



**HAL**  
open science

## La décomposition canonique et la cointégration

Zaka Ratsimalahelo

► **To cite this version:**

Zaka Ratsimalahelo. La décomposition canonique et la cointégration. [Rapport de recherche] Laboratoire d'analyse et de techniques économiques(LATEC). 1994, 16 p., ref. bib. : 1 p. 1/4. hal-01526541

**HAL Id: hal-01526541**

**<https://hal.science/hal-01526541>**

Submitted on 23 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LATEC

## LABORATOIRE D'ANALYSE ET DE TECHNIQUES ÉCONOMIQUES

UMR 5601 CNRS

DOCUMENT DE TRAVAIL



Pôle d'Economie et de Gestion

2, boulevard Gabriel - 21000 DIJON - Tél. 03 80 39 54 30 - Fax 03 80 39 54 43

ISSN : 1260-8556

**n° 9407**

**LA DECOMPOSITION CANONIQUE  
ET LA COINTEGRATION**

**Zaka RATSIMALAHELO**

**octobre 1994**

# La decomposition canonique et la cointégration.

Zaka RATSIMALAHELO\*

Septembre 1994

## Résumé.

Cet article propose une modélisation de l'espace état de la cointégration. On généralise la notion de variables cointégrées en n'imposant aucune restriction sur l'ordre d'intégration. Nous développons la notion d'agrégation dynamique d'un système qui est en parfaite relation avec le modèle à correction d'erreur et le modèle à tendances communes.

**Mots-clés:** Espace état, cointégration, agrégation dynamique, tendances communes, modèle à correction d'erreur.

## Abstract.

This paper has introduced state space models for cointegrated time series. In doing so, the notion of cointegration is slightly generalized. We develop the notion of dynamic aggregation link with error correction model and common trends.

**Keywords:** State space, cointegration, dynamic aggregation, common trends, error correction model.

\* LATEC, Université de Bourgogne et Université de Franche-Comté.

## I. Introduction.

La notion de cointégration initialement proposée par Granger (1981) et le théorème de représentation de Granger et Weiss (1983) ont contribué largement à l'élaboration de la technique d'estimation et du test présenté par Engle et Granger (1987) dont l'idée générale est la suivante: les variables non stationnaires sont généralement liées par des relations de cointégration, et ces relations devaient être prises en compte pour l'estimation et la prévision.

Les propriétés d'intégration et de cointégration expriment avant tout des propriétés dynamiques importantes pour les variables économiques, qu'il s'agisse de clarifier les relations entre niveaux et taux de croissance ou de dégager des propriétés de long terme et notamment le type de persistance des effets des chocs instantanés.

C'est ainsi que le modèle cointégré a permis de mieux appréhender la dynamique de court terme et l'équilibre de long terme des variables économiques, il est connu sous le nom de modèle à correction d'erreur. Ce dernier type de modèle, initialement préconisé par Sargan (1964), a été popularisé par Hendry (1978), (1986) et Johansen (1988).

D'autre part Stock et Watson (1988) ont développé le modèle de tendances communes qui généralise au cas vectoriel la décomposition de Beveridge et Nelson (1981).

Pour tester la cointégration, on utilise habituellement soit la forme du modèle à correction d'erreur, soit la forme du modèle à tendances communes. En fait le modèle à correction d'erreur et le modèle à tendances communes sont des représentations duales obtenues respectivement par développement de la forme autorégressive et de la forme moyenne mobile du modèle. Toutes deux ont une interprétation économique utile puisqu'elles révèlent des relations de cointégration ou de tendances communes qui lient ou engendrent les variables considérées.

Une autre approche utilisant le modèle espace état proposé par Aoki (1988) (1990) généralise la notion de variables cointégrées en n'imposant pas comme Engle et Granger, Johansen, Stock et Watson des restrictions sur l'ordre d'intégration. On peut alors définir des relations de cointégration concernant la même variable à différents degrés de différentiation et dans des transformations dynamiques.

Dans cet article nous donnons une représentation de la cointégration dans l'espace état. AOKI M. (1987, 1988) a utilisé une décomposition canonique d'un système dynamique permettant de séparer le sous-système dynamique lent et le sous-système dynamique rapide. Les variables cointégrées sont classées dans le sous système dynamique lent, ce sous-système correspond donc à une réponse à long terme.

Cette séparation en deux sous systèmes dynamiques est due à l'origine au problème d'agrégation dynamique, elle consiste à séparer les valeurs propres de la matrice d'évolution A en deux classes mutuellement exclusives, chaque classe appartenant à une partie  $C_i$  pour  $i = 1, 2$  du plan complexe telle que

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

soit  $n_i$  le nombre de valeurs propres de A contenues dans  $C_i$  pour  $i = 1, 2$

$$n_1 + n_2 = n.$$

La séparation des valeurs propres en deux classes disjointes convient parfaitement à la modélisation des séries économiques. La dynamique lente est associée aux valeurs propres proches du cercle unité, elle correspond ainsi à l'équilibre de long terme des séries économiques, tandis que la dynamique rapide, associée aux valeurs propres proches de l'origine correspond à la dynamique de court terme.

Notre approche se différencie de celle d'Aoki sur trois points essentiels :

- 1) nous effectuons la décomposition canonique à partir de la propriété de la fonction d'autocovariance du système dynamique,
- 2) la décomposition canonique faite par Aoki n'a pas permis de spécifier la trajectoire stationnaire qui correspond à la notion de l'équilibre de long terme,
- 3) nous généralisons l'agrégation dynamique tout en conservant la dimension de l'état du système.

Nous allons montrer dans la deuxième section que la décomposition canonique d'un système dynamique permet non seulement de généraliser la notion de la cointégration mais également de caractériser l'équilibre de long terme des variables concernées et enfin dans la troisième section nous faisons le lien entre l'agrégation dynamique, le modèle à correction d'erreur et le modèle à tendances communes.

## II. La décomposition canonique et la cointégration.

Considérons d'une part un système dynamique en temps discret à  $n$  dimensions décrit par les équations d'état suivantes:

$$X_t = AX_{t-1} + BV_t$$

et d'autre part un vecteur d'observations à  $m$  dimensions

$$Y_t = CX_t + U_t$$

où  $V_t$  et  $U_t$  sont des variables aléatoires.

Ce modèle est en fait équivalent au modèle innovation suivant voir RATSIMALAHELO (1994) :

$$\hat{X}_t = A\hat{X}_{t-1} + Ke_t$$

$$Y_t = C\hat{X}_t + e_t$$

avec  $\hat{X}_t = E(\hat{X}_t / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)$ , est le vecteur du meilleur estimateur de l'état  $X_t$ .

où  $e_t = Y_t - E(Y_t / Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)$  est le vecteur du processus d'innovation de  $Y_t$

et  $K = E(X_t e_t') E(e_t e_t')^{-1}$  est la matrice du gain de Kalman.

Dans ce qui suit nous considérons que la matrice d'état  $A$  est stable i.e. ses valeurs propres sont dans le cercle unité ou sur celui-ci, il en résulte que  $A^t$   $t \in \mathbb{Z}$  est borné si  $t$  tend vers l'infini. Ce choix est conforme à l'analyse des séries économiques parce que les valeurs propres supérieures à l'unité en norme correspondent au système explosif et ne présentent aucun intérêt particulier.

Nous effectuons d'abord une analyse dans le cadre stationnaire ce qui nous permet de spécifier la trajectoire stationnaire.

### A/ Cas stationnaire.

Nous considérons que le système dynamique est stationnaire, analysons alors les différents cas suivants.

a) Matrice A asymptotiquement stable.

Dans le cas où les valeurs propres de la matrice A sont à l'intérieur du cercle unité, la solution de l'équation d'état est donnée par

$$x_t = A^{t-t'} x_{t'} + \sum_{j=0}^{t-1} A^{t-1-j} B v_j.$$

lorsque t tend vers l'infini  $\lim_{t \rightarrow \infty} A^t x_t = 0$ , nous avons donc

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} A^{t-j} B v_j$$

le processus  $x_t$   $t \in \mathbb{Z}$  est alors purement non déterministe.

La matrice de variance-covariance

pour  $i > 0$

$$x_{t+i} = A^i x_t + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-1-j} B v_j.$$

$$E(x_{t+i} x_t') = A^i E(x_t x_t') + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-1-j} B E(v_j x_t')$$

$$P_i = A^i P_0.$$

pour  $i < 0$

$$P_i' = (A^{-i} P_0)' = P_0 (A^{-i})', \quad \text{car } P_0' = P_0,$$

d'autre part nous avons

$$E(x_t x_t') = P_0 = A P_0 A' + B Q B'.$$

Nous pouvons écrire l'équation de Lyapunov discrète comme suit

$$\begin{aligned} \text{vec } P_0 &= \text{vec } [A P_0 A' + B Q B'] \\ &= [I - (A' \otimes A)]^{-1} (B' \otimes B) \text{vec } Q. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $I - A' \otimes A$  sont  $1 - \lambda_i \lambda_j \forall i, j$  où  $\lambda_i$  est la valeur propre de A.

D'après notre hypothèse la matrice A est asymptotiquement stable i.e.  $1 - \lambda_i \lambda_j \neq 0$ , ainsi la solution existe et est unique, la matrice de variance  $P_0$  définie positive entraîne que le couple (A, B) est complètement commandable.



b) Matrice de covariance semi-définie positive.

Si  $1 - \lambda_i \lambda_j = 0$ , la solution n'existe pas, cela entraîne un changement de base T tel que

$$TP_0T' = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Tx = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

avec  $E(\tilde{x}_1 \tilde{x}_1') = P_0 > 0$

$$E(\tilde{x}_2 \tilde{x}_2') = 0.$$

Le processus  $x_1$  est markovien à variance définie positive ce qui nous ramène au cas 1), le processus  $x_2$  est presque sûrement nul  $\{0\}$ .

c) Matrice oscillatoire.

Nous dirons qu'une matrice A est oscillatoire si toutes ses valeurs propres sont sur le cercle unité.

Le système dynamique

$$x_t = Ax_{t-1} + Bv_t$$

ne peut définir un processus stationnaire que si la variance de bruit est nulle:  $BQB' = 0$  i.e.  $Bv_t = 0$ . Le processus correspondant est alors purement déterministe

$$x_t = Ax_{t-1}.$$

Dans ce cas  $P_0$  défini positif doit vérifier

$$P_0 - AP_0A' = 0.$$

Il est évident que  $P_0$  n'est plus nécessairement unique, par conséquent le couple (A, B) n'est plus commandable.

En réunissant les résultats des a), b), et c) nous avons démontré la proposition suivante.

**Proposition 1.**

Tout système dynamique stationnaire peut être considéré après changement de base comme généré par les sous-systèmes suivants :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & A_{13} \\ 0 & A_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t-1) \\ \tilde{x}_2(t-1) \\ \tilde{x}_3(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

où  $TAT' = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & A_{13} \\ 0 & A_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}$ ,  $TB = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $Tx = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$ .

$A_1$  matrice asymptotiquement stable (valeurs propres à l'intérieur du cercle unité).

$A_2$  matrice oscillatoire (valeurs propres sur le cercle unité)

$A_{13}$ ,  $A_{23}$ ,  $A_3$  matrices quelconques.

$Tx = \tilde{x}$  est une généralisation de la cointégration ■

Cette décomposition canonique nous a permis d'avoir trois sous-systèmes dynamiques.

$$1) \tilde{x}_{1t} = A_1 \tilde{x}_{1t-1} + B_1 v_t.$$

C'est un processus stationnaire non déterministe qui correspond d'après la classification d'Aoki au sous-système rapide.

La matrice de variance

$$P_1 = E(\tilde{x}_1 \tilde{x}_1') = A_1 P_1 A_1' + \tilde{B}_1 Q \tilde{B}_1'$$

est définie positive

$$P_1 = \sum_{j=0}^{\infty} A_1^j B_1 Q (B_1 A_1^j)' > 0.$$

$$2) \tilde{x}_{2t} = A_2 \tilde{x}_{2t-1}$$

C'est un processus stationnaire déterministe qui correspond au sous-système dynamique lent.

$Tx = 0$  définit la trajectoire stationnaire i.e l'équilibre de long terme.

La matrice de variance est

$$E(\tilde{x}_2 \tilde{x}_2') = P_2 = A_2 P_2 A_2'.$$

3)  $\tilde{x}_{3t}$  est le processus presque sûrement nul.

A partir de ces trois cas nous pouvons écrire l'équation d'observations comme suit :

$$y_t = c_1 \tilde{x}_{1t} + c_2 \tilde{x}_{2t} + u_t$$

Toute déviation de la trajectoire d'état stationnaire indique le déséquilibre de long terme.

L'extension de la proposition 1 est immédiate en analysant le cas non stationnaire.

#### B/ Cas non stationnaire.

Ceci nous conduit à étudier le 3<sup>ème</sup> cas où la matrice d'état  $A$  est oscillatoire. Dans ce cas si la variance de bruit devient non nulle  $BQB' \neq 0$ , alors nous avons un système non stationnaire

$$x_t = Ax_{t-1} + Bv_t.$$

#### **Proposition 2.**

Tout système dynamique markovien peut être considéré après changement de base comme généré par

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,t} \\ \tilde{x}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,t-1} \\ \tilde{x}_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} v_t$$

$$\text{avec } TAT' = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad TB = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}, \quad Tx = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Nous avons ainsi décomposé le système dynamique en deux échelles de temps, la courte et la longue périodes.

1) Un processus stationnaire

$$\tilde{x}_{1,t} = A_1 \tilde{x}_{1,t-1} + \tilde{B}_1 v_t.$$

qui correspond à un sous-système dynamique rapide.

2) Un processus non stationnaire

$$\tilde{x}_{2,t} = A_2 \tilde{x}_{2,t-1} + \tilde{B}_2 v_t.$$

qui correspond à un sous-système dynamique lent.

Nous pouvons écrire l'équation d'observations comme suit

$$y_t = c_1 \tilde{x}_{1,t} + c_2 \tilde{x}_{2,t} + u_t.$$

**Interprétation.**

$$y_t - c_2 \tilde{x}_{2,t} = c_1 \tilde{x}_{1,t} + u_t$$

est un modèle cointégré, le terme  $\tilde{x}_2$  est le facteur commun du processus d'observations.

Dans le cas de racine unitaire, Aoki (1987, 1988) a développé une approche mettant en relation la déflation matricielle et l'agrégation dynamique.

### III. Agrégation dynamique et cointégration.

Aoki (1987) a souligné que la notion de cointégration peut être considérée comme une déflation de la matrice du système dynamique.

#### Méthode de la déflation.

Lorsque la racine unitaire appartient à l'ensemble des valeurs propres de la matrice du système dynamique  $A$  :  $1 \in \text{sp}(A)$  [ $\text{sp}(A)$  signifie spectre de  $A$ ], alors la matrice  $I - A$  est de rang strictement inférieur à  $n$  ( $n$  est le rang de la matrice  $A$ ) parce que le vecteur propre  $X$  correspondant appartient au noyau

$$X \in \text{Ker}(I - A) \quad \text{avec } X \neq 0.$$

Posons  $E = I - A$ , nous avons évidemment  $EX = 0$ . Le couple  $(0, X)$  est l'élément propre de  $E$ .

Si le rang de E est égal à k,  $k < n$ , alors on aura  $n-k$  vecteurs propres indépendants associés à la valeur propre nulle. De plus la multiplicité de la valeur propre nulle est au moins égale à  $n-k$ . Ainsi il y aura au moins  $n-k$  vecteurs cointégrés.

### Agrégation dynamique.

#### Définition.

L'agrégation consiste à remplacer un modèle d'ordre  $n$  représentant le système dynamique donné par un modèle d'ordre inférieur  $n_1$  conservant les propriétés importantes du système.

Le système dynamique est défini par

$$x_t = Ax_{t-1} + Bv_t$$

où  $x_t$  est un vecteur d'état d'ordre  $n$ .

Une représentation approchée d'un modèle de dimension réduite est décrite par

$$\tilde{x}_t = \tilde{A} \tilde{x}_{t-1} + \tilde{B}v_t$$

où  $\tilde{x}_t$  est un vecteur de dimension  $k$ ,  $0 < k < n$ .

Ce modèle réduit est un modèle agrégé si les états  $\tilde{x}_t$  et  $x_t$  vérifient la relation linéaire d'agrégation

$$\tilde{x}_t = Nx_t$$

où  $N$  est une matrice de dimension  $(k \times n)$ .

Etant donné que la matrice  $E$  n'est pas de rang complet, elle peut donc être obtenue par

$$E = -M.N$$

de sorte que  $\text{rang}(M) = \text{rang}(N) = k$ , nous avons donc

$$-M.N = I - A \implies A = I + M.N.$$

En prémultipliant à gauche par  $N$  le système dynamique on obtient :

$$Nx_t = NAx_{t-1} + NBv_t$$

d'où  $\tilde{x}_t = (I + N.M)\tilde{x}_{t-1} + \tilde{B}v_t$ .

L'expression du vecteur d'état constitue une version générale de la cointégration, telle que

$$\tilde{A} = I + N.M$$

$$\tilde{B} = NB$$



la matrice  $N$  de dimension  $n \times k$  est la matrice d'agrégation, le vecteur d'état agrégé  $\tilde{x}_t = Nx_t$  est alors une généralisation de la cointégration.

L'agrégation dynamique a éliminé le système instable, on peut alors montrer que les valeurs propres de la matrice  $I + N.M$  sont différentes de l'unité en module

$$\det(\lambda I - A) = \det(\mu I - M.N) = \mu^{n-k} \det(\mu I - N.M)$$

avec  $\mu = \lambda - 1$ .

Une généralisation de l'approche consiste à tenir compte des valeurs propres unitaires

#### Généralisation.

Soit  $F_1$  la matrice d'ordre  $n \times (n-k)$  qui a pour colonnes  $n - k$  vecteurs propres associés à la valeur propre nulle

$$E.F_1 = (I - A).F_1 = 0$$

d'où  $F_1 = A.F_1$ .

Considérons une base de  $F$  obtenue en complétant par  $F_2$

$$F = [F_1, F_2] \text{ de dimension } n \times n, F_2 \text{ est d'ordre } n \times k$$

où les  $k$  colonnes de  $F_2$  sont choisies de telle manière que  $F$  soit non singulière.

L'inverse de la matrice  $F$  en forme partagée s'écrit

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \end{bmatrix}$$

où  $F^1$  est d'ordre  $(n - k) \times n$  et  $F^2$  est d'ordre  $k \times n$ , mais comme  $F^{-1}$  est non singulière, alors  $F^1$  et  $F^2$  sont de rang complet.

Les deux matrices  $F$  et  $F^{-1}$  vérifient :

$$F^{-1} \cdot F = \begin{bmatrix} F^1 F_2 & F^1 F_2 \\ F^2 F_2 & F^2 F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}$$

$$F \cdot F^{-1} = F_1 F^1 + F_2 F^2 = I_n.$$

En prémultipliant à gauche par  $F^{-1}$  le système dynamique, on obtient :

$$F^{-1} x_t = F^{-1} A x_{t-1} + F^{-1} B v_t$$

que l'on écrit :

$$\begin{bmatrix} F^1 x_t \\ F^2 x_t \end{bmatrix} = F^{-1} \cdot A \cdot F \begin{bmatrix} F^1 x_{t-1} \\ F^2 x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F^1 B \\ F^2 B \end{bmatrix} v_t.$$

Le système dynamique s'écrit alors comme suit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{1t} \\ \tilde{x}_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-k} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1t-1} \\ \tilde{x}_{2t-1} \end{bmatrix} + \tilde{B} v_t$$

avec  $\tilde{x}_t = F^{-1} x_t$

$$\tilde{A}_{12} = F^1 \cdot A \cdot F_2$$

$$\tilde{A}_{22} = F^2 \cdot A \cdot F_2$$

$$\tilde{B} = F^{-1} B.$$

La matrice d'agrégation est  $F^{-1}$  d'ordre  $n \times n$ , nous avons un système dynamique de rang  $n$  égal au rang du système initial.

La transformation a permis de triangulariser la matrice dynamique  $A$ .

Le système a deux sous systèmes dynamiques parce que les valeurs propres de la matrice sont dans deux classes disjointes, les valeurs propres sont rangées en ordre décroissant.

Les deux sous-systèmes dynamiques sont donc :

1) le sous-système dynamique lent

$$\tilde{x}_{1t} = \tilde{x}_{1t-1} + \tilde{A}_{12} \tilde{x}_{2t-1} + \tilde{B}_1 v_{1t}$$

qui correspond à la dynamique de long terme,

2) le sous-système dynamique rapide

$$\tilde{x}_{2t} = \tilde{A}_{22} \tilde{x}_{2t-1} + \tilde{B}_2 v_{2t}$$

c'est un processus stationnaire non déterministe qui correspond à la dynamique de court terme.

L'équation d'observation.

$$\begin{aligned} y_t &= [c_1 \quad c_2].F.F^{-1}x_t + u_t \\ &= [c_1 F \quad c_2 F] \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1t} \\ \tilde{x}_{2t} \end{bmatrix} + u_t \\ &= c_1 F \tilde{x}_{1t} + c_2 F \tilde{x}_{2t} + u_t. \end{aligned}$$

Tout vecteur  $\alpha$  dans l'espace nul de  $c_1 F$  est le facteur cointégrant au sens de Engle et Granger, il possède la propriété suivante :

$$\alpha . c_1 . F = 0.$$

Nous avons alors

$$\alpha y_t = \alpha c_2 F x_{2t} + \alpha u_t,$$

comme le membre à droite de cette relation est stationnaire, le processus  $\alpha y_t$  est alors  $I(0)$ .

D'après l'équation d'observations, le terme  $c_1 F \tilde{x}_{1t}$  est l'erreur de désagrégation.

On peut définir un autre couple de sous-systèmes dynamiques, il suffit d'inverser l'ordre des valeurs propres, ce qui nous permet d'écrire le système dynamique

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{1t} \\ \tilde{x}_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_2 & \tilde{A}_{12} \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1t-1} \\ \tilde{x}_{2t-1} \end{bmatrix} + \tilde{B} v_t$$

où le sous système dynamique lent est une marche aléatoire

$$\tilde{x}_{2t} = \tilde{x}_{2t-1} + \tilde{B}_2 v_{2t}$$



et le sous système dynamique rapide est une forme de modèle à correction d'erreur

$$\tilde{x}_{1t} = \tilde{A}_2 \tilde{x}_{1t-1} + \tilde{A}_{12} x_{2t-1} + \tilde{B}_1 v_{1t}.$$

Son expression sous forme de taux de croissance est

$$(1 - L) \tilde{x}_{1t} = (\tilde{A}_2 - 1) \tilde{x}_{1t-1} + \tilde{A}_{12} x_{2t-1} + \tilde{B}_1 v_{1t}.$$

#### IV. Conclusion.

La représentation espace-état nous a permis de généraliser la notion de variables cointégrées en n'imposant aucune restriction sur l'ordre d'intégration. La décomposition canonique d'un système dynamique a pu non seulement caractériser la trajectoire de long terme (équilibre de long terme) des variables concernées du modèle mais également mettre en évidence la dynamique de court terme. Enfin nous avons généralisé la notion d'agrégation dynamique utilisée par Aoki.

## BIBLIOGRAPHIE.

- AOKI Masanao (1990) "State Space Modeling of Time Series", 2nd edition, Springer Verlag. Heidelberg.
- AOKI Masanao (1988) "Cointegration, Error correction, and Aggregation in Dynamic Models: a comment" Oxford Bulletin of Economics and Statistics, vol 50, n°1, pp 89-95.
- AOKI Masanao (1987) "Studies of Economic Interdependence by State Space Modeling of Time Series U.S - Japan example" Annales d'Economie et de Statistique n°6/7, pp 225-252.
- BEVERIDGE, S and NELSON C.R.(1981) "A New Approach to Decomposition of Economic Time Series into Permanent and Transitory Components with particular attention to Measurement of the Business Cycle" Journal of Monetary Economic, Vol 7, pp 151-174.
- DAVIDSON J.E.H, HENDRY D, SRBA F, YEO S. (1978) "Econometric Modelling of Aggregate Time Series relationship between consumers expenditure and income in the United Kingdom" The Economic Journal, Vol 88, n° 352, pp 661-692.
- ENGLE R.F. and GRANGER C.W.S. (1987) "Cointegration and Error Correction Representation, Estimation and Testing" Econometrica, Vol 55, pp 251-276.
- GRANGER C.W.S. and WEISS (1983) "Time Series Analysis of Error Correcting Models" in Studies in Econometrics, Time Series and Multivariate Statistics, Academic Press, pp 225-278.
- GRANGER C.W.S (1981) "Some Properties of Time Series Data and their use in Econometric Model Specification" Journal of Econometrics, vol 16, pp 121-130.
- HARVEY A.(1990) "The Econometric Analysis of Time Series, 2nd edition, Philip Alan.
- HENDRY D. (1986) "Econometric Modelling with Cointegration Variables an over view", Oxford bulletin of Economics and Statistics, vol 48, pp 201-212.
- JOHANSEN S. (1988) "Statistical Analysis of Cointegration Vectors" Journal of Economic Dynamics and Control, vol 12, pp231-245.
- RATSIMALAHELO Z. (1994) "Théorie de Système et Séries Temporelles" Document de travail L.A.T.E.C. n°9401. (Juin).

SARGAN J.D. (1964) "Wages and Prices in the United Kingdom: a study in Econometric Methodology" in *Econometrics and Quantitative Economics* ed. D.F. Hendry and K.F. Wallis, Oxford, Basil Blackwell, 1984.

STOCK J.H. and WATSON M.W. (1988) "Testing for Common Trends", *Journal of The American Statistical Association*, vol 83, n°404, pp 1097-1107.