



**HAL**  
open science

# Arithmétique cantus, graphe de Syracuse, et preuve de la conjecture de Collatz

Nonvikan Karl-Augustt Alahassa

► **To cite this version:**

Nonvikan Karl-Augustt Alahassa. Arithmétique cantus, graphe de Syracuse, et preuve de la conjecture de Collatz. 2017. hal-01522391v2

**HAL Id: hal-01522391**

**<https://hal.science/hal-01522391v2>**

Preprint submitted on 13 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Arithmétique cantus, graphe de Syracuse, et  
preuve de la conjecture de Collatz*

Par N. Karl-Augustt ALAHASSA

Phd Candidate

Département de Mathématiques et de Statistique

Université de Montréal

## Résumé

The conjecture of Syracuse or Collatz's conjecture is an old conjecture relating to natural numbers. It was discovered by the German mathematician Lothar Collatz in 1930. Since then, many mathematicians have sought to explain why this conjecture is true, but today no one has yet arrived. We have provided a complete proof of this, thanks to a new arithmetic called *cantus arithmetic*. This arithmetic allowed us to prove the connexity of the Syracuse graph. By reconstructing the graph from a process Of generative deterministic branching, we have shown that we always reach to 1, with any number taken at the start.

## Introduction

La suite de Syracuse est définie pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_0 = N$  et :

$$\forall n, u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ impair} \end{cases} \quad (1)$$

La conjecture de Syracuse<sup>1</sup>, encore appelée conjecture de Collatz, conjecture d’Ulam, conjecture tchèque ou problème  $3x + 1$  est l’hypothèse mathématique selon laquelle la suite de Syracuse de n’importe quel entier strictement positif atteint 1. Ce qui est magique avec cette conjecture est sa simplicité apparente, et pourtant elle résiste depuis des siècles aux plus grands mathématiciens du monde ! Même les ordinateurs ont testé la conjecture, et ce sont arrêtés à  $10^{20}$ . Sa démonstration est recherchée car elle a plusieurs applications dont le jeu beanstalk d’Isbel, et l’interpréteur Fractran avec CaRMetal par exemple. En voici donc la preuve<sup>2</sup>, de quoi relaxer tous les matheux du siècle.

Nous avons introduit quelques notions de graphes et d’arithmétique, que nous avons appelées sous le nom d’*arithmétique cantus* basée sur la détermination du nombre cantus d’un nombre impair. Dans ce cadre, nous avons jugé utile de mettre l’accent sur quelques préliminaires sur les outils utilisés en théorie des graphes, avant d’exposer tout le développement des résultats nécessaires (définitions, propositions et lemmes) à l’édition de la preuve. La partie du document apportant la preuve définitive s’est inspirée des processus de branchement générationnels, à l’instar de celui de Galton-Watson, dans un cas purement déterministe<sup>3</sup> pour montrer qu’on revient toujours à 1.

Ce document introduit de nouveaux concepts nécessaires à l’aboutissement de la preuve complète. Il s’agit en l’occurrence de l’arithmétique cantus qui exploite le cantus d’un nombre impair, et la notion de spectre de parité d’un nombre à travers une application de  $\mathbb{N}$ . Nous commençons par mettre le lecteur dans le bain du sujet, en soulignant quelques travaux précédents ce travail, et disponibles dans la littérature, ensuite nous énonçons quelques définitions préliminaires au corps du développement de la preuve.

### 0.1 Une brève revue

Le problème demande si, à partir de tout entier positif, répéter la procédure indiquée par la suite 1 à plusieurs reprises finira par atteindre le nombre 1. Malgré son apparence simple, ce

---

1. D’après l’histoire, elle a été découverte par le mathématicien allemand Lothar Collatz en 1930. Par la suite, l’un des collègues de Collatz, Helmut Hasse, fit connaître la conjecture de Collatz, en particulier lors d’une conférence à l’université de Syracuse, ce qui explique que souvent la suite de Collatz soit appelée algorithme de Hasse ou de Syracuse, et la conjecture soit appelée conjecture de Syracuse.

2. La conjecture est vraie.

3. Nous n’avons utilisée aucune probabilité.

problème n'est pas résolu. Les généralisations du problème sont connues pour être indécidables, et le problème lui-même est extraordinairement difficile. Le livre *The Ultimate Challenge : The  $3x + 1$  Problem* édité par Jeffrey C. Lagarias rapporte ce qui est connu sur ce problème. Lagarias (1985) a de nombreuses publications associées au sujet, et tout lecteur davantage curieux pourra se référer à ses travaux. Ses travaux présentent une collection de documents, qui peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre. La question a fait aussi objet de nombreux séminaires, dont celui rapporté par ALLOUCHE (1979). Andaloro (2000) a aussi eu l'idée des graphes, qui sont des éléments clés d'analyse du problème. Nous allons prendre la même direction, mais avec de nouveaux concepts utiles à l'aboutissement de la preuve.

## 0.2 Préliminaires

Soit  $h$  l'application définie comme suit :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ k &\longmapsto (h_1(k), h_2(k)) \end{aligned}$$

avec :

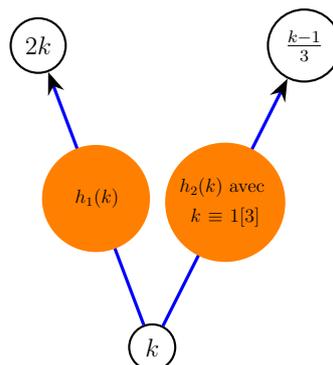
1. Si  $k \neq 1$  et  $k \equiv 1[3]$  (ou encore  $k$  peut se mettre sous la forme  $3p + 1$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ ), alors :

$$\begin{cases} h_1(k) = 2k \\ h_2(k) = \frac{k-1}{3} \end{cases}$$

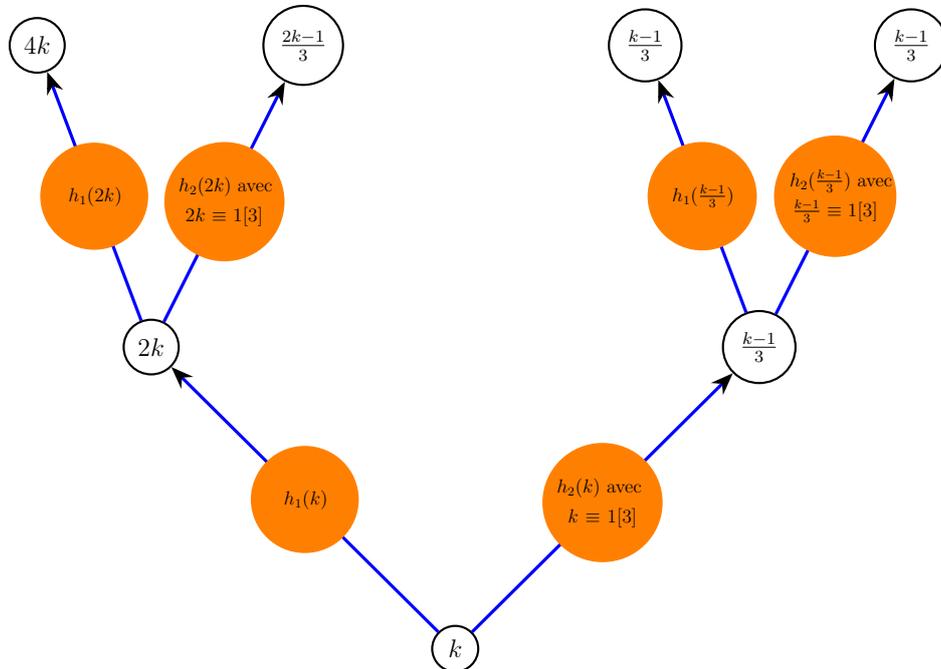
2. Sinon  $h_1(k) = h_2(k) = 2k$ .

*Remarque.* On peut voir dans la construction de  $h$  deux applications en jeu :  $h_1$  qui associe à tous les nombres leur double respectif, et  $h_2$  qui associe seulement à tout nombre de la famille  $3k + 1$ , le nombre  $k$  ( $k$  étant non nul). Les deux applications combinées nous donne  $h$ .  $h$  est une application injective. En effet, pour deux éléments  $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^*$  tels que  $h(x_1) = h(x_2)$ , on a aussi  $h_1(x_1) = h_1(x_2)$ , i.e  $2x_1 = 2x_2$ , et finalement  $x_1 = x_2$ . Par suite, si  $x_1 \equiv 1[3]$ , alors  $x_2 \equiv 1[3]$ , ce qui va bien avec l'implication que  $h_2(x_1) = h_2(x_2)$ .

*Note.* Vue comme un constructeur de graphe sur les nombres de  $\mathbb{N}^*$ , l'application  $h$  associe à tout nombre  $k$  son double  $2k$ , y compris le nombre  $\frac{k-1}{3}$ , si  $k$  est de la famille  $3p + 1$ , avec  $p \in \mathbb{N}$ .



Partant d'un nombre  $k_0$ , on peut donc construire un graphe noté  $G(k_0)$  en associant à chaque nombre, le/les nombres suggérés par son image par  $h$  : il s'agit de  $h_1(k)$  et  $h_2(k)$ . Bien sûr, dans le cas où  $k \not\equiv 1[3]$ , le nombre associé est unique  $h_1(k) = h_2(k) = 2k$ . Chacun des nombres obtenus, sera ensuite associé à ses images par  $h$  et ainsi de suite. Une continuité du graphe précédent ressemblerait donc à celui-ci :



### Vocabulaire

Pour l'ensemble des graphes du document, on désignera par *point*, tout noeud correspondant à un nombre de  $\mathbb{N}^*$ . La couleur jaune sur le graphe indique l'application ou le processus de passage d'un point  $A$  donné à un point  $B$  sur le graphe.

On définit aussi une application  $g$  pour tout  $k$  non nul par :

$$g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ pair} \\ 3k + 1 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

et sa trace notée  $\tilde{g}$  définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{g} : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ k &\longmapsto (\tilde{g}_1(k), \tilde{g}_2(k)) \end{aligned}$$

avec :

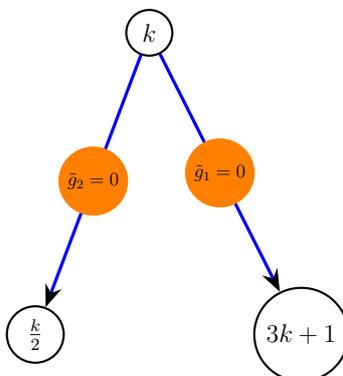
1. Si  $k$  pair , alors :

$$\begin{cases} \tilde{g}_1(k) = g_1(k) = \frac{k}{2} \\ \tilde{g}_2(k) = 0 \end{cases}$$

2. Si  $k$  impair

$$\begin{cases} \tilde{g}_1(k) = 0 \\ \tilde{g}_2(k) = g_2(k) = 3k + 1 \end{cases}$$

*Remarque.*  $g$  est une application surjective. Car, pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $g(2k) = k$ . De plus, on peut aussi voir  $g$  comme un constructeur de graphe sur les nombres de  $\mathbb{N}^*$  :



**Proposition 0.2.1.**  $g(k)$  est toujours pair lorsque  $k$  est impair.

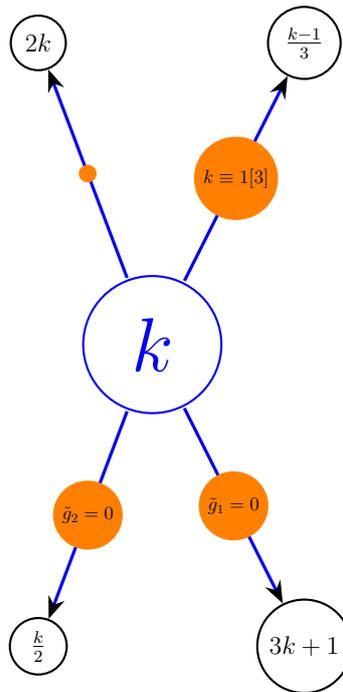
La preuve est évidente.

### 0.3 Le graphe de Syracuse $G_\Lambda$

**Définition 0.3.1.** L'application  $\Lambda = (h, g)$  définit un graphe infini unique sur  $\mathbb{N}^*$ , appelé *graphe de Syracuse*, et noté  $G_\Lambda$ . Ce graphe est construit de telle manière que pour un nombre  $k$ , on lui associe les nombres :

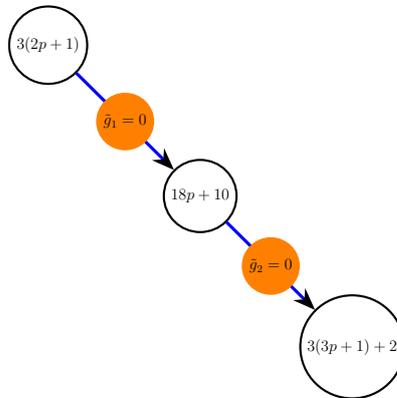
- $2k, \frac{k-1}{3}, \frac{k}{2}$  si  $k$  est pair et  $k \equiv 1[3]$  ;
- $2k, \frac{k-1}{3}, 3k + 1$  si  $k$  est impair et  $k \equiv 1[3]$  ;
- $2k, \frac{k}{2}$  si  $k$  est pair et  $k \not\equiv 1[3]$  ;
- $2k, 3k + 1$  si  $k$  est impair et  $k \not\equiv 1[3]$ .

Ensuite, pour chaque nombre obtenu dans chaque cas, on itère la même association.



### Exemples

1. On peut remarquer par exemple dans le graphe  $\Lambda$ , que tout nombre s'écrivant sous la forme  $z = 3n$ , avec  $n = 2p + 1$  (ainsi  $z = 3(2p + 1)$  est impair), est toujours connecté avec un nombre de la forme  $3(3p + 1) + 2$  (c'est à dire un nombre de la famille  $3k + 2$ ).



2. Tous les nombres de la classe  $3p + 1, p \in \mathbb{N}^*$  sont de degré 3 dans  $\Lambda$ .

On introduit à présent une notion utile aux calculs ultérieurs : celle du *cantus*<sup>4</sup> d'un nombre impair.

### 0.4 Le cantus d'un nombre impair

**Définition 0.4.1.** Soit  $k = 2k_1 + 1$  un nombre impair, avec  $k_1 \in \mathbb{N}^*$ . On définit l'algorithme *cantus* de cette forme :

4. En référence à la mélodie servant de base à une polyphonie.

$i = 1$  ;

**Si**  $k_1$  impair,  $k_1 = 2k_2 + 1$  ;  $i = 2$  ;

**Si**  $k_2$  impair,  $k_1 = 2k_3 + 1$  ;  $i = 3$  ;

*On répète jusqu'à ce qu'on obtienne finalement :*

$$k_{n-1} = 2k_n + 1 \text{ avec } k_n \text{ pair ; } i = n + 1 ;$$

avec  $k_n$  pouvant être égal à zéro (0).

$k_n$  est le nombre *cantus* de  $k$ , et est noté  $\Upsilon(k)$ . Son ordre (l'ordre de  $\Upsilon(k)$ ) est  $n$ . Il s'ensuit aussi que  $k$  admet une décomposition cantus unique de la forme :

$$D_n^k(k_n) = 2^n k_n + 2^{n-1} + \dots + 2^1 + 1 \quad (2)$$

Tous les nombres impairs admettent un cantus et **le cantus d'un nombre impair est pair**.  $\Upsilon(5) = 2$ , et son ordre est 1.  $\Upsilon(7) = 0$  et son ordre est 4. Une extension à cette définition est de classifier tous les nombres impairs ayant le même cantus, ou encore tous les nombres impairs dont le cantus est de même ordre<sup>5</sup>. Le cantus d'un nombre impair est utile aussi à la décomposition de tous les nombres de la forme  $3n + 2$ , avec  $n$  impair.

**Lemme 0.4.1.** *Tout nombre de la forme  $3n + 2$ , avec  $n$  impair admet une décomposition unique comme suit :*

$$D^{3n+2}(q) = 3 \times 2^j q + 3 \times 2^{j-1} + 3 \times 2^{j-2} + \dots + 3 \times 2^1 + 5$$

avec  $q = \Upsilon(n)$ , et  $j$  l'ordre de  $q$ .

**Preuve.** *La preuve découle de la définition du cantus de  $n$ , et peut se faire de deux manière : avec la décomposition cantus de  $n$  en utilisant la formule (2), ou bien faire recours à l'algorithme. Comme  $n$  est impair, il existe  $k_1 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n = 2k_1 + 1$ . Ensuite, on invoque l'algorithme cantus :*

1. *Si  $k_1$  est pair, alors  $j = 1$ , et  $\Upsilon(n) = k_1$ . Ainsi :*

$$3 \times 2^1 k_1 + 5$$

2. *Si  $k_1$  est impair avec  $k_1 = 2k_2 + 1$  et  $k_2$  pair, alors  $j = 2$ , et  $\Upsilon(n) = k_2$ . Ainsi :*

$$3 \times 2^2 k_2 + 3 \times 2^1 + 5$$

*On itère ainsi de suite, jusqu'à aboutir à la  $n$ -ième itération avec  $k_{n-1} = 2k_n + 1$  et  $k_n$  pair. Ainsi,  $j = 2$ ,  $\Upsilon(n) = k_2$ , et :*

---

5. Cela servirait d'introduction à un nouveau champ de l'arithmétique : les nombres *cantus*.

$$3 \times 2^j k_n + 3 \times 2^{j-1} + 3 \times 2^{j-2} + \dots + 3 \times 2^1 + 5$$

D'où le résultat.

## 0.5 Décomposition cantus incomplète

On introduit ici la notion de décomposition cantus incomplète.

**Définition 0.5.1.** On appellera décomposition cantus incomplète d'ordre  $n$  d'un nombre impair  $k$  toute décomposition de la forme :

$$D_n^k(k_n) = 2^n k_n + 2^{n-1} + \dots + 2^1 + 1 \quad (3)$$

avec  $k_n$  impair. On dira que  $k_n$  est le cantus incomplet d'ordre  $n$ .

*Remarque.* Pour une décomposition cantus d'ordre  $n$  pour le nombre impair  $k$  avec  $\Upsilon(k)$  pair, la décomposition est dite complète.

**Proposition 0.5.1.** *Tout nombre de la forme  $3n + 2$ , avec  $n$  impair ayant une décomposition cantus d'ordre  $j \leq 2$ , admet une décomposition cantus incomplète d'ordre  $j - 1$ .*

**Preuve.** *Partant du fait que le nombre  $3n + 2$  possède une décomposition cantus d'ordre  $j$ , elle est sous la forme :*

$$3 \times 2^j q + 3 \times 2^{j-1} + 3 \times 2^{j-2} + \dots + 3 \times 2^1 + 5$$

avec  $q = \Upsilon(n)$  pair, ( $j$  l'ordre de  $q$ ). Posons  $q_1 = 2q + 1$ .  $q = \frac{q_1 - 1}{2}$ . En remplaçant  $q$  par  $q_1$  dans la décomposition cantus de  $3n + 2$ , on obtient :

$$3 \times 2^{j-1} q_1 + 3 \times 2^{j-2} + 3 \times 2^{j-3} + \dots + 3 \times 2^1 + 5$$

Ce qui achève la preuve car  $q_1$  est impair.

**Proposition 0.5.2.** *Soit  $k$  un nombre impair admettant des décompositions cantus de la forme  $D_{n_1}^k(q_1)$  et  $D_{n_2}^k(q_2)$ , avec  $n_2 > n_1$ . Alors  $q_1$  admet une décomposition cantus de la forme  $D_{n_2 - n_1}^{q_1}(q_2)$ , et  $q_1$  est nécessairement impair.*

**Preuve.** *Comme  $k$  est le même nombre décomposé sous les deux formes  $D_{n_1}^k(q_1)$  et  $D_{n_2}^k(q_2)$ , alors :*

$$2^{n_1} q_1 + 2^{n_1-1} + \dots + 2^1 + 1 = 2^{n_2} q_2 + 2^{n_2-1} + \dots + 2^1 + 1$$

Si  $n_2 > n_1$ , alors :

$$2^{n_2}q_2 - 2^{n_1}q_1 + 2^{n_2-1} + 2^{n_2-2} + \dots + 2^{n_1} = 0 \quad (4)$$

$$2^{n_1}(2^{n_2-n_1}q_2 - q_1 + 2^{n_2-n_1-1} + 2^{n_2-n_1-2} + \dots + 1) = 0 \quad (5)$$

$$(6)$$

D'où le résultat :

$$q_1 = 2^{n_2-n_1}q_2 + 2^{n_2-n_1-1} + 2^{n_2-n_1-2} + \dots + 2^1 + 1 = D_{n_2-n_1}^{q_1}(q_2)$$

Ce qui justifie aussi que  $q_1$  est impair.

**Corollaire.** Si un nombre impair admet une décomposition cantus incomplète d'ordre  $j \geq 2$ , alors toute décomposition d'ordre inférieure  $j' < j$  est incomplète.

**Preuve.** Supposons qu'un nombre impair admette un cantus  $q_j$  obtenu avec une décomposition cantus incomplète d'ordre  $j \geq 2$ , et un cantus complet  $q_{j'}$  avec une décomposition cantus complète d'ordre  $j' < j$ . Le cantus d'ordre  $j'$  que nous notons  $q_{j'}$  est nécessairement pair, car sa décomposition est complète. Or, la proposition précédente montre que  $q_{j'} = D_{n_2-n_1}^{q_{j'}}(q_j)$ , et que  $q_{j'}$  est impair. On aboutit donc à une absurdité car  $q_{j'}$  ne peut être pair et impair à la fois puisque sa parité est déterminé et unique.

## 0.6 Notion de spectre de parité et de corpus

Nous allons à présent introduire une caractérisation utile de la fonction  $g$  définie plus haut à l'aide de la notion du *spectre de parité*. Notons  $g^{(i)} = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{i \text{ fois}}$ , où  $g^{(0)}$  représente la fonction identité. Pour cette partie, les nombres impairs considérés sont différents de 1, puisqu'on considère ce nombre comme ayant des propriétés connues.

**Définition 0.6.1.** On appelle *signal de parité* d'un nombre entier  $k$ , le nombre  $s_p(k)$  définie par :

$$s_p(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $s_p(0) = 0$ .

**Définition 0.6.2.** Soit  $\pi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  une application. On appelle *spectre de parité* de rang  $m$  d'un nombre entier  $k$  en  $\pi$ , le  $m$ -uplet défini par :

$$S_m(k|\pi) = (s_p(\pi^{(0)}(k)), s_p(\pi^{(1)}(k)), \dots, s_p(\pi^{(m)}(k)))$$

**Définition 0.6.3.** Soit  $\pi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  une application et  $D_j^k(q)$  la décomposition cantus d'un nombre impair  $k$ . On appelle *corpus* de  $k$  de rang  $l \leq 2j$  en  $\pi$  l'ensemble  $V_l^k(q|g)$  défini par :

$$V_l^k(q|\pi) = \{\pi^{(0)}(D(q)), \pi^{(1)}(D(q)), \dots, \pi^{(l)}(D(q))\}$$

Ces deux notions précédentes permettent de caractériser les images des nombres impairs par  $g$ .

**Proposition 0.6.1.** *Soit  $u_1$  et  $u_2$  deux nombres impairs de décomposition cantus  $D_j^{u_1}(p_j)$  et  $D_j^{u_2}(q_j)$  respectivement complète et incomplète et de même ordre  $j$ . Alors  $u_1$  et  $u_2$  ont le même spectre de parité de rang  $2j - 1$  en  $g$ , et :*

$$V_{2j}^{k_1}(q_2|g) = V_{2j}^{k_2}(q_2|g)$$

De plus,  $g^{(2j)}(u_1)$  peut s'écrire sous la forme  $ap_1 + b$ , avec  $a$  impair.

**Preuve.** *La preuve est en trois étapes :*

On choisit  $u_1 = 2p_1 + 1$  et  $u_2 = 2q_1 + 1$ , qui sont impairs vérifiant les hypothèses de la proposition, avec  $p_1, q_1 \in \mathbb{N}^*$ .

i) *Étape 1 : cas où  $j = 1$*



On sait que  $g^{(1)}(u_1) = 6p_1 + 4$ , avec un signal de parité (le signal de parité est introduit à la définition 0.6.1.)  $s_p(g^{(1)}(u_1)) = 0$ , ce qui fait que  $g^{(2)}(u_1) = 3p_1 + 2 = a_1p_1 + b_1$ , avec  $a_1 = 3$  (impair) et  $b_1 = 2$ .

Ainsi, le spectre de parité (le spectre de parité est introduit à la définition 0.6.2 : si  $j = 1$ , alors  $p_1$  est nécessairement pair, et  $s_p(g^{(2)}(u_1)) = 0$ ) d'ordre  $2j - 1$  de  $u_1$  serait donné par :

$$S_{2j-1}(u_1|g) = (1, 0) \quad (\text{comme } j = 1)$$

De plus, à propos du corpus (le corpus est introduit à la définition 0.6.3) de  $u_1$  de rang  $2j = 2$  (comme  $j=1$ ) en  $g$ , on a :

$$V_2^{u_1}(p_1|g) = \{2p_1 + 1, 6p_1 + 4, 3p_1 + 2\}$$

Puisque  $D(p_1) = 2p_1 + 1$  correspond à sa décomposition cantus si  $j = 1$ .

Ensuite, pour  $u_2$  :



On sait que  $g^{(1)}(u_2) = 6q_1 + 4$ , avec  $s_p(g^{(1)}(u_2)) = 0$ .

Ainsi, le spectre de parité d'ordre  $2j - 1$  de  $u_2$  serait donné par :

$$S_{2j-1}(u_2|g) = (1,0) \quad (\text{comme } j = 1)$$

De plus, à propos du corpus de  $u_2$  de rang  $2j = 2$  (comme  $j=1$ ) en  $g$ , on a :

$$V_2^{u_2}(q_1|g) = \{2q_1 + 1, 6q_1 + 4, 3q_1 + 2\}$$

Puisque  $D(q_1) = 2q_1 + 1$  correspond à sa décomposition (voir définition de la définition cantus incomplète 3.) cantus si  $j = 1$ .

Ainsi, on voit bien que :

$$S_{2j-1}(u_1|g) = S_{2j-1}(u_2|g)$$

et

$$V_2^{u_1}(q_1|g) = V_2^{u_2}(q_1|g)$$

ii) Etape 2 : cas où  $j = 2$

Maintenant si  $j = 2$ , la décomposition précédente pour  $u_1$  peut aller plus loin (elle devient incomplète), car la proposition (0.5.2), montre que tout cantus d'ordre inférieur ( $j' < j = 2$ ) est impair. Autrement dit,  $p_1$  ne peut être pair si  $j = 2$ . Par suite, il existe  $p_2 \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $p_1 = 2p_2 + 1$ , et  $q_1 = 2q_2 + 1$  (la décomposition de  $u_2$  d'ordre  $j$  était déjà supposée incomplète).



$g^{(3)}(u_1) = g(g^{(2)}(u_1)) = g(3p_1 + 2)$ . Puisque  $p_1$  est impair,  $3p_1 + 2$  est nécessairement impair (sinon 3 serait divisible par 2, ce qui impossible.) et  $s_p(g^{(2)}(u_1)) = 1$ . Par suite,

$$\begin{aligned} g^{(3)}(u_1) &= g(3p_1 + 2) \\ &= 3 \cdot (3p_1 + 2) + 1 \\ &= 9p_1 + 7 \\ &= 18p_2 + 16 \end{aligned}$$

$s_p(g^{(3)}(u_1)) = 0$ . Alors, le spectre de parité d'ordre  $2j - 1$  de  $u_1$  est donné par :

$$S_{2j-1}(u_1|g) = (1,0,1,0) \quad (\text{comme } j = 2)$$

De plus, puisque  $s_p(g^{(3)}(u_1)) = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} g^{(4)}(u_1) &= g(18p_2 + 16) \\ &= 9p_2 + 8 = a_2p_2 + b_2 \end{aligned}$$

avec  $a_2 = 9$  (impair) et  $b_2 = 8$ . Comme la décomposition cantus de  $u_1$  d'ordre 2 est complète et que  $p_2$  correspond automatiquement au cantus associé, on peut écrire :

$$D_2^{u_1}(p_2) = 2^2p_2 + 2^1 + 1$$

Ainsi, le corpus de  $u_1$  de rang  $2j = 4$  (comme  $j=2$ ) en  $g$  donne :

$$V_4^{u_1}(q_1|g) = \{4p_2 + 3, 12p_2 + 10, 6p_2 + 5, 18p_2 + 16, 9p_2 + 8\}$$

De même, avec  $u_2$  :



Avec  $u_2$ ,  $g^{(2)}(u_2) = 3q_1 + 2$ . Si  $j = 2$  avec une décomposition incomplète pour  $u_2$ ,  $q_1$  est nécessairement impair (on rappelle que on rappelle que la décomposition de  $u_2$  d'ordre  $j$  était déjà supposée incomplète au niveau des hypothèses de départ), et  $s_p(g^{(2)}(u_2)) = s_p(3q_1 + 2) = 1$ . Il existe  $q_2 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $q_1 = 2q_2 + 1$ .

Par suite,

$$\begin{aligned} g^{(3)}(u_1) &= g(3q_1 + 2) \\ &= 3 \cdot (3q_1 + 2) + 1 \\ &= 9q_1 + 7 \\ &= 18q_2 + 16 \end{aligned}$$

$s_p(g^{(3)}(u_2)) = 0$ . Alors, le spectre de parité d'ordre  $2j - 1$  de  $u_2$  est donné par :

$$S_{2j-1}(u_2|g) = (1,0,1,0) \quad (\text{comme } j = 2)$$

De plus, puisque  $s_p(g^{(3)}(u_2)) = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} g^{(4)}(u_1) &= g(18q_2 + 16) \\ &= 9q_2 + 8 \end{aligned}$$

Comme la décomposition cantus de  $u_2$  d'ordre 2 est incomplète et que  $q_2$  correspond automatiquement au cantus associé, on peut écrire :

$$D_2^{u_2}(q_2) = 2^2q_2 + 2^1 + 1$$

Ainsi, le corpus de  $u_2$  de rang  $2j = 4$  (comme  $j=2$ ) en  $g$  donne :

$$V_4^{u_2}(q_2|g) = \{4q_2 + 3, 12q_2 + 10, 6q_2 + 5, 18q_2 + 16, 9q_2 + 8\}$$

Ainsi, on voit bien que :

$$S_{2j-1}(u_1|g) = S_{2j-1}(u_2|g)$$

et

$$V_4^{u_1}(q_2|g) = V_4^{u_2}(q_2|g)$$

iii) Etape 3 : cas où  $j > 2$  est quelconque

Dans le cas où  $j$  est quelconque, nous allons supposer que le résultat à montrer est vrai jusqu'à un ordre  $2m < 2j$  (et il est noté  $R_m$ ), i.e que :

$$(R_m) : \begin{cases} R_{m::1} : & S_{2m-1}(u_1|g) = S_{2m-1}(u_2|g) = \underbrace{(1,0,1,0,\dots,1,0)}_{2m\text{-uplet}} \\ R_{m::2} : & V_{2m}^{u_1}(q_2|g) = V_{2m}^{u_2}(q_2|g) \\ R_{m::3} : & g^{(2m)}(u_1) = a_m p_m + b_m \end{cases}$$

avec<sup>6</sup>  $a_m$  (impair), et  $p_m$  le cantus d'ordre  $m$  pour  $u_1$ .

Nous allons prouver que  $R_{m+1}$  est vrai.



Etant donné que la décomposition cantus d'ordre  $j$  de  $u_1$  est complète, il faut noter qu'en appliquant la proposition 0.5.2, on sait que  $p_m$  est un cantus

6. Ici, le résultat  $R_m$  est composé de trois autres résultats  $R_{m::1}$ ,  $R_{m::2}$  et  $R_{m::3}$ .

incomplet, et donc impair. Ainsi,  $s_p(g^{(2m)}(u_1)) = 1$ , et par suite :

$$\begin{aligned} g^{(2m+1)}(u_1) &= g(g^{(2m)}(u_1)) \\ &= g(a_m p_m + b_m) \\ &= 3a_m p_m + 3b_m + 1 \end{aligned}$$

Comme indiqué par la proposition 0.2.1  $g(a_m p_m + b_m) = 3a_m p_m + 3b_m + 1$ , est pair. Ainsi,  $s_p(g^{(2m+1)}(u_1)) = s_p(3a_m p_m + 3b_m + 1) = 0$ .

$$S_{2(m+1)-1}(u_1|g) = \underbrace{(1,0,1,0,\dots,1,0)}_{2(m+1)\text{-uplet}}$$

Si, on pose  $p_m = 2p_{m+1} + 1$  avec  $p_{m+1}$  un entier non nul, on obtient  $3a_m p_m + 3b_m + 1 = 6a_m p_{m+1} + 3a_m + 3b_m + 1$ , et donc :

$$\begin{aligned} g^{(2m+2)}(u_1) &= g(g^{(2m+1)}(u_1)) \\ &= 3a_m p_{m+1} + \frac{1}{2}(3a_m + 3b_m + 1) \\ &= a_{m+1} p_{m+1} + b_{m+1} \end{aligned}$$

avec  $a_{m+1} = 3a_m$  impair (puisque  $a_m$  est impair), et  $b_{m+1} = \frac{1}{2}(3a_m + 3b_m + 1)$ .

On vient donc de prouver  $R_{(m+1)::3}$ . On peut remarquer entre autres que si particulièrement  $m + 1 = j$ , alors  $p_{m+1}$  est pair, et correspond au cantus complet d'ordre  $j$  pour  $u_1$ . Ensuite, pour  $u_2$  :



Comme nous avons supposé que (c'est notre hypothèse de récurrence)  $V_{2m}^{u_1}(q_2|g) = V_{2m}^{u_2}(q_2|g)$ , alors  $g^{(2m)}(u_2) = a_m q_m + b_m$ , avec  $a_m$  (impair), et  $q_m$  le cantus d'ordre  $m$ . De plus, étant donné que la décomposition d'ordre  $j$  de  $u_2$  est incomplète, il faut noter qu'en appliquant aussi la proposition 0.5.2, on trouve que  $q_m$  est un cantus incomplet, et donc impair. Ainsi,  $s_p(g^{(2m)}(u_2)) = 1$ , et par suite :

$$\begin{aligned} g^{(2m+1)}(u_2) &= g(g^{(2m)}(u_2)) \\ &= g(a_m q_m + b_m) \\ &= 3a_m q_m + 3b_m + 1 \end{aligned}$$

Comme indiqué par la proposition 0.2.1  $g(a_m q_m + b_m) = 3a_m q_m + 3b_m + 1$ , est pair. Ainsi,  $s_p(g^{(2m+1)}(u_2)) = s_p(3a_m q_m + 3b_m + 1) = 0$ .

$$S_{2(m+1)-1}(u_2|g) = \underbrace{(1,0,1,0,\dots,1,0)}_{2(m+1)\text{-uplet}}$$

Par conséquent  $R_{(m+1)::1}$  est vrai. Si, on pose  $q_m = 2q_{m+1} + 1$  avec  $q_{m+1}$  un entier non nul, on obtient  $3a_m q_m + 3b_m + 1 = 6a_m q_{m+1} + 3a_m + 3b_m + 1$ , et donc :

$$\begin{aligned} g^{(2m+2)}(u_2) &= g(g^{(2m+1)}(u_2)) \\ &= 3a_m q_{m+1} + \frac{1}{2}(3a_m + 3q_m + 1) \\ &= a_{m+1} q_{m+1} + b_{m+1} \end{aligned}$$

Finalemment, on obtient aussi que :

- (a) si  $p_m = q_m$ ,  $g^{(2m+1)}(u_1) = g^{(2m+1)}(u_2)$  ;
- (b) si  $p_{m+1} = q_{m+1}$ ,  $g^{(2m+2)}(u_1) = g^{(2m+2)}(u_2)$  ;

Sachant que notre hypothèse de récurrence dit que :

$$V_{2m}^{u_1}(q_2|g) = V_{2m}^{u_2}(q_2|g)$$

ceci confirme que le résultat  $R_{(m+1)::2}$  est vrai.

Ceci achève la preuve de la proposition 0.6.1 au complet.

Pour la suite, on s'intéresse au spectre de parité en  $g$  et au corpus des nombres impairs.

## 0.7 Caractérisation des noeuds de $G_\Lambda$ impairs

Rappelons que pour le nombre impair 1, il n'existe pas  $n_0 \mathbb{N}$  tel que  $g^{(n_0)}(1) < 1$ . Notre objectif est de chercher un tel entier pour tout autre nombre impair.

**Proposition 0.7.1.** Soit  $z \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$  un nombre impair de cantus complète  $\Upsilon_j(z) = q$  d'ordre  $j$ . Alors on a la propriété :

$$\mathcal{P}_j : g^{(2j+1)}(z) = 3^j \frac{q}{2} + 3^{j-1} + 3^{j-2} + \dots + 3^1 + 1$$

**Preuve.** La preuve est par récurrence :

1. Si  $j = 1$ , alors  $z = 2q + 1$ , avec  $q$  pair. Donc  $g^{(1)}(z) = 6q + 4$ ,  $g^{(2)}(z) = 3q + 2$ , puisque  $s(g^{(1)}(z)) = 0$ . Comme  $q$  est pair, on a par la suite  $g^{(3)}(z) = 3\frac{q}{2} + 1$ , et donc  $\mathcal{P}_j$  est vraie pour  $j = 1$ .
2. Si  $j = 1$ , alors  $z = 2^2q + 2 + 1$ , avec  $q$  pair. Donc  $g^{(1)}(z) = 12q + 10$ ,  $g^{(2)}(z) = 6q + 5$ , puisque  $s(g^{(1)}(z)) = 0$ . Comme  $s(g^{(2)}(z)) = 1$ , on a par la suite  $g^{(3)}(z) = 18q + 16$ , et  $g^{(4)}(z) = 3^2\frac{q}{2} + 3 + 1$ , et donc  $\mathcal{P}_j$  est vraie pour  $j = e$ .
3. Supposons maintenant que  $\mathcal{P}_j$  soit vraie : nous allons prouver que  $\mathcal{P}_{j+1}$  est vraie pour tous les nombres impairs de cantus d'ordre  $j + 1$ .

si l'ordre du cantus  $q$  de  $z$  est  $j + 1$ , alors  $z$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$2^{j+1}q + 2^j + \dots + 2^1 + 1$$

En posant  $q' = 2q + 1$ , on retrouve  $z$  avec une décomposition cantus incomplète de la forme :

$$2^{j+1}\frac{q' - 1}{2} + 2^j + \dots + 2^1 + 1 = 2^j q' + 2^{j-1} + \dots + 2^1 + 1$$

où  $q'$  est le cantus incomplet. A présent, nous allons mettre à profit la proposition 0.6.1. Si  $z'$  est un nombre impair de cantus  $q_{z'}$ , d'ordre  $j$ , on obtient (sachant que  $\mathcal{P}_j$  est vraie) :

$$g^{(2j+1)}(z') = 3^j \frac{q_{z'}}{2} + 3^{j-1} + 3^{j-2} + \dots + 3^1 + 1$$

La proposition 0.6.1 nous garantit que  $s(g^{(2j)}(z')) = 0$ , donc :

$$g^{(2j)}(z') = 3^j q_{z'} + 2 \times 3^{j-1} + 2 \times 3^{j-2} + \dots + 2 \times 3^1 + 2 \times 1$$

La même proposition nous dit que bien que la décomposition cantus de  $z$  soit incomplète à l'ordre  $j$  ( de cantus incomplet  $q'$  ),  $z'$  et  $z$  ont des corpus d'ordre  $2j$  de la même forme en leur cantus respectifs, d'où le fait que :

$$g^{(2j)}(z) = 3^j q' + 2 \times 3^{j-1} + 2 \times 3^{j-2} + \dots + 2 \times 3^1 + 2 \times 1$$

Cette dernière image étant impaire (elle est sous la forme  $3^j q' + 2a$  avec  $a$  non nul et  $q'$  impair), on a par la suite :

$$g^{(2j+1)}(z) = 3^{j+1} q' + 2 \times 3^j + 2 \times 3^{j-1} + \dots + 2 \times 3^1 + 2 \times 3 + 1$$

En remplaçant  $q'$  par sa valeur  $2q + 1$ , on retrouve :

$$g^{(2j+1)}(z) = 2 \times 3^{j+1} q + 2 \times 3^j + 2 \times 3^{j-1} + \dots + 2 \times 3^1 + 2 \times 3 + 1 + 3^{j+1}$$

Il faut remarquer par ailleurs que :

$$3^{j+1} = 3^j(2 + 1) = 2 \times 3^j + 3^j \quad (7)$$

$$= 2 \times 3^j + 2 \times 3^{j-1} + 3^{j-1} \quad (8)$$

$$= 2 \times 3^j + 2 \times 3^{j-1} + 2 \times 3^{j-2} + \dots + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 3 \quad (9)$$

Et donc :

$$3^{j+1} + 1 = 2 \times 3^j + 2 \times 3^{j-1} + 2 \times 3^{j-2} + \dots + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 4$$

Il s'ensuit que :

$$g^{(2j+1)}(z) = 2 \times 3^{j+1}q + 2 \times 3^j + 2 \times 3^{j-1} + \dots + 2 \times 3^1 + 2 \times 3 + 1 + 3^{j+1}$$

$$= 2 \times 3^{j+1}q + 4 \times 3^j + 4 \times 3^{j-1} + \dots + 4 \times 3^1 + 4 \times 3 + 4$$

d'où les expressions :

$$g^{(2j+2)}(z) = 3^{j+1}q + 2 \times 3^j + 2 \times 3^{j-1} + \dots + 2 \times 3^1 + 2 \times 3 + 2$$

$$g^{(2(j+1)+1)}(z) = 3^{j+1}\frac{q}{2} + 3^j + 3^{j-1} + \dots + 3^1 + 3 + 1$$

On vient de prouver que  $\mathcal{P}_{j+1}$  est aussi vraie. La preuve est achevée.

## 0.8 Autres propriétés utiles

Nous avons montré à la proposition 0.7.1 que si  $z \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$  un nombre impair de cantus complète  $\Upsilon_j(z) = q$  d'ordre  $j$ , alors on a la propriété :

$$\mathcal{P}_j : g^{(2j+1)}(z) = 3^j\frac{q}{2} + 3^{j-1} + 3^{j-2} + \dots + 3^1 + 1$$

Nous allons fournir quelques résultats supplémentaires nécessaires à caractériser l'image  $g^{(2j+1)}(z)$  de  $z$ .

On pose pour la suite  $b_j = 3^{j-1} + 3^{j-2} + \dots + 3^1 + 1$ . Dans cette expression,  $j$  représente l'ordre d'un cantus pour une décomposition donnée, ainsi  $j > 0$ .

**Lemme 0.8.1.** 1. Si  $j$  est pair, alors  $b_j$  est pair et  $\frac{b_j-1}{3}$  est impair ;

2. Si  $j$  est impair, alors  $b_j$  est impair et  $\frac{b_j-1}{3}$  est pair.

**Preuve.** 1. Supposons que  $j$  est pair.

Si  $j = 2$ ,  $b_j = 3^1 + 1 = 4$  (qui est pair), et  $\frac{b_j-1}{3} = 1$  est impair.

Si  $j = 4$ ,  $b_j = 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = 40$ , qui est aussi pair et  $\frac{b_j-1}{3} = 13$  est impair.

On considère pour la suite que  $j = 2\eta$  (nombre pair,  $\eta \geq 2$ ) et que  $b_{2\eta}$  est pair, avec  $\frac{b_{2\eta}-1}{3}$  impair. Nous allons prouver que  $b_{2\eta+2}$  est aussi pair, et que  $\frac{b_{2\eta+2}-1}{3}$  est impair.

Pour cela, il suffit de voir que :

$$b_{2\eta+2} = 3^{2\eta+1} + 3^{2\eta} + b_{2\eta}$$

Comme  $3^{2\eta+1} + 3^{2\eta} = 3^{2\eta}(3 + 1)$  est pair, et  $b_{2\eta}$  est supposé pair, on aboutit au fait que  $b_{2\eta+2}$  est pair. De plus,

$$\begin{aligned} \frac{b_{2\eta+2} - 1}{3} &= \frac{3^{2\eta+1} + 3^{2\eta} + b_{2\eta} - 1}{3} \\ &= 3^{2\eta} + 3^{2\eta-1} + \frac{b_{2\eta} - 1}{3} \\ &= 3^{2\eta-1}(3 + 1) + \frac{b_{2\eta} - 1}{3} \end{aligned}$$

$\frac{b_{2\eta+2}-1}{3}$  est donc impair comme somme d'un nombre pair et d'un nombre impair. Ce qui achève la preuve.

2. La preuve est analogue pour  $j$  impair.

Pour  $j = 1$ ,  $b_j = 1$  et  $\frac{b_j-1}{3} = 0$  est pair.

Pour  $j = 3$ ,  $b_j = 13$  et  $\frac{b_j-1}{3} = 4$  est pair.

Dans le même esprit, on pose  $j = 2\eta + 1$ , et on suppose que  $b_j$  est impair avec avec  $\frac{b_{2\eta+1}-1}{3}$  pair. Nous allons prouver que  $b_{2\eta+3}$  est impair et que  $\frac{b_{2\eta+3}-1}{3}$  pair. En effet :

$$b_{2\eta+3} = 3^{2\eta+2} + 3^{2\eta+1} + b_{2\eta+1}$$

Comme  $3^{2\eta+2} + 3^{2\eta+1} = 3^{2\eta+1}(3 + 1)$  est pair, et  $b_{2\eta+1}$  est supposé impair, on aboutit au fait que  $b_{2\eta+3}$  est impair (comme somme d'un nombre pair et d'un nombre impair). De plus :

$$\begin{aligned} \frac{b_{2\eta+3} - 1}{3} &= \frac{3^{2\eta+2} + 3^{2\eta+1} + b_{2\eta+1} - 1}{3} \\ &= 3^{2\eta+1} + 3^{2\eta} + \frac{b_{2\eta+1} - 1}{3} \\ &= 3^{2\eta}(3 + 1) + \frac{b_{2\eta+1} - 1}{3} \end{aligned}$$

$\frac{b_{2\eta+3}-1}{3}$  est donc pair comme somme de deux nombres pairs. Ce qui achève la preuve.

Sur le graphe  $G_\Lambda$ , le nombre  $g^{(2j+1)}(z)$ , comme on peut le voir, est connecté au nombre :

$$k = 3^{j-1} \frac{q}{2} + 3^{j-2} + 3^{j-3} + \dots + 3^1 + 1$$

puisque  $3k + 1 = g^{(2j+1)}(z)$ . Le lemme suivant prouve que  $k < z$ .

**Lemme 0.8.2.** *Soit  $z$  un nombre impair de cantus complet  $q$  d'ordre  $j$ . Alors,  $k$  est strictement plus petit que le nombre  $z$  avec  $k$  défini par :*

$$k = 3^{j-1} \frac{q}{2} + 3^{j-2} + 3^{j-3} + \dots + 3^1 + 1$$

**Preuve.** *Comme  $z$  est un nombre impair de cantus complet  $q$  d'ordre  $j$ , on sait que :*

$$z = 2^j q + 2^{j-1} + 2^{j-2} + \dots + 2 + 1$$

*La preuve est par récurrence :*

1. *Si  $j = 1$ , alors  $k = \frac{q}{2} < 2q + 1 = z$  ;*
2. *Si  $j = 2$ , alors  $k = 3\frac{q}{2} + 1 < 2^2 q + 2 + 1 = z$  ;*
3. *Supposons à présent que la propriété est vraie pour un nombre impair de cantus d'ordre  $j$ , et nous allons prouver que cela est vraie aussi pour un nombre impair de cantus d'ordre  $j + 1$ .*

*Si  $z$  est un nombre impair de cantus complet  $q$ , remarquons que pour un ordre  $j + 1$  de  $q$ ,  $k$  s'écrit :*

$$\begin{aligned} k &= 3^j \frac{q}{2} + 3^{j-1} + 3^{j-2} + \dots + 3^1 + 1 \\ &= 3^{j-1} \left( 3\frac{q}{2} + 1 \right) + 3^{j-2} + \dots + 3^1 + 1 \end{aligned}$$

*Comme l'hypothèse de récurrence le suggère :*

$$\begin{aligned} 3^{j-1} \left( 3\frac{q}{2} + 1 \right) + 3^{j-2} + \dots + 3^1 + 1 &< 2^j \left( 3\frac{q}{2} + 1 \right) + 2^{j-1} + 2^{j-2} + \dots + 2 + 1 \\ &= 3 \times 2^{j-1} q + 2^j + 2^{j-1} + 2^{j-2} + \dots + 2 + 1 \end{aligned}$$

*Etant donné que  $3 \times 2^{j-1} q \leq 4 \times 2^{j-1} q = 2^{j+1} q$ , on en conclut que :*

$$k < 2^{j+1} q + 2^j + 2^{j-1} + 2^{j-2} + \dots + 2 + 1$$

*D'où le résultat.*

## 0.9 Connexité du graphe $G_\Lambda$

**Proposition 0.9.1.** *Le graphe de Syracuse  $G_\Lambda$  est un graphe connexe.*

**Preuve.** *Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe deux points  $v_1$  et  $v_2$  de  $G_\Lambda$  qui soient isolés. Cela signifie que  $G_\Lambda$  admet au moins deux composantes distinctes et disjointes  $C_1$  et  $C_2$ , avec  $v_1 \in C_1$ . Traduit de façon plus simple, il n'existe aucun point de  $C_1$  qui soit connecté dans  $G_\Lambda$  à un point de  $C_2$ , de telle sorte qu'on puisse emprunter un chemin qui fait le pont entre les deux composantes en passant d'une arrête à l'autre.*

*N'oublions pas que les points de notre graphe de Syracuse sont des nombres et que  $\mathbb{N}^*$  est bien ordonné. On peut donc poser  $a_i = \min(C_i)$ , désignant la plus petite valeur de la composante  $C_i$ . Nous allons montrer justement que la seule valeur possible de  $a_1$  est 1.*

*Supposons maintenant que  $a_i \neq 1$ .*

- *Si le point  $a_i$  est pair, il est lié au point  $a_i/2$  (par définition du graphe  $G_\Lambda$ ) qui est nécessairement plus petit que  $a_i$ . On vient donc de trouver un élément  $z = a_i/2$  connecté à un élément de  $C_i$  (et donc à  $C_i$  lui-même), qui n'appartenait pas à  $C_i$  (puisque le plus petit élément de  $C_i$  est  $a_i$ ) car étant plus petit que  $a_i$ . Le point  $a_i/2$  étant à son tour connecté à  $C_i$ , il n'est pas possible que  $C_i$  admette deux minimums distincts. D'où l'absurdité, car  $a_i$  est supposé être le minimum des nombres de  $C_i$ .*
- *Si le point  $a_i$  est impair (et  $a_i \equiv 1[3]$ ), il est lié au point  $(a_i - 1)/3$  (par définition du graphe  $G_\Lambda$ ) qui est nécessairement plus petit que  $a_i$ . On vient de trouver un élément  $z = (a_i - 1)/3$  connecté à un élément de  $C_i$  (et donc à  $C_i$  lui-même), qui n'appartenait pas à  $C_i$  (puisque le plus petit élément de  $C_i$  est  $a_i$ ) car étant plus petit que  $a_i$ . Le point  $(a_i - 1)/3$  étant à son tour connecté à  $C_i$ , il n'est pas possible que  $C_i$  admette deux minimums distincts. D'où l'absurdité, car  $a_i$  est supposé être le minimum des nombres de  $C_i$ .*
- *Dans tous les cas, même si le point  $a_i$  est impair et  $a_i \not\equiv 1[3]$ , la proposition 0.7.1 nous garantit qu'il est lié au point  $z = g^{(2j+1)}(a_i)$ , où  $j$  est l'ordre du cantus de  $a_i$ , qui est à son tour connecté au nombre  $k$  défini par le lemme 0.8.2. Le lemme 0.8.2 justifie également que  $k$  est strictement plus petit que  $a_i$ . On vient de trouver un élément  $k$  connecté à  $a_i$  (et donc à  $C_i$  lui-même), qui n'appartenait pas à  $C_i$  (puisque le plus petit élément de  $C_i$  est  $a_i$ ) car étant plus petit que  $a_i$ . Le point  $k$  étant à son tour connecté à  $C_i$ , il n'est pas possible que  $C_i$  admette deux minimums distincts. D'où l'absurdité, car  $a_i$  est supposé être le minimum des nombres de  $C_i$ .*

*On vient de montrer que la seule valeur possible de  $a_i$  est 1, ce qui prouve que les deux composantes  $C_1$  et  $C_2$  sont connectées, ce qui est absurde au regard de notre hypothèse de départ : le graphe  $G_\Lambda$  est bien connexe.*

**Corollaire.** Tous les points de  $G_\Lambda$  sont au moins de degrés 2, et sont tous connectés, i.e, pour deux points quelconques  $v_1$  et  $v_2$  de  $G_\Lambda$ , il existe au moins un chemin allant de  $v_1$  à  $v_2$ .

**Preuve.** Ceci découle de la définition de  $G_\Lambda$  pour lequel un point quelconque  $v$  admet au moins deux voisins, et de la proposition 0.9.1 établissant la connexité du graphe.

## 0.10 Préliminaires à la construction pas à pas du graphe $G_\Lambda$

Dans un premier temps, nous allons montrer que la topologie de  $G_\Lambda$  est conservée si le graphe est généré uniquement par les applications  $h_1$  et  $h_2$  définies au début du document.

**Lemme 0.10.1.** *Toutes les arrêtes de  $G_\Lambda$  sont conservées si elles sont générées par les applications  $h_1$  et  $h_2$ .*

**Preuve.** Soit  $x_0$  un nombre de  $G_\Lambda$ .

1. Si  $x_0 = 2k$  est pair, on a  $g(x_0) = k$  qui équivaut à  $h_1(k) = x_0$  car l'application  $h_1 : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$  est surjective. Donc  $x_0$  conserve son noeud inférieur grâce à  $h_1$ . Evidemment, avec  $h_1(x_0)$  et  $h_2(x_0)$ ,  $x_0$  conserve ses noeuds supérieurs.
2. Si  $x_0$  est impair, on a  $g(x_0) = 3x_0 + 1 = x_1$  qui équivaut à  $h_2(x_1) = x_0$ , car l'application  $h_2 : 3\mathbb{N} + 1 \rightarrow 2\mathbb{N} + 1$  est surjective. Donc  $x_0$  conserve son noeud inférieur grâce à  $h_2$ . Evidemment, avec  $h_1(x_0)$  et  $h_2(x_0)$ ,  $x_0$  conserve ses noeuds supérieurs.

La preuve s'achève.

**Theorem 0.10.2.** *Le graphe  $G_\Lambda$  est engendré par les applications  $h_1$  et  $h_2$ .*

**Preuve.** Ceci découle du lemme 0.10.1. En effet, puisque la topologie du graphe est conservée si les arrêtes sont générées par  $h_1$  et  $h_2$ , le graphe étant connexe (voir proposition 0.9.1) et contenant tous les points de  $\mathbb{N}^*$ , tous les chemins liant deux points quelconques peuvent être vus comme créés à partir de ces deux applications uniquement.

**Theorem 0.10.3.** *Le graphe  $G_\Lambda$  est entièrement déterminé par les applications  $h_1$  et  $h_2$  et un nombre donné  $x_0$  non nul de  $\mathbb{N}$ .*

**Preuve.** En effet, partant d'un point  $x_0$ , il existe toujours un chemin le liant à chacun des autres points (c'est encore la connexité). Or, grâce au théorème 0.10.2, tous ses chemins sont entièrement déterminés par les applications  $h_1$  et  $h_2$ . Ce qui achève la preuve.

**Corollaire.** *En partant de 1, on peut reconstruire tout le graphe  $G_\Lambda$ .*

**Preuve.** Utiliser le théorème 0.10.3.

## 0.11 Construction du graphe de Syracuse à partir de 1

A présent, nous allons reconstruire tout le graphe à partir de 1, mais bien avant, nous allons classer tous les nombres à générer dans des classes.

**Définition 0.11.1.** On définit sur  $\mathbb{N}^*$  la classe  $\mathcal{C}(k)$  par l'ensemble des nombres de la forme  $2^p k$  avec  $k$  impair, et  $p \geq 0$ .  $k$  est appelé racine de la classe et correspond à son plus petit nombre. Autrement dit, tous les nombres de la classe  $\mathcal{C}(k)$  sont totalement ordonnés.

**Propriétés.** Pour  $k$  impair, la classe  $\mathcal{C}(k)$  constitue un sous-ensemble infini du graphe  $G_\Lambda$ , où tous nombres  $k$  et  $2k$  sont connectés.

**Exemple 0.11.1.** Voici des exemples de classes  $\mathcal{C}(k)$  :

$\mathcal{C}(1)$

$$1 \longleftrightarrow 2 \longleftrightarrow 2^2 \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow 2^8 \longleftrightarrow \dots$$

$\mathcal{C}(3)$

$$3 \longleftrightarrow 3 \times 2 \longleftrightarrow 3 \times 2^2 \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow 3 \times 2^8 \longleftrightarrow \dots$$

Ces classes ont des propriétés particulières que nous allons exploiter. D'abord, il faut remarquer que chaque classe contient un seul nombre impair, et tous les autres nombres sont pairs. En exploitant la proposition 0.2.1, on voit que si  $k$  est impair, alors  $z = 3k + 1$  est nécessairement pair. Pour un tel nombre  $z$ , on dira qu'il est le *tuteur* de  $k$ . A l'inverse, on peut montrer que si un nombre pair  $z$  est sous la forme  $3k + 1$  avec  $k$  non nul, alors  $k$  est nécessairement impair. La preuve est par l'absurde, car si  $k$  est pair,  $3k + 1$  est impair et donc  $z \neq 3k + 1$ , car  $z$  est pris au départ pair. On note pour la suite  $\mathcal{C}_3(k)$  le sous-ensemble des nombres pairs appartenant à la classe  $\mathcal{C}(k)$  et appartenant à la famille des nombres  $3p + 1$ ,  $p$  impair. Comme exemple,  $4 \in \mathcal{C}(1)$ , et c'est le seul nombre *tuteur* de 1.

Voici la construction étape par étape du graphe  $G_\Lambda$  à partir de 1 à la manière d'un processus de branchement générationnel<sup>7</sup> totalement déterministe dans notre cas.

1. On génère et on connecte dans un premier temps tous les nombres de la classe  $\mathcal{C}(1)$ . Pour n'importe quel nombre  $z \neq 4$  de cette classe appartenant au sous-ensemble  $\mathcal{C}_3(1)$ , il est tuteur d'un nombre impair unique  $k_z$  impair. On notera  $Imp(k)$  l'ensemble des nombres impairs dont les tuteurs sont dans  $\mathcal{C}_3(k)$ .

$Imp(k)$  ne contient que des nombres impairs, et est donc totalement ordonné. Particulièrement, pour la classe  $\mathcal{C}(1)$ , on considérera pour la suite que  $Imp(1)$  contient tous les nombres impairs ainsi définis, sauf 1 (1 est le point initial de notre graphe, ce n'est donc plus la peine de le re-générer à l'aide de 4 qui est le tuteur de 1).

On peut ordonner les éléments de  $Imp(1)$  du plus petit au plus grand :

$$k_{11}, k_{12}, k_{13}, \dots, k_{1n}, \dots$$

7. Cela fait allusion au processus générationnel de Galton-Watson.

et créer une arrête de connexion entre chacun d'eux et leurs tuteurs pairs. Ces nombres constituent les racines respectives des classes de nombres à générer à la deuxième étape.

2. La deuxième étape est de générer tous les nombres pairs des classes  $\mathcal{C}(k_{1i})$ , avec  $k_{1i} \in \text{Imp}(1)$ . Pour deux nombres pairs  $z_{i_1} \in \mathcal{C}(k_{1i_1})$  et  $z_{i_2} \in \mathcal{C}(k_{1i_2})$ , où  $\mathcal{C}(k_{1i_1})$  et  $\mathcal{C}(k_{1i_2})$  constituent deux classes distinctes, il est impossible que  $z_{i_1} = z_{i_2}$ . En effet, on aurait une des racines d'une des deux classes qui doit être paire dans le cas où  $z_{i_1} = z_{i_2}$ , ce qui est impossible, puisque chaque racine est impair par définition des classes  $\mathcal{C}(k)$ .

On considère maintenant pour la suite un élément pair  $z_i \in \mathcal{C}_3(k_{1i})$ , tout en considérant que  $\mathcal{C}_3(k_{1i})$  est non vide.  $z_i$  est le tuteur d'un élément  $k_{z_i} \in \text{Imp}(k_{1i})$ . La remarque **fondamentale** est que  $k_{z_i} \notin \text{Im}(1)$ .

La preuve est également par l'absurde. Si  $k_{z_i} \in \text{Im}(1)$ , alors il existe  $z_1 \in \mathcal{C}_3(1)$ , tel que  $z_1 = 3k_{z_i} + 1 = z_i$ . Or l'égalité  $z_1 = z_i$  est impossible, puisque les deux nombres appartiennent à deux classes distinctes. D'où le résultat.

3. Le graphe se développe donc comme un système générationnel déterministe. A la troisième étape, on crée de nouvelles classes de types  $\mathcal{C}(k)$  à partir des nombres impairs des ensembles  $\text{Imp}(k_{1i})$ , et on itère le processus indéfiniment. La remarque précédente s'étend à l'étape  $n$ , et se généralise. Autrement dit, si un nombre impair  $k_n$  a pour tuteur un nombre  $z_n$  pair généré à l'étape  $n$ , ce nombre impair n'était point généré à aucune autre des étapes précédentes à la  $n$ -ième, sinon il existerait deux tuteurs identiques appartenant à deux classes distinctes : ce qui est évidemment impossible.
4. La dernière étape est déterminée par le résultat suivant : *Si  $k$  est pair et non nul,  $3k + 1$  est impair supérieur ou égal à 2.* Il existe donc des tuteurs spéciaux qui sont impairs et pouvant s'écrire sous la forme  $z = 3k + 1$ , avec  $k$  pair non nul. Ce qui reste pour retrouver exactement la topologie (i.e toutes les arrêtes) du graphe  $G_\Lambda$  est de créer une arrête de connexion<sup>8</sup> entre tous les nombres pairs et leurs tuteurs impairs.

Ce dernier graphe que nous venons de créer, et où la classe  $\mathcal{C}(1)$  est la mère de toutes les classes  $\mathcal{C}(k)$  sera noté  $G(1)$ , et correspond exactement au graphe de Syracuse  $G_\Lambda$ . En voici la preuve dans les lignes suivantes.

## 0.12 Preuve de la conjecture

**Proposition 0.12.1.**

$$G_\Lambda = G(1)$$

**Preuve.** Pour  $z \in G(1)$  :

1. s'il est pair, il est lié à  $h_1(z) = 2z$  et  $g(z) = \frac{z}{2}$  puisqu'appartenant nécessairement à une des classes  $\mathcal{C}(k)$  dont la topologie est connue. s'il est de la famille  $3k + 1$ , il est le tuteur

---

8. Autrement dit, de connecter.

d'un nombre impair, et les deux nombres sont connectés par construction (i.e qu'il est connecté à son image par  $h_2$ ).

2. s'il est impair, il est lié à son tuteur  $g(3z + 1)$  par construction de  $G(1)$ . Puisqu'étant la racine de la classe  $\mathcal{C}(z)$ , il est lié à  $2z$ , s'il est de la famille  $3k + 1$ , il est le tuteur spécial d'un nombre pair, et les deux nombres sont connectés par construction (i.e qu'il est connecté à son image par  $h_2$ ).

Finalemment,  $G(1)$  est généré à l'aide des trois applications  $h_1, h_2$  et  $g$ .  $G(1)$  contient donc par construction tous les nombres de  $\mathbb{N}^*$  et est à égale au graphe connexe de Syracuse  $G_\Lambda$ .

La suite de Syracuse définie à la formule 1 procède simplement à retrouver la classe mère et le trajet est *unique* par construction de  $G(1)$ . On choisit un nombre  $z$  au hasard :

1. s'il est pair, alors il existe par construction du graphe de Syracuse une classe  $\mathcal{C}(k)$  qui le contient. la suite des transformations destinées à le diviser par 2 jusqu'à tomber sur un nombre impair nous conduira vers  $k$ , la racine de la classe. Or  $k$  admet un tuteur pair unique  $z_k$ , qui se retrouve dans une autre classe où  $z_k$  a été engendré. On finira par tomber sur la racine de cette classe, qui admet un autre tuteur unique. Et ainsi de suite, on revient à la classe mère de toutes les classes car on ne peut tomber sur un cycle comme le démontre la construction de  $G(1)$ .
2. s'il est impair, on retrouve son tuteur unique et ainsi de suite comme précédemment.

Ce qui achève la preuve de la conjecture puisqu'on tombera toujours sur la classe mère : la classe  $\mathcal{C}(1)$  qui a généré toute la population des nombres de  $\mathbb{N}^*$ . 1 est la racine unique de cette classe.

# Bibliographie

ALLOUCHE, J.-P. (1978-1979). Sur la conjecture de "syracuse-kakutani-collatz". *Seminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 8 :1–16.

Andaloro, P. J. (2000). The  $3x + 1$  problem and directed graphs. *Fibonacci Quarterly*, pages 43–54.

Lagarias, J. C. (1985). The  $3x + 1$  problem and its generalizations. *The American Mathematical Monthly*, 92(1) :3–23.