



HAL
open science

Modèles d'interaction spatiale et théorie de l'interdépendance globale

Bernard Vermot-Desroches

► **To cite this version:**

Bernard Vermot-Desroches. Modèles d'interaction spatiale et théorie de l'interdépendance globale. [Rapport de recherche] Institut de mathématiques économiques (IME). 1982, 31 p., bibliographie. hal-01526552

HAL Id: hal-01526552

<https://hal.science/hal-01526552>

Submitted on 23 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

I.M.E.

EQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIEE AU C.N.R.S.

DOCUMENT DE TRAVAIL



INSTITUT DE MATHEMATIQUES ECONOMIQUES

UNIVERSITE DE DIJON

FACULTE DE SCIENCE ECONOMIQUE ET DE GESTION

4, BOULEVARD GABRIEL — 21000 DIJON

N° 60

MODELES D'INTERACTION SPATIALE
ET THEORIE DE L'INTERDEPENDANCE
GLOBALE

Bernard VERMOT-DESROCHES

Novembre 1982

Cette étude a fait l'objet d'une communication
au XIV^{ème} Colloque annuel de l'IME le 26 Novembre 1982.

* L'auteur est professeur au Département d'Administration et d'Economie et membre du Laboratoire en économie et gestion des systèmes de petites dimensions de l'Université du Québec à Trois-Rivières.

1- INTRODUCTION

L'objectif principal de ce travail est de montrer qu'à partir d'un nouveau principe variationnel, le Principe de l'Interdépendance Minimum (PIM) développé pour la première fois par S. GUIASU (1979), à partir des travaux de S. WATANABE (1969), il est possible de proposer un nouveau fondement statistique aux modèles d'interaction spatiale de type gravitaire. D'une façon plus spécifique, on montre également que le PIM donne une nouvelle interprétation et permet une généralisation intéressante du modèle élémentaire que A.G. WILSON (1967, 1969) développa à partir du Principe de l'Entropie Maximum ébauché par E.T. JAYNES (1957).

Au cours du paragraphe suivant, nous présentons succinctement le résultat fondamental établi par WATANABE et autour duquel gravite ce que nous convenons d'appeler la théorie de l'interdépendance globale (cf. B. VERMOT-DESROCHES, 1982 et S. GUIASU et B. VERMOT-DESROCHES, 1982). Un troisième paragraphe définit les mesures d'interdépendance W et W^* . On présente alors le Principe de l'Interdépendance Minimum (PIM) dans un quatrième paragraphe. L'application du PIM à la formalisation du modèle élémentaire de WILSON est donnée au cours du cinquième paragraphe. Finalement, un dernier développement est consacré à la généralisation du modèle de WILSON à partir du PIM.

2- L'INTERDEPENDANCE GLOBALE DEFINIE PAR S. WATANABE

La théorie de l'information est une branche relativement nouvelle des mathématiques modernes. Son concept fondamental est l'entropie considérée comme la quantité d'incertitude contenue dans une expérience probabiliste quelconque. Introduite

par C.E. SHANNON (1948) par analogie avec la fameuse fonction H de L. BOLTZMANN, l'entropie informationnelle est maintenant utilisée dans de nombreuses sciences et de nombreuses applications pratiques.

La théorie de l'information, fournit de façon effective plusieurs méthodes pour construire une distribution de probabilité compatible avec un ensemble de contraintes donné. En utilisant l'entropie de SHANNON comme une mesure de la quantité d'incertitude contenue dans une distribution de probabilité, E.T. JAYNES (1957) introduisit le Principe de l'Entropie Maximum (PEM) pour déterminer la distribution de probabilité qui contenait la plus grande quantité d'incertitude, compatible avec des contraintes représentées par des moments simples ou mixtes d'une ou plusieurs variables aléatoires. On peut d'ailleurs montrer que le PEM peut s'interpréter comme une généralisation du fameux Principe de la Raison Insuffisante de LAPLACE. Tel que WILSON (1969) le mentionne, son modèle de gravité peut être considéré comme une conséquence, ou une application directe du PEM. En fait, le modèle de distribution de déplacements de WILSON maximise une entropie bi-dimensionnelle compatible à la fois avec les distributions marginales et avec le coût de transport moyen.

Deux ans après JAYNES, S. KULLBACK (1959) introduisit une mesure de la divergence entre deux distributions de probabilités sur la base de laquelle l'auteur élaborait son principe variationnel fondamental de la fonction discriminante minimum. Les travaux de A. HOBSON (1971) et F. SNICKARS et J.W. WEIBULL (1977) sont directement issus de ce principe. En effet, même si les auteurs ne mentionnent pas explicitement le nom de KULLBACK, le Principe de l'Information Minimum de SNICKARS et WEIBULL peut être interprété comme un outil pour construire

la distribution de probabilité bi-dimensionnelle qui soit la plus proche possible d'une distribution d'interaction spatiale donnée a priori.

En 1969, S. WATANABE introduisit une mesure entropique de connexion ou d'interdépendance globale entre plusieurs sous-systèmes d'un système donné.

Soit $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ un système quelconque formé de n sous-systèmes; il est possible d'attacher à chacun de ces sous-systèmes une mesure d'entropie évaluant la quantité d'incertitude correspondante. WATANABE propose alors de mesurer l'interdépendance qui existe entre deux ou plusieurs sous-systèmes en retranchant de la somme des entropies individuelles l'entropie du système tout entier. Si l'on appelle cette mesure $W(X)$ on a par définition:

$$(1) \quad W(X) = \sum_{i=1}^n H(X_i) - H(X)$$

où H est le symbole d'une mesure d'entropie. Cette mesure globale fut utilisée par WATANABE pour classifier les sous-systèmes d'un système donné.

La mesure de WATANABE possède trois avantages majeurs sur toute autre mesure d'interdépendance proposée jusqu'alors:

- 1^o Elle peut être appliquée pour mesurer l'interdépendance globale, c'est-à-dire l'interdépendance qui peut exister entre plus de deux entités.
- 2^o Cette mesure est égale à zéro si et seulement si les sous-systèmes respectifs sont indépendants.

3^o Cette mesure n'est rattachée à aucune métrique qui serait définie a priori.

3- LES MESURES W ET W*

La mesure entropique W d'interdépendance globale de WATANABE peut s'appliquer aisément dans un contexte où les sous-systèmes envisagés sont représentés par des variables aléatoires.

On pose:

$$(2) \quad X = \begin{pmatrix} x_1, & \dots, & x_n \\ p_1, & \dots, & p_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1, & \dots, & y_n \\ q_1, & \dots, & q_n \end{pmatrix}$$

X et Y sont deux variables aléatoires où x_i , ($i=1, \dots, n$) et y_j , ($j=1, \dots, m$) sont les valeurs numériques que peuvent prendre ces deux variables aléatoires et où:

$$(3) \quad p = (p_1, \dots, p_n) \quad ; \quad q = (q_1, \dots, q_n)$$

$$(4) \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad ; \quad q_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1$$

sont les distributions de probabilité correspondantes.

On pose également:

$$(5) \quad \pi^* = (\pi_{11}^*, \dots, \pi_{nm}^*)$$

$$(6) \quad \pi_{ij}^* \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* = 1$$

π^* étant une distribution de probabilité conjointe arbitraire du vecteur aléatoire (X, Y) . Ecrivons les distributions de probabilité marginale de la distribution π^* :

$$(7) \quad p^* = (p_1^*, \dots, p_n^*) ; \quad q^* = (q_1^*, \dots, q_m^*)$$

$$(8) \quad p_i^* = \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* , \quad (i=1, \dots, n) ; \quad q_j^* = \sum_{i=1}^n \pi_{ij}^* , \quad (j=1, \dots, m)$$

Si l'on appelle $\pi = (\pi_{11}, \dots, \pi_{nm})$ une autre distribution de probabilité conjointe du vecteur aléatoire (X, Y) , arbitraire ou bien conforme aux distributions de probabilité marginale p et q , une mesure de la proximité entre π^* et π est donnée par la formule de divergence de S. KULLBACK (1959):

$$(9) \quad I(\pi^* : \pi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \text{Log} \frac{\pi_{ij}^*}{\pi_{ij}}$$

L'auteur montre que $I(\pi^* : \pi) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\pi^* = \pi$.

On définit l'interdépendance (ou la connexion) entre p^* et q^* par la formule de WATANABE dans ce contexte probabiliste:

$$(10) \quad W(\pi^* ; p^*, q^*) = H(p^*) + H(q^*) - H(\pi^*)$$

où $H(p^*)$, $H(q^*)$ et $H(\pi^*)$ sont les valeurs des entropies informationnelles correspondantes respectivement aux distributions p^* , q^* et π^* .

Ainsi par exemple:

$$(11) \quad H(\pi^*) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \text{Log} \pi_{ij}^*$$

Il est aisé de montrer que l'on a $W(\pi^*; p^*, q^*) \geq 0$ avec égalité si et seulement si la distribution de probabilité jointe π^* est identique au produit de ses distributions marginales, c'est-à-dire si:

$$(12) \quad \pi^* = p^* q^*$$

ou, de façon équivalente, si p^* et q^* sont indépendantes par rapport à la distribution de probabilité bi-dimensionnelle π^* .

A partir de (9) et (10) on obtient:

$$(13) \quad W(\pi^*; p^*, q^*) = I(\pi^* : p^* q^*)$$

En d'autres termes, la mesure d'interdépendance entre p^* et q^* par rapport à la distribution de probabilité conjointe π^* est précisément la divergence de KULLBACK que l'on peut observer entre π^* et le produit direct de ses distributions de probabilité marginale.

En 1979, S. GUIASU a proposé une mesure d'interdépendance plus générale appelée W^* . Elle se définit par rapport aux trois distributions p , q et π^* ; cette dernière étant, par construction, arbitraire par rapport aux deux premières:

$$(14) \quad W^*(\pi^*; p, q) = I(\pi^* : p q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \text{Log} \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j}$$

Avant d'établir quelques propriétés de cette nouvelle mesure, on établit le lemme suivant:

Lemme 1: Pour tout $t > 0$ on a

$$(15) \quad t \operatorname{Log} t = (t - 1) + \frac{1}{2\tau} (t - 1)^2$$

avec τ compris entre 1 et t

Démonstration

Soit:

$$(16) \quad \phi(t) = t \operatorname{Log} t$$

la formule de Taylor donne:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi(1) + \phi'(1)(t - 1) + \frac{1}{2} \phi''(\tau)(t - 1)^2 = \\ &= (t - 1) + \frac{1}{2\tau} (t - 1)^2 \end{aligned}$$

pour $t > 0$ avec τ compris entre 1 et t

q.e.d.

Proposition 1: On a:

$$(17) \quad W^*(\pi^*; p, q) \geq 0$$

avec égalité si et seulement si

$$(18) \quad \pi_{ij}^* = p_i q_j \quad (i=1, \dots, n; j=1, \dots, m)$$

Démonstration:

En appliquant le lemme 1, on a:

$$\begin{aligned}
 (19) \quad W^* &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \operatorname{Log} \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} = \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} \operatorname{Log} \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} = \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} - 1 \right) + \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j \frac{1}{2h_{ij}} \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} - 1 \right)^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j \frac{1}{2h_{ij}} \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} - 1 \right)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

où h_{ij} est un nombre compris entre 1 et $\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j}$ ainsi:

$$W^* = W^*(\pi^*; p, q) \geq 0$$

avec égalité si et seulement si (18) est vraie.

q.e.d.

Selon la proposition 1, on peut donc interpréter $W^*(\pi^*; p, q)$ comme une mesure de l'interdépendance entre π^* et p et q , ou bien comme une mesure de l'interdépendance entre p et q par rapport à la distribution de probabilité produit π^* . La quantité $W^*(\pi^*; p, q)$ évalue de combien la distribution π^* diffère de la distribution de probabilité jointe "indépendante" $p q$.

Afin d'établir le lien entre la mesure W de WATANABE et la mesure W^* de GUIASU, prenons en considération les distributions de probabilité marginale de la distribution π^* et données par l'écriture (8).

On a :

$$\begin{aligned}
 (20) \quad W^*(\pi^*; p, q) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \operatorname{Log} \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} = \\
 &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \operatorname{Log} p_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \operatorname{Log} q_j + \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \operatorname{Log} \pi_{ij}^* = - \sum_{i=1}^n p_i \operatorname{Log} p_i - \\
 &- \sum_{j=1}^m q_j \operatorname{Log} q_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \operatorname{Log} \pi_{ij}^*
 \end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned}
 (21) \quad W^*(\pi^*; p^*, q^*) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \operatorname{Log} \frac{\pi_{ij}^*}{p_i^* q_j^*} = \\
 &= - \sum_{i=1}^n p_i^* \operatorname{Log} p_i^* - \sum_{j=1}^m q_j^* \operatorname{Log} q_j^* + \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \operatorname{Log} \pi_{ij}^* = H(p^*) + H(q^*) - H(\pi^*) = \\
 &= W(\pi^*; p^*, q^*)
 \end{aligned}$$

Il convient de mentionner ici que $W^*(\pi^*; p, q)$ est définie pour n'importe quelles distributions π^*, p, q tandis que la mesure de WATANABE $W(\pi^*; p^*, q^*)$ n'est définie que pour le

seul cas où p^* et q^* sont les distributions de probabilité marginale de la distribution de probabilité conjointe π^* .

Afin d'obtenir une relation entre $W^*(\pi^*; p, q)$ et $W(\pi^*; p^*, q^*)$, on établit le lemme suivant:

Lemme 2: Pour toute distribution de probabilité:

$$(22) \quad p^* = (p_1^*, \dots, p_n^*) \quad , \quad p = (p_1, \dots, p_n)$$

$$(23) \quad p_1^* \geq 0, (i=1, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^n p_i^* = 1 ;$$

$$p_i \geq 0, (i=1, \dots, n) \quad , \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

on a:

$$(24) \quad - \sum_{i=1}^n p_i^* \text{Log } p_i \geq - \sum_{i=1}^n p_i^* \text{Log } p_i^*$$

avec égalité si et seulement si $p_i^* = p_i$, $(i=1, \dots, n)$

Démonstration:

En appliquant le lemme 1, on a:

$$\begin{aligned} (25) \quad & - \sum_{i=1}^n p_i^* \text{Log } p_i - \left(- \sum_{i=1}^n p_i^* \text{Log } p_i^* \right) = \\ & = \sum_{i=1}^n p_i^* \text{Log } \frac{p_i^*}{p_i} = \sum_{i=1}^n p_i \frac{p_i^*}{p_i} \text{Log } \frac{p_i^*}{p_i} = \\ & = \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{p_i^*}{p_i} - 1 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{h_i} \left(\frac{p_i^*}{p_i} - 1 \right)^2 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i \frac{1}{h_i} \left(\frac{p_i^*}{p_i} - 1 \right)^2 \geq 0$$

où h_i est un nombre compris entre 1 et $\frac{p_i^*}{p_i}$, avec égalité si et seulement si

$$(26) \quad p_i^* = p_i \quad (i=1, \dots, n)$$

q.e.d.

Proposition 2: On a:

$$(27) \quad W^*(\pi^*; p, q) \geq W(\pi^*; p^*, q^*)$$

avec égalité si et seulement si:

$$(28) \quad p = p^*, \quad q = q^*$$

Démonstration: En appliquant le lemme 2, on a conformément à (20) et (21):

$$\begin{aligned} (29) \quad W^*(\pi^*; p, q) &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i^* \text{Log } p_i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m q_j^* \text{Log } q_j + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \text{Log } \pi_{ij}^* \geq - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i^* \text{Log } p_i^* - \\ &- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m q_j^* \text{Log } q_j^* + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \text{Log } \pi_{ij}^* = \\ &= W(\pi^*; p^*, q^*) \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si:

$$p = p^* , \quad q = q^*$$

q.e.d.

4- LE PRINCIPE DE L'INTERDEPENDANCE MINIMUM

Les principes variationnels interviennent de façon fondamentale dans les sciences économiques (et dans les sciences humaines en général). En fait, il est difficile d'envisager une bonne théorie sans principe variationnel sous-jacent; en effet, la démarche fondamentale de la plupart des sciences consiste à étudier des variables, c'est-à-dire des variations d'entités ou de caractéristiques reliées directement ou indirectement à l'objet d'analyse. La théorie micro-économique néo-classique est ainsi fondée sur deux grands principes variationnels: le Principe de l'Utilité Maximum et le Principe du Profit Maximum auquel on a coutume d'adjoindre son corollaire, le Principe du Coût Minimum.

Les principes variationnels sont généralement élaborés à partir de règles d'action ou de principes plus généraux qui reflètent une conduite rationnelle ou évoquent une situation communément jugée souhaitable, sinon idéale. Ainsi, il est aisé de vérifier que le Principe de l'Entropie Maximum de JAYNES n'est qu'une généralisation du principe rationnel de la "Raison Insuffisante" de LAPLACE. Ces deux principes reposent sur l'idée d'équiprobabilité, les sociologues parlent d'équité, entre plusieurs événements dont les occurrences effectives ne sont ni observables ni directement calculables en raison d'une information disponible insuffisante.

La théorie de l'interdépendance globale de WATANABE suggère un nouveau principe variationnel que GUIASU a présenté pour la première fois en 1979, il s'agit du Principe de l'Interdépendance Minimum. L'objectif de l'auteur était d'introduire un nouveau critère pour sélectionner la meilleure distribution de probabilité produit π^* compatible avec les seules données que l'on a à notre disposition et sachant que celle-ci n'est parfaitement définie que pour le cas particulier où dans le vecteur aléatoire (X, Y) attaché à la distribution π^* , les variables aléatoires X et Y sont indépendantes:

$$(30) \quad \pi_{ij}^* = p_i q_j \quad , \quad (i=1, \dots, n; j=1, \dots, m)$$

ou plus brièvement

$$(31) \quad \pi^* = p q$$

Les données que l'on a à notre disposition sont généralement des moments statistiques, simples ou mixtes, rattachés au vecteur aléatoire (X, Y) . La contrainte la plus simple et la plus commune est naturellement la covariance (ou le coefficient de corrélation) entre les variables X et Y .

Notons ici que le critère de l'entropie maximum sur lequel repose le PEM permet depuis longtemps de répondre à ce type de problème en proposant une méthode pour "construire" une distribution de probabilité. On sait ainsi qu'étant données une moyenne et une variance, la distribution qui correspond à une mesure d'entropie maximum est la loi normale⁽¹⁾. Il convient cependant de noter ici que JAYNES n'avait élaboré

(1) cf. par exemple S. GUIASU (1977)

Le PEM que dans le contexte où l'information disponible n'était formulée qu'en termes de moments statistiques. A cet égard, on sait que WILSON commet certains "débordements" de la théorie originale puisqu'il utilise ce principe en introduisant sous forme de contraintes les distributions marginales de déplacements dont le formalisme n'a rien de commun avec celui des moments statistiques.

GUIASU propose le principe variationnel qui consiste à construire la distribution de probabilité produit π^* qui soit "la plus large" possible, et compatible avec les contraintes disponibles. Il recherche donc la distribution de probabilité produit π^* qui minimise $W^*(\pi^*; p, q)$ compte tenu d'un ensemble de contraintes. Une telle solution sera la plus proche de la distribution de probabilité conjointe "indépendante" p, q compatible avec les contraintes. Une telle solution assure la plus grande liberté possible pour que le vecteur aléatoire (X, Y) puisse prendre toute configuration possible.

Bien que GUIASU n'ait pas fait de mention explicite à ce sujet, il est aisé de retrouver les prémisses rationnelles qui sous-tendent ce principe. Nous pouvons en effet envisager un "second" principe de la raison insuffisante qui, dans sa version la plus brève, s'énoncerait: *"Etant donné deux événements, en présence d'une information nulle, on considère que ces deux événements sont indépendants"*. Le rationnel tient au fait que l'on décide, en présence d'aucune information, de choisir une solution unique et non ambiguë. Si l'on décidait de considérer que ces deux événements étaient dépendants, le principe deviendrait totalement inopératif; quel serait le degré de dépendance? Sur la base de quelles considérations déciderions-nous de fixer ce degré de

dépendance à telle ou telle valeur alors qu'au départ on est en présence d'une information nulle?

A titre d'exemple, on envisage maintenant le cas le plus simple où le PIM peut être appliqué. On suppose que seule la covariance $\sigma_{X,Y}$ est connue et l'on cherche à déterminer la distribution de probabilité produit π^* qui minimise $W^*(\pi^*; p, q)$ et qui soit compatible avec $\sigma_{X,Y}$.

Théorème 1: La distribution de probabilité produit π^* qui minimise $W^*(\pi^*; p, q)$ compatible avec la covariance $\sigma_{X,Y}$ est donnée par:

$$(32) \quad \pi_{ij}^* = \frac{1}{\Phi(\beta)} p_i q_j e^{-\beta (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y)},$$
$$(i=1, \dots, n; j=1, \dots, m)$$

où μ_X et μ_Y sont les valeurs moyennes des variables X et Y et où:

$$(33) \quad \Phi(\beta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j e^{-\beta (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y)},$$
$$(i=1, \dots, n; j=1, \dots, m)$$

β étant la solution unique de l'équation

$$(34) \quad \frac{d \ln \Phi(\beta)}{d\beta} = -\sigma_{X,Y}$$

Démonstration:

On veut déterminer la distribution de probabilité produit π^* :

$$(35) \quad \pi_{ij}^* \geq 0, \quad (i=1, \dots, n; j=1, \dots, m)$$

$$(36) \quad 1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^*$$

compatible avec la covariance:

$$(37) \quad \sigma_{X,Y} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y) \pi_{ij}^*$$

et qui minimise l'interdépendance:

$$(38) \quad W^* = W^*(\pi^*; p, q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \cdot \text{Log} \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j}$$

ou, de façon équivalente, qui maximise:

$$(39) \quad -W^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \text{Log} \frac{p_i q_j}{\pi_{ij}^*}$$

En utilisant le lemme 1 et en introduisant des multiplicateurs de LAGRANGE α, β correspondant respectivement aux conditions (36) et (37), il vient:

$$(40) \quad \begin{aligned} W^* + \alpha + \beta \sigma_{X,Y} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \text{Log} \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha \pi_{ij}^* + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y) \pi_{ij}^* = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \left[\text{Log} \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} + \alpha + \beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \pi_{ij}^* \text{Log} \left[\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{+\alpha + \beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j e^{-\alpha - \beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)} \quad \chi \\
 &\chi \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\alpha + \beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)} \quad \chi \\
 &\text{Log} \left[\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\alpha + \beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)} \right] = \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j e^{-\alpha - \beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)} \quad \chi \\
 &\chi \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\alpha + \beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)} - 1 \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j e^{-\alpha - \beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)} \quad \chi \\
 &\chi \frac{1}{h_{ij}} \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\alpha + \beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)} - 1 \right)^2 \geq \\
 &\geq 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_i q_j e^{-\alpha - \beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)} = A
 \end{aligned}$$

où pour tout $i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, m$, h_{ij} est un nombre compris entre 1 et le nombre:

$$(41) \quad \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\alpha + \beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)} > 0$$

L'égalité en (40) survient si et seulement si

$$(42) \quad \pi_{ij}^* = p_i q_j e^{-\alpha - \beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)},$$

$$(i=1, \dots, n; j=1, \dots, m)$$

dans lequel cas:

$$(43) \quad A = 0$$

En introduisant (42) dans la condition (36) on obtient:

$$(44) \quad e^{-\alpha} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m p_i q_j e^{-\beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)} = 1$$

soit:

$$(45) \quad \pi_{ij}^* = \frac{1}{\Phi(\beta)} p_i q_j e^{-\beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)},$$

$$(i=1, \dots, n; j=1, \dots, m)$$

où:

$$(46) \quad \Phi(\beta) = e^{\alpha} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m p_i q_j e^{-\beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)}$$

En introduisant maintenant (45) dans la condition (37), on obtient:

$$(47) \quad \sigma_{X,Y} = \frac{1}{\Phi(\beta)} \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y) \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m p_i q_j e^{-\beta (x_i - \mu_X) (y_j - \mu_Y)}$$

ou encore:

$$(48) \quad \sigma_{X,Y} = - \frac{\Phi'(\beta)}{\Phi(\beta)}$$

soit finalement:

$$(49) \quad \frac{d \ln \phi(\beta)}{d\beta} = - \sigma_{X,Y}$$

q.e.d.

On remarque que l'équation (34) [ou (49)] peut s'écrire:

$$(50) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\sigma_{X,Y} - (x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y)] \chi e^{-\beta(x_i - \mu_X)(y_j - \mu_Y)} p_i q_j = 0$$

Il s'agit d'une équation polynomiale exponentielle qui ne possède donc pas de racine algébrique. Le nombre β , solution de cette équation sera généralement un nombre transcendant. Ce fait implique la nécessité de trouver des solutions approximatives pour (34) à partir de méthodes heuristiques appropriées (cf. par exemple M. BATTY et S. MACKIE, 1972 ou B. VERMOT-DESROCHES, 1979) ou bien à partir d'un calcul d'approximation directe⁽¹⁾.

5- LE MODELE ELEMENTAIRE DE WILSON ET LE PIM

Le modèle initial de WILSON (1967) proposait initialement une distribution de déplacement en maximisant une distribution de probabilité multinomiale et en appliquant la formule d'approximation de STIRLING. Le principe variationnel à la base de cette démarche reste obscur, mais peu après, l'auteur reformule

(1) S. GUIASU et B. VERMOT-DESROCHES (1981) proposent une solution d'approximation du premier ordre pour résoudre l'équation (34). La même méthode est utilisée pour donner une solution d'approximation au modèle de WILSON (1967).

la même solution en appliquant le PEM de JAYNES (WILSON, 1969). Plus précisément, la solution obtenue par WILSON pour le problème de transport posé est la distribution de probabilité qui maximise l'entropie bidimensionnelle compatible avec les distributions de probabilité marginale et un coût moyen de transport donné (c'est-à-dire, un moment mixte positif). En fait, nous l'avons souligné plus haut, l'auteur introduit parmi les contraintes usuelles du PEM (valeurs moyennes de variables aléatoires), d'autres contraintes, nouvelles et inhabituelles, notamment les distributions de probabilité marginale.

Dans ce paragraphe, nous montrons que le modèle de WILSON peut être obtenu d'une façon élégante à partir de l'application directe du PIM. De cette façon, nous obtenons également une interprétation intéressante du modèle d'interaction spatiale de WILSON. En fait, nous allons montrer que ce modèle s'avère être le plus "large" possible, ou le plus "indépendant" possible des modèles d'interaction de type gravitaire compatible avec les contraintes données (distributions de probabilité marginale et coût de transport moyen). Nous verrons que l'application du PIM ne donne pas seulement la possibilité de reformuler le modèle de WILSON, mais également de mesurer la quantité d'interdépendance correspondante à ce modèle.

La possibilité de mesurer la quantité d'interdépendance existante entre toutes les localités prises simultanément n'est possible seulement qu'avec l'application du PIM et non du PEM. En fait, le problème de la recherche d'une distribution de déplacement dans un système régional donné est un problème fondamentalement d'interaction, en conséquence, le recours à une mesure d'interdépendance globale s'impose de façon naturelle.

On considère la distribution:

$$\pi^* = (\pi_{ij}^*) \quad , \quad (i=1, \dots, n; j=1, \dots, n)$$

avec:

$$(51) \quad \pi_{ij}^* = \frac{T_{ij}}{T} \quad , \quad (i, j=1, \dots, n)$$

où T_{ij} représente la quantité de personnes voyageant d'une zone i vers une zone j et T est le nombre total de déplacements qui s'effectuent entre toutes les paires de régions:

$$(52) \quad T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ij}$$

Théorème 2: La distribution de probabilité π^* qui minimise $W^*(\pi^*; p, q)$ compatible avec les distributions de probabilité marginale p et q (c'est-à-dire ici: $p^* = p, q^* = q$) et avec le coût moyen:

$$(53) \quad C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \pi_{ij}^* \quad c_{ij} \geq 0 \quad , \quad (i, j=1, \dots, n)$$

où c_{ij} représente les coûts de déplacements unitaires d'une zone i vers une zone j , est donnée par:

$$(54) \quad \pi_{ij}^* = a_i b_j p_i q_j e^{-\beta c_{ij}} \quad , \quad (i, j=1, \dots, n)$$

où les nombres $a_i, (i=1, \dots, n), b_j, (j=1, \dots, n), \beta$ satisfont les équations:

$$(55) \quad \sum_{j=1}^n a_i b_j q_j e^{-\beta c_{ij}} = 1 \quad (i=1, \dots, n)$$

$$(56) \quad \sum_{i=1}^n a_i b_j p_i e^{-\beta c_{ij}} = 1 \quad (j=1, \dots, n)$$

$$(57) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} a_i b_j p_i q_j e^{-\beta c_{ij}} = C$$

Démonstration: On veut minimiser:

$$(58) \quad W^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_{ij}^* \operatorname{Log} \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j}$$

compatible avec:

$$(59) \quad p_i = \sum_{j=1}^n \pi_{ij}^* , \quad (i=1, \dots, n)$$

$$(60) \quad q_j = \sum_{i=1}^n \pi_{ij}^* , \quad (j=1, \dots, n)$$

$$(61) \quad C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \pi_{ij}^*$$

En introduisant les multiplicateurs de LAGRANGE

γ_i , ($i=1, \dots, n$), δ_j , ($j=1, \dots, n$) et β et en appliquant le lemme 1, il vient:

$$\begin{aligned} (62) \quad W^* + \sum_{i=1}^n \gamma_i p_i + \sum_{j=1}^n \delta_j q_j + \beta C &= \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_{ij}^* \operatorname{Log} \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_i \pi_{ij}^* + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_j \pi_{ij}^* + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta c_{ij} \pi_{ij}^* = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_{ij}^* \left[\operatorname{Log} \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} + \gamma_i + \delta_j + \beta c_{ij} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_{ij}^* \text{Log} \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\gamma_i + \delta_j + \beta c_{ij}} \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i q_j e^{-\gamma_i - \delta_j - \beta c_{ij}} \chi \\
 &\chi \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\gamma_i + \delta_j + \beta c_{ij}} \text{Log} \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\gamma_i + \delta_j + \beta c_{ij}} \right) = \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i q_j e^{-\gamma_i - \delta_j - \beta c_{ij}} \chi \\
 &\chi \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\gamma_i + \delta_j + \beta c_{ij}} - 1 \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i q_j e^{-\gamma_i - \delta_j - \beta c_{ij}} \chi \\
 &\chi \frac{1}{h_{ij}} \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\gamma_i + \delta_j + \beta c_{ij}} - 1 \right)^2
 \end{aligned}$$

où h_{ij} est un nombre compris entre 1 et le nombre positif:

$$(63) \quad \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\gamma_i + \delta_j + \beta c_{ij}} > 0$$

En conséquence, on obtient à partir de (62):

$$\begin{aligned}
 (64) \quad W^* + \sum_{i=1}^n \gamma_i p_i + \sum_{j=1}^n \delta_j q_j + \beta C &\geq \\
 &\geq 1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i q_j e^{-\gamma_i - \delta_j - \beta c_{ij}} = A
 \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si:

$$(65) \quad \pi_{ij}^* = p_i q_j e^{-\gamma_i - \delta_j - \beta c_{ij}}, \quad (i, j=1, \dots, n)$$

dans lequel cas:

$$A = 0$$

et l'on a:

$$(66) \quad W_{\min}^* = W^* (p_i q_j e^{-\gamma_i - \delta_j - \beta c_{ij}}, \\ (i=1, \dots, n; j=1, \dots, n); p, q) = \\ = - \sum_{i=1}^n \gamma_i p_i - \sum_{j=1}^m \delta_j q_j - \beta C$$

En introduisant les valeurs de π_{ij}^* de l'écriture (65) dans les contraintes (59) - (61), on obtient:

$$(67) \quad p_i = \sum_{j=1}^n p_i q_j e^{-\gamma_i - \delta_j - \beta c_{ij}}, \quad (i=1, \dots, n)$$

$$(68) \quad q_j = \sum_{i=1}^n p_i q_j e^{-\gamma_i - \delta_j - \beta c_{ij}}, \quad (j=1, \dots, n)$$

$$(69) \quad C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} p_i q_j e^{-\gamma_i - \delta_j - \beta c_{ij}}$$

Si l'on pose maintenant:

$$(70) \quad a_i = e^{-\gamma_i} \quad (i=1, \dots, n)$$

$$(71) \quad b_j = e^{-\delta_j} \quad (j=1, \dots, n)$$

On observe que le système (67) - (69) est identique au

système (55) - (57) qui, compte tenu de l'équation de distribution (54), correspond au modèle élémentaire de WILSON (1967).

q.e.d.

Remarques

- 1- A partir de l'écriture (66) on peut voir que la distribution de probabilité optimum (65) permet de linéariser l'expression W^* en fonction des contraintes p , q et c . Les multiplicateurs de LAGRANGE γ_i , ($i=1, \dots, n$), δ_j , ($j=1, \dots, n$), et β sont précisément les coefficients de cette combinaison linéaire.
- 2- A ce stade de la réflexion, on est en droit de se poser la question suivante: Pourquoi est-il possible d'obtenir la solution proposée par WILSON en utilisant indifféremment le PEM ou le PIM? La réponse est en fait évidente. Dans le théorème 2 précédent, on se donne les distributions de probabilité marginale de la distribution π^* en posant que les distributions de probabilité initiale p et q étaient respectivement égales à ces distributions de probabilité marginale p^* et q^* . Dans ce cas d'après notre proposition 2:

$$\begin{aligned} W^*(\pi^*; p, q) &= W(\pi^*; p^*, q^*) = W(\pi^*; p, q) = \\ &= H(p) + H(q) - H(\pi^*) \end{aligned}$$

et comme les entropies $H(p)$ et $H(q)$ sont constantes (non dépendantes de la distribution π^*), dans ce cas précis, la minimisation de $W^*(\pi^*; p, q)$ est équivalente à la maximisation de $H(\pi^*)$ compatible avec les contraintes

p , q et C . Le modèle élémentaire de WILSON est donc entièrément caractérisé par le Principe de l'Interdépendance Minimum, il n'en est qu'une application particulière correspondante aux contraintes donnant p^* , q^* et C .

6- UNE GENERALISATION DU MODELE ELEMENTAIRE PAR LE PIM

Il est intéressant de remarquer que le modèle élémentaire de WILSON ne présente une structure de type gravitaire qu'en raison de l'introduction a priori des distributions de probabilité marginale de la distribution π^* .

$$p_i^* = \sum_{j=1}^n \pi_{ij}^* \quad , \quad (i=1, \dots, n)$$

$$q_j^* = \sum_{i=1}^n \pi_{ij}^* \quad , \quad (j=1, \dots, n)$$

Ce sont elles qui imposent dans l'équation de distribution (54) les facteurs "émetteurs" a_i , p_i et les facteurs "attracteurs" b_j , q_j . L'application du PEM muni de la seule contrainte du coût de transport moyen n'aboutirait nullement à un modèle d'interaction de type gravitaire.

L'application du PIM, en revanche, permet ce type de généralisation. En effet, on renonce à présent à la connaissance a priori des distributions de probabilité marginale. p et q ne sont plus respectivement égal aux distributions p^* et q^* comme dans le cas du théorème 2 mais sont totalement arbitraires par rapport à la distribution π^* . Elles peuvent être obtenues par exemple de façon exogène par le biais d'enquêtes ou bien sur la base d'estimations qui seraient effectuées à partir de variables "proxy". D'autre part la solution proposée par le PIM n'impose pas ici la connaissance complète

des deux vecteurs p et q.

On recherche donc la distribution π^* qui minimise la divergence W^* de la situation d'indépendance:

$$(72) \quad W^* (\pi^*; p, q) = I (\pi^* : p, q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_{ij}^* \text{Log} \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j}$$

compatible avec

$$(73) \quad 1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_{ij}^*$$

$$(74) \quad C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \pi_{ij}^*$$

En appliquant le lemme 1 et en introduisant les deux multiplicateurs de LAGRANGE α et β , il vient:

$$(75) \quad W^* + \alpha + \beta c = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_{ij}^* \text{Log} \frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha \pi_{ij}^* +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta c_{ij} \pi_{ij}^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_{ij}^* \text{Log} \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\alpha + \beta c_{ij}} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i q_j e^{-\alpha - \beta c_{ij}} \chi$$

$$\chi \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\alpha + \beta c_{ij}} \right) \text{Log} \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\alpha + \beta c_{ij}} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i q_j e^{-\alpha - \beta c_{ij}} \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\alpha + \beta c_{ij}} - 1 \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i q_j e^{-\alpha - \beta c_{ij}} \chi$$

$$\chi \frac{1}{2 \tau_{ij}} \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\alpha + \beta c_{ij}} - 1 \right)^2 \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i q_j e^{-\alpha - \beta c_{ij}} \left(\frac{\pi_{ij}^*}{p_i q_j} e^{\alpha + \beta c_{ij}} - 1 \right)$$

avec égalité si et seulement si:

$$(76) \quad \pi_{ij}^* = p_i q_j e^{-\alpha - \beta c_{ij}} \quad (i, j=1, \dots, n)$$

dans lequel cas:

$$(77) \quad W^* = -\alpha - \beta C$$

En introduisant (76) dans la contrainte (73) on a:

$$(78) \quad e^{\alpha} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i q_j e^{-\beta c_{ij}} = \Phi(\beta)$$

d'où la solution:

$$(79) \quad \pi_{ij}^* = \frac{1}{\Phi(\beta)} p_i q_j e^{-\beta c_{ij}}$$

avec:

$$(80) \quad \Phi(\beta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i q_j e^{-\beta c_{ij}}$$

Finalement en introduisant l'équation de distribution (79) dans la contrainte (74) on obtient l'équation devant être satisfaite par β :

$$(81) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i q_j (c_{ij} - C) e^{-\beta c_{ij}} = 0$$

Cette solution [(79) - (81)] est plus générale que celle obtenue par WILSON dans le sens qu'elle n'implique la compatibilité que d'une seule contrainte sans que sa structure gravitaire n'en soit affectée. Ce modèle peut donc être utile pour le cas (fréquent) où p et q sont déterminés de façon approximative et qu'il n'y a aucune raison de les inclure en tant que contraintes formelles de distribution de déplacement.

*

*

*

REFERENCES

- BATTY, M., MACKIE, S. (1972) "The calibration of gravity, entropy and related models of spatial interaction". *Environment and Planning*, 4, 205-233.
- GUIASU, S. (1977) "*Information Theory with Applications*" Mc Graw-Hill, New York - Toronto - London - Düsseldorf.
- GUIASU, S. (1979) "On entropic measure of connection and interdependence between the subsystems of a given large system". Third FORMATOR Symposium on Mathematical Methods for the Analysis of Large-Scale Systems. Proceedings of a Symposium held in Liblice near Prague, May 16-19, 1978 (Edited by J. Benes, L. Bakule) Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague 1979, 113-124.
- GUIASU, S., B. VERMOT-DESROCHES (1982) "Some Remarks on Wilson's gravity model and a slight generalization of it" à paraître, *Transportation Research*, part B.
- GUIASU, S., B. VERMOT-DESROCHES (1981) "The Principle of Minimum Interdependence and urban and regional modelling". Document scientifique LAPEDIM no LAP-81-07, Université du Québec à Trois-Rivières.
- HOBSON, A. (1971) "*Concepts in statistical mechanics*", Gordon and Beach, New York.
- JAYNES, E.T. (1957) "Information theory and statistical mechanics", *Phys, Rev.* 106, 620-630.
- KULLBACK, S. (1959) "*Information Theory and Statistics*". Wiley, New York.
- SHANNON, C.E. (1948) "A mathematical theory of communication", *Bell Syst. Techn. Journal*, 27, 379-423, 632-656.

SNICKARS, F., WEIBULL, J.W. (1977) "A Minimum Information Principle", theory and practice. *Regional Science and Urban Economics*, 7, 137-168.

VERMOT-DESROCHES, B. (1979) "Testing econometric spatial interaction models using French regional data". Paper presented to the 26th North American Meeting of the Regional Science Association, Los Angeles, 9-11 novembre 1979.

VERMOT-DESROCHES, B. (1982) "*Interaction dans l'espace économique et théorie de l'interdépendance globale*" thèse de doctorat d'état, Université de Dijon.

WATANABE, S. (1969) "*Knowing and Guessing*", Wiley, New York.

WILSON, A.G. (1967) "A statistical theory of spatial distribution models", *Transportation Research*, 1, 253-269.

WILSON, A.G. (1969) "Entropy maximizing models in the theory of trip distribution, mode split and route split", *J. Transp. Econ. Policy*, 3, 108-126.