcal{D}_h^- \implies \mathcal{R}_h \subset \dot{\mathcal{R}} \right) \quad (16)$$

où  $\mathcal{R}_h$  est un composant de non préférence irréversible.

Prenons l'exemple d'un P.O.  $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$  (cf. II 2). On peut vérifier par exemple que :

$\mathcal{R}_1 \bar{\mathcal{R}}_1 \subset \mathcal{R}_h \in \mathcal{D}_h = \{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1\} \cup \{\bar{\mathcal{R}}_0, \bar{\mathcal{R}}_1\}$  où  $\mathcal{D}_h^+ = \{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1\}$  et  $\mathcal{D}_h^- = \{\bar{\mathcal{R}}_0, \bar{\mathcal{R}}_1\}$  et  $\mathcal{R}_0 \equiv \bar{\mathcal{R}}_0$ .

Nous postulons que :

- l'imprécision des états relationnels directs (et donc des composants) dépend de la nature des actions et des valeurs de jugement qui déterminent les préférences (cf. H.J. MFOUKA [2]) ;

- le composant induit dépend des composants impliqués dans la chaîne relationnelle ;

- le composant induit  $\mathcal{R}_h$  ou  $\bar{\mathcal{R}}_h$  varie (en fonction de la combinaison relationnelle qui l'induit) dans un domaine  $\mathcal{D}_h^+$  ou  $\mathcal{D}_h^-$ .

Il existe donc un procédé  $f$  tel que :

$$\mathcal{R}_h = f(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1'', \dots, \mathcal{R}_1''', \Gamma) \in \mathcal{D}_h \quad (17)$$

où  $\Gamma$  est un facteur d'imprécision qui détermine la variabilité du composant induit. La combinaison relationnelle (donc la comparaison indirecte) et, la cohérence des préférences par conséquent, sont des éléments importants de ce facteur ; ce qui nous permet de poser :

$$\Gamma = \Gamma(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1'', \mathcal{R}_1'''). \quad (18)$$

Ce constat nous permet encore de postuler que : **l'on ne peut fixer a priori les limites du domaine de variation du composant induit, celles-ci ne peuvent découler logiquement que de l'imprécision observée dans l'énoncé des préférences.**

Cette généralisation semble introduire un désordre relatif dans la structure qui en découle, désordre qui donne un non sens à la notion même d'ordre du fait de la pluralité de possibilité d'états relationnels directs pouvant correspondre à un seul état relationnel indirect : d'où l'appellation de **non ordre**. Ce désordre dû à l'imprécision permet d'affirmer que les acteurs ont un pouvoir discriminant non seulement nuancé mais aussi imprécis (cf. H.J. MFOUKA [2] et [3]).

Nous admettrons l'hypothèse suivante :  $\mathcal{R}$  est un système de composants relationnels fondamentaux ou de rassembleurs de préférence auquel est associé un descripteur : l'ensemble  $M_0$ , de niveaux de préférence.

## 22 Pouvoir discriminant imprécis et non ordre relativement indéterminé

Soit  $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_t)$  un système relationnel de préférence. Nous admettons donc que les acteurs ont un **pouvoir discriminant imprécis** et que les **seuils de préférence** sont **imprécis** (cf. H.J. MFOUKA [2]) ; ces derniers

sont des **domaines de transition** entre deux niveaux quelconques de préférence  $i$  et  $i'$ .

Illustrons la notion de domaine de transition dans la représentation ci-dessous. Soient deux options de préférence  $\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{R}_{i'}$ . Notons  $\mathcal{D}(\mathcal{R})$  l'ensemble des options de préférence.

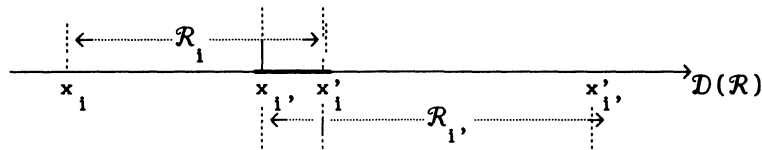


Fig.4

Le domaine de transition ou de discrimination entre  $\mathcal{R}_i$  et  $\mathcal{R}_{i'}$ , est compris dans un **ensemble - qui, ici est un intervalle - ouvert**  $]x_{i'}, x_i'[$ . Ses limites, en général, sont difficiles à préciser : c'est pourquoi nous parlons de seuils imprécis. Notons  $\phi_k$  un ensemble représentant une zone de préférence, donc une option quelconque  $\mathcal{R}_k$  ( $k \in M_0$ ). Le domaine de transition est un ensemble  $\phi_n$  tel que :

$$\phi_n \subseteq \phi_i \cap \phi_{i'}, \text{ (où } \phi_i \subseteq ]x_i, x_{i'}[ \text{ et } \phi_{i'} \subseteq ]x_{i'}, x_i'[ \text{)} \quad (19)$$

Il s'en suit que :

$$(a, b) \in \phi_n \Rightarrow a \left( \mathcal{R}_i \cup \mathcal{R}_{i'} \right) b, \forall a, b \in A. \quad (20)$$

Cette dernière implication, lorsqu'on suppose que l'union traduit un "ou" imprécis, peut-être traduite de la façon suivante (le "ou" non exclusif devenant un "et") :

$$(a, b) \in \phi_n \Rightarrow a \left( \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_{i'} \right) b, \forall a, b \in A. \quad (21)$$

L'état de préférence peut être représenté par plus d'un C.R.P. lorsqu'il exprime un aspect de préférence qui est imprécis compris dans le domaine d'intersection de quelques composants. Ce chevauchement qui peut être partiel ou total signifie que le **pouvoir discriminant nuancé des acteurs est imprécis** (cf. H.J.MFOUKA [2]) car les états relationnels sont imprécis. Le domaine de discrimination ne peut a priori être réduit à un point (comme on le fait souvent dans le cas des seuils précis).

Dans ce travail, nous envisageons des structures dont les états relationnels sont directs et précis, c'est à dire qu'aucun aspect de préférence ne se retrouve complètement inclus dans un domaine de transition entre deux options distinctes. Par conséquent, les options sont exclusives. Les composants fondamentaux de  $\mathcal{R}$  peuvent se chevaucher partiellement mais

pas totalement. Le type de structures ainsi défini sont dites relativement indéterminées **car, du fait de l'imprécision, une indétermination subsiste mais elle est relative.** Elle permet tout de même de se déterminer nettement pour une option donnée. On dira que la préférence est relativement indéterminée.

Le modèle de **non ordre relativement indéterminé (N.O.R.I.)** que nous définirons concerne des situations de préférence irréversible (représentées par  $\mathcal{R}_i$ ,  $0 < i \leq t$ ) et de non préférence irréversible (représentées par  $\mathcal{R}_0$ ).

### 23 Imprécision et principe de réfutabilité de la préférence induite

Soient trois composants  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_1'$  et  $\mathcal{R}_{1''}$ . Nous allons distinguer deux domaines de variation  $-D_1$  et  $D_2$  (nous modifions la notation précédente afin d'éviter toute confusion)- de variation du composant induit  $\mathcal{R}_{1''}$ . Nous noterons  $D_1^+(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1')$  le domaine de variation du composant induit  $\mathcal{R}_{1''}$  tel que :

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_1' \subset \mathcal{R}_{1''}, \quad (22)$$

et  $D_1^-(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1')$  celui du composant induit  $\bar{\mathcal{R}}_{1''}$  tel que :

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_1' \subset \bar{\mathcal{R}}_{1''}. \quad (23)$$

Soient  $\mathcal{R}_{1''}$  un composant de non aversion et,  $\mathcal{R}_h$  un composant de non aversion ou de non approbation de la préférence tels que :

$$\mathcal{R}_h \subset (\bar{\mathcal{R}}_{1''} \cup \mathcal{R}_{1''}). \quad (24)$$

Soit la condition de chaîne suivante :

$$\mathcal{R}_1 \cap (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_h \cup \mathcal{R}_h \mathcal{R}_1') \neq \emptyset. \quad (25)$$

Nous noterons  $D_2^+(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1')$  le domaine de variation de  $\mathcal{R}_h$  pour  $\mathcal{R}_h \equiv \mathcal{R}_{1''}$  et  $D_2^-(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1')$  celui correspondant au cas où  $\mathcal{R}_h \equiv \bar{\mathcal{R}}_{1''}$ . Dans la chaîne (25),  $\mathcal{R}_h$  représente l'état relationnel direct d'un couple d'actions (a,b) obtenu à partir d'une comparaison indirecte faite par l'intermédiaire d'une autre action c (donc en connaissant les états relationnels des paires (a,c) et (b,c)). La préférence induite  $\mathcal{R}_h$ , dans (25), dépend de l'importance de la nuance entre la préférence de niveau i et celle de niveau i' et de l'imprécision due à la comparaison indirecte.

Notons  $D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1')$  un ensemble décrivant des aspects de préférence jugés non déterminants ou non significatifs par rapport au niveau d'imprécision  $\Gamma(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1')$  avec lequel est déterminé le composant  $\mathcal{R}_{1''}$  induit par la chaîne (25) ; c'est à dire que la préférence induite dans ce cas peut encore faire

l'objet de doute et d'hésitation (car elle peut subir l'effet de l'imprécision) : elle n'est pas irréfutable, on peut donc éventuellement la remettre en question.

### 3 Définition, Propriétés et commentaires

#### 31 Définitions d'un non ordre large (N.O.L.)

Un N.O.R.I. est un S.R.F.P. ou un S.R.R.P. relativement indéterminée  $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_t)$  défini dans un ensemble A tel que :

- (1)  $\mathcal{R}_0$  est réflexif et symétrique,
- (2)  $\mathcal{R}_i (i>0)$  est asymétrique,
- (3)  $(\mathcal{R}_i \mathcal{R}_i, \cup \mathcal{R}_{i'} \mathcal{R}_{i'}) \subset \mathcal{R}_{i''}$  où  $\mathcal{R}_{i''} \in \mathcal{D}_1^+(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_{i'})$  et  $\mathcal{R}_{i''} = f(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_{i'}, \Gamma)$ ,
- (4)  $(\mathcal{R}_i \mathcal{R}_i, \cup \mathcal{R}_{i'} \mathcal{R}_{i'}) \subset \bar{\mathcal{R}}_{i''}$  où  $\bar{\mathcal{R}}_{i''} \in \mathcal{D}_1^-(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_{i'})$  et  $\bar{\mathcal{R}}_{i''} = f(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_{i'}, \Gamma)$ ,
- (5)  $\exists \mathcal{R}_{i''}, \mathcal{R}_h / \mathcal{R}_{i''} = f(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_{i'}, \Gamma)$  et  $\mathcal{R}_h \subset \left( \mathcal{R}_{i''} \cup \bar{\mathcal{R}}_{i''} \right)$   
 $\left( \mathcal{R}_i \mathcal{R}_h \cup \mathcal{R}_h \mathcal{R}_i \right) \cap \mathcal{R}_{i''} \neq \emptyset \iff \mathcal{R}_{i''} \in \mathcal{D}_y(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_{i'}), i, i', i'' \in M_0$ .

$\mathcal{R}$  étant un système relationnel fondamental ou regroupé de préférence, pour tout couple (a,b) de  $A^2$ , il existe toujours un composant  $\mathcal{R}_i$  de  $\mathcal{R}$  tel que :

$$a \mathcal{R}_i b \text{ ou } b \mathcal{R}_i a. \quad (26)$$

Le premier axiome traduit la réversibilité de la non préférence irréversible exprimée par  $\mathcal{R}_0$ .

Le deuxième axiome traduit l'irréversibilité de la préférence exprimée par les composants  $\mathcal{R}_i (i>0)$ .

Les axiomes (3), (4) et (5) précisent que les domaines de variation des composants induits dépendent des composants qui les impliquent et du niveau d'imprécision observée. Cependant, l'imprécision de l'axiome (4) est source de circuits triangulaires -excepté le cas de transitivité de  $\mathcal{R}_0$  - capables de générer des situations conflictuelles. En effet, elle génère des cas d'intransitivité imprécise qui rendent toute décision a priori conflictuelle. L'axiome (3) de transitivité imprécise semble globalement plus logique. Il permet de retrouver la cohérence classique des préférences au moins au niveau global (avec le composant principal  $\mathcal{R}$ ).

L'axiome (5) est un cas particulier de l'axiome (3) car :



$$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1'' \subset \mathcal{R}_1 \iff \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1'' \cap \mathcal{R}_1 \neq \emptyset. \quad (27)$$

Soit un triplet (a, b, c) de  $A^3$ . Nous supposons que l'on a :

$$a \mathcal{R}_1 b \text{ et } a \mathcal{R}_1, c \text{ ou } c \mathcal{R}_1 a \text{ et } b \mathcal{R}_1, a ; \quad (28)$$

on interprétera l'axiome (5) de la façon suivante : lorsque la nuance de préférence -entre  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_1'$ , - est dans le domaine d'imprécision  $\mathcal{D}_y$  : la confusion règne sur le niveau de la préférence induite ( $\mathcal{R}_1''$ ) : tout devient possible :  $\mathcal{R}_1''$  peut être un composant d'aversion ou de non aversion. L'axiome (5) permet de reconnaître les composants de préférence -  $\mathcal{R}_1''$  - qui perturbent les tendances monotones de la préférence, c'est-à-dire les composants dont l'intensité de préférence n'est pas significative (par rapport à l'imprécision). C'est le cas des préférences douteuses dont toute éventuelle irréversibilité deviendrait réfutable.

Nous appellerons **quasi-ordre relativement indéterminé (Q.O.R.I.)** tout **N.O.R.I.**  $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_t)$  tel que le rassembleur de tout composant irréversible  $\vec{\mathcal{R}} = \bigcup_{i=1}^t \mathcal{R}_i$  soit imprécisément transitif (par rapport aux composants qui le constituent).

**Exemple** : nous prenons, dans le tableau suivant, l'exemple d'un Q.O.R.I. qui est une structure représentable numériquement (cf. H. J. MFOUKA [2]). On admet contrairement aux exemples précédents que les seuils sont imprécis : ce sont des intervalles ouverts. On suppose que le décideur connaît vaguement ses seuils de préférence mais il peut relativement cerner leurs domaines. Nous avons retenu trois seuils, soit quatre niveaux de préférence.

Tab. 3

actions	a	b	c	d	e
seuil $s_0$	]10, 12[	]3, 4[	]20, 25[	]10, 12[	]3, 5[
seuil $s_1$	]15, 17[	]7, 9[	]30, 34[	]15, 17[	]8, 10[
seuil $s_2$	]25, 30[	]13, 15[	]45, 50[	]20, 24[	]15, 17[
évaluations	300	308	313,5	320	280

On a :

$a \mathcal{R}_0 b$ ,  $c \mathcal{R}_1 a$ ,  $d \mathcal{R}_2 a$ ,  $a \mathcal{R}_3 e$ ,  $c \mathcal{R}_1 b$ ,  $d \mathcal{R}_2 b$ ,  $b \mathcal{R}_3 e$ ,  $d \mathcal{R}_0 c$ ,  $c \mathcal{R}_3 e$  et  $d \mathcal{R}_3 c$ .

### 32 Propriétés

On sait que tout composant  $\mathcal{R}_i$  est globalement un composant de non

aversion.

$$P_0 - D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1) = D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1).$$

Justification : on se réfèrera à l'axiome (5) des N.O.R.I..

$P_1$  - Un Q.O.T.  $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1)$  est un Q.O.R.I..

Justification :  $\mathcal{R}_0$  est un composant de non préférence irréversible qui est symétrique et réflexif.  $\mathcal{R}_1$  est un composant de préférence irréversible, il est asymétrique. Par ailleurs on peut vérifier que ( $\mathcal{R}_1$  étant transitif) :

$$\mathcal{R}_1 \stackrel{2}{\subset} \mathcal{R}_1, \left( \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_0^2 \right) \subset \left( \mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1 \right),$$

d'où,

$$\forall \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1, / i, i' \in \{0, 1\} \exists \mathcal{R}_1, /, \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_1, \subset \mathcal{R}_1, ,$$

$\mathcal{R}$  est donc imprécisément transitif (donc  $\bar{\mathcal{R}}$  aussi). En outre, on a :

$$D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1) = D_y(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0) = \{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1\} \text{ et } D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \{\mathcal{R}_0\}.$$

C.Q.F.D.

$P_2$  - Un Q.O.T.  $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1)$  est un Q.O.R.I. tel que :

(1)  $\mathcal{R}_1$  est  $\mathcal{R}_1$ -transitif (où  $\mathcal{R}_1 \equiv \left( \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_0 \right)$ ),

(2)  $\left( \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1, \cap \bar{\mathcal{R}}_1, \mathcal{R}_0 \right) \subset \left( \mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1 \right), \forall \mathcal{R}_0^2 \subset \mathcal{R}_1, \forall \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_1, ,$

(3)  $D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1) = D_y(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0) = \{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1\}$  et  $D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \{\mathcal{R}_0\}$ .

Justification : posons  $I \equiv \mathcal{R}_0$  et  $P \equiv \mathcal{R}_1$ .

(1) justifie les propriétés PIPcP et  $P_3(2-(a))$ ,

(2) justifie la propriété  $P_3(3)$  ;

par conséquent, les propriétés PIPcP et  $P^2 \cap I^2 = \emptyset$  sont vérifiées.

(3) : on se réfèrera à  $P_1$ .

C.Q.F.D.

$P_3$  - Un Q.O.T.  $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1)$  est un N.O.L si et seulement si :

(1)  $\mathcal{R}_1$  est  $\mathcal{R}_1$ -transitif (où  $\mathcal{R}_1 \equiv \left( \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_0 \right)$ ),

(2)  $\left( \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1, \cap \bar{\mathcal{R}}_1, \mathcal{R}_0 \right) \subset \left( \mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1 \right), \forall \mathcal{R}_0^2 \subset \mathcal{R}_1, \forall \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_1, ,$

(3)  $D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1) = D_y(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0) = \{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1\}$  et  $D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = \{\mathcal{R}_0\}$ .

Justification : cf.  $P_2$  et  $P_1$ . Posons  $I \equiv \mathcal{R}_0$  et  $P \equiv \mathcal{R}_1$ . Remarquons que :

-  $(I, P)$  est un système de composants fondamentaux de préférence ;

- l'axiome (2) justifie les propriétés PIPcP et  $P_3(2-(a))$  ;

- (3) traduit l'axiome (5) du N.O.R.I. dans le cas d'un Q.O.T..

$\mathcal{R}$  est un N.O.L. dont les triangles intransitifs ne peuvent contenir qu'un

arc de préférence irréversible comme le montrent les domaines d'imprécision définis en (4). Par ailleurs,  $\mathcal{R}_0$  est un composant de non préférence irréversible symétrique et,  $\mathcal{R}_1$  ( $\mathcal{R}_1 \equiv P$ ), un composant asymétrique. Les deux composants I et P forment un S.R.P..

C.Q.F.D.

$P_4$  - Tout P.O.  $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$  est un Q.O.R.I..

Justification :  $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$  est un S.R.P. tel que :

- $\mathcal{R}_0$  est symétrique et réflexive,
- $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  sont asymétriques,
- $\mathcal{R}$  est imprécisément transitif car,  $(\mathcal{R}_0, T_1)$  et  $(T_0, \mathcal{R}_2)$  étant des

Q.O.T., on a (cf.  $P_1$ ) :

$$\forall \mathcal{R}_i, \mathcal{R}_{i'} / i, i' \in \{0, 1\} \exists \mathcal{R}_{i''} / \mathcal{R}_i \mathcal{R}_{i'} \subset \mathcal{R}_{i''}.$$

Par ailleurs, l'axiome (5) des N.O.R.I. est vérifié pour :

$$\begin{aligned} D_y(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0) = D_y(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2) = \{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}, \quad D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1) = \{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1\}, \\ D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = D_y(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \{\mathcal{R}_0\}. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

$P_5$  - Un P.O.  $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)=(I, Q, P)$  est un Q.O.R.I. tel que :

- (1)  $\mathcal{R}_2$  est  $\mathcal{R}_1$ -transitif (où  $\mathcal{R}_1 \equiv \left[ T_0 \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_2 T_0 \right]$ ),
- (2)  $T_1$  est  $\mathcal{R}_1$ -transitif (où  $\mathcal{R}_1 \equiv \left[ \mathcal{R}_0 T_1 \cup T_1 \mathcal{R}_0 \right]$ ),
- (3)  $\left[ \mathcal{R}_1 T_1 \cap T_1 \mathcal{R}_1 \right] \subset \left[ \mathcal{R}_0 \cup T_1 \right]$ ,  $\forall \mathcal{R}_0^2 \subset \mathcal{R}_1$
- (4)  $\mathcal{R}_2$  est  $\left[ \mathcal{R}_1 \cup \bar{\mathcal{R}}_1 \right]$ -transitif (où  $\mathcal{R}_1 \equiv IQ$ ),
- (5)  $D_y(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0) = D_y(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2) = \{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$ ,  $D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1) = \{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1\}$   
et  $D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = D_y(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \{\mathcal{R}_0\}$ .

Justification : sachant que  $(T_0, \mathcal{R}_2)$  et  $(\mathcal{R}_0, T_1)$  sont des Q.O.T., en se référant à  $P_2$  on justifie (1) et (2). En se référant à  $P_3$  (3) (II 131), on a :

$$\left[ \mathcal{R}_1 T_1 \cap T_1 \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1, \cap \bar{\mathcal{R}}_1, \mathcal{R}_0 \right] \subset \left[ \mathcal{R}_0 \cup T_1 \right], \quad \forall \mathcal{R}_0^2 \subset \mathcal{R}_1, \quad \forall \mathcal{R}_0 T_1 \subset \mathcal{R}_1,$$

or :  $\mathcal{R}_1 T_1 \equiv \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1$ , et  $T_1 \mathcal{R}_1 \equiv \bar{\mathcal{R}}_1, \mathcal{R}_0$  ; d'où :

$$\left[ \mathcal{R}_1 T_1 \cap T_1 \mathcal{R}_1 \right] \subset \left[ \mathcal{R}_0 \cup T_1 \right], \quad \forall \mathcal{R}_0^2 \subset \mathcal{R}_1. \quad (a)$$

De même pour (cf. II 131), on a :

$$\left[ \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \cap T_0 \mathcal{R}_1, \cap \bar{\mathcal{R}}_1, T_0 \right] \subset \left[ T_0 \cup \mathcal{R}_2 \right], \quad \forall T_0^2 \subset \mathcal{R}_1, \quad \forall T_0 \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_1,$$

on a simplement :

$$\left( \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \right) \subset \left( \mathcal{R}_0 \cup T_1 \right) \text{ car } \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \equiv T_0 \mathcal{R}_1, \text{ et } \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \equiv \bar{\mathcal{R}}_1, T_0. \quad (b)$$

On constate que cette dernière expression - (b) - est contenue dans la précédente, (a). La propriété  $P_4(4)$  traduit l'axiome (4) du P.O.. La propriété  $P_4(5)$  a été justifiée dans  $P_4$ .

C.Q.F.D.

$P_6$  - Un P.O.  $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)=(I, Q, P)$  est un N.O.R.I. si et seulement si :

- (1)  $\mathcal{R}_2$  est  $\mathcal{R}_1$ -transitif (où  $\mathcal{R}_1 \equiv \left( T_0 \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_2 T_0 \right)$ ),
- (2)  $T_1$  est  $\mathcal{R}_1$ -transitif (où  $\mathcal{R}_1 \equiv \left( \mathcal{R}_0 T_1 \cup T_1 \mathcal{R}_0 \right)$ ),
- (3)  $\left( \mathcal{R}_1 T_1 \cap T_1 \mathcal{R}_1 \right) \subset \left( \mathcal{R}_0 \cup T_1 \right), \forall \mathcal{R}_0^2 \subset \mathcal{R}_1$
- (4)  $P$  est  $\left( \mathcal{R}_1 \cup \bar{\mathcal{R}}_1 \right)$ -transitif (où  $\mathcal{R}_1 \equiv IQ$ ),
- (5)  $D_y(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0) = D_y(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2) = \{ \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \}, D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1) = \{ \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1 \}$   
 et  $D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_0) = D_y(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = D_y(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0) = \{ \mathcal{R}_0 \}$ .

Justification : un P.O. est un Q.O.R.I., donc un N.O.R.I. Si  $\mathcal{R}=(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$  est un N.O.R.I, alors,  $\mathcal{R}$  est un système relationnel de composants fondamentaux ;  $\mathcal{R}_0$  est symétrique et réflexif ;  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  sont asymétriques. un N.O.R.I. qui vérifie les propriétés  $P_5$  est un P.O. car :

- (1)  $\Rightarrow \mathcal{R}_2 T_0 \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_2$ ,
- (2)  $\Rightarrow T_1 \mathcal{R}_0 T_1 \subset T_1$ ,
- (3)  $\Rightarrow \mathcal{R}_0^2 \cap T_1^2 = \emptyset$ .
- (4)  $\Rightarrow \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_2$ .

$(\mathcal{R}_0, T_1)$  est donc un Q.O.T. ; donc  $T_1$  est transitif (par conséquent  $\mathcal{R}_2$  aussi). Cela implique que :  $\left( I \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_1 I \cup \mathcal{R}_1^2 \right) \cap \mathcal{R}_2^2 = \emptyset$  ; d'où :  $T_0^2 \cap \mathcal{R}_2^2 = \emptyset$ .

$(T_0, \mathcal{R}_2)$  est donc un Q.O.T.. La propriété  $P_5(5)$  précise les domaines d'imprécision de l'axiome (5) du N.O.R.I..

C.Q.F.D.

### 33 Commentaires

La nuance de préférence relative au couple  $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1)$  est la même pour le couple  $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1)$  (cf.  $P_0$ ).

Les structures de Q.O.T. et de P.O. sont des N.O.R.I., en particulier, elles sont des Q.O.R.I. (cf.  $P_1$  et  $P_4$ ). Les propriétés  $P_2$  et  $P_5$  fixent les conditions particulières de ces Q.O.R.I.. Celles-ci sont nécessaires et suffisantes pour faire du Q.O.T. ou du P.O. un Q.O.R.I. et vice versa (cf.  $P_3$  et  $P_6$ ).

## CONCLUSION

On a pu constater, du quasi-ordre au non ordre, la prise en compte progressive d'un nombre croissant de C.R.P. dans les S.R.P. de ces structures grâce au postulat de comparabilité limitée généralisée. Cette progression a permis également d'intégrer l'hypothèse d'un pouvoir discriminant d'abord simplement nuancé puis, nuancé et imprécis dans la modélisation afin de tenir compte de la nature imprécise et complexe des préférences. Cette nature justifie les axiomes apparemment incohérents ou imprécis des structures de non ordre qui sont fondés sur un paramètre d'imprécision. Le non ordre, comme on l'a montré dans les propriétés du paragraphe III, permet de construire des quasi-ordres et des pseudo ordres en admettant quelques contraintes de cohérence au niveau des préférences. Ils permettent surtout de représenter des modèles de comparaison complexe dont les éléments fondamentaux sont imprécis mais relativement indéterminés.

## BIBLIOGRAPHIE

- [0] D.LUCE "Semi-ordres and a theory of utility discrimination". Econometrica, vol.24, 1956.
- [1] H.J.MFOUKA, Modélisation Des Préférences Par Une Approche Relationnelle. Mémoire de D.E.A., faculté de science économique, nov.1986, 103p., Dijon.
- [2] H.J.MFOUKA, Contribution A La Modélisation Des Préférences Imprécises Par une Approche Relationnelle Et Essai D'Application A L'Analyse Multicritère. Thèse de Doctorat, faculté de science économique et gestion, nov.1993, 368p., Dijon.
- [3] H.J.MFOUKA, "De l'effet d'imprécision et du paradoxe de la non ponctualité des seuils vers la définition de quelques concepts et principes de modélisation". Documents du LATEC n°9403 (Juil 94), Univ. de Bourgogne, Dijon.
- [4] M.ROUBENS, Ph. VINCKE, Preference Modeling. Springer-Verlag, Lecture notes in economics and mathematical systems, vol.250, 1985
- [5] B. ROY, Méthodologie Multicritère D'Aide A La Décision, Economica, 1985.
- [6] B.ROY, Ph.VINCKE, "Pseudo-critère et systèmes relationnels de préférence : nouveaux concepts et nouveaux résultats en vue de l'aide à la

- décision", Cahier du LAMSADE n°28, Mars 1980, Université de Paris-Dauphine.
- [7] Ph. VINCKE, "Quasi-ordres généralisés et modélisation des préférences", Cahier du LAMSADE n°9, Avril 1977, Univ. Paris-Dauphine.
- [8] Ph. VINCKE, "Vrai, quasi, pseudo et précritère dans un ensemble fini : propriétés et algorithmes", Cahiers du LAMSADE n°27, fév.1980 Univ. Paris-Dauphine.
- [9] Ph. VINCKE, L'Aide Multicritère D'Aide A La Décision, éditions de L'université libre de Bruxelles, 1989 (éditions Ellipses).