



HAL
open science

De l'Homo sapiens à Homo œconomicus (ou lorsque la satisfaction absolue tend vers l'espérance mathématique)

Léo Gerville-Réache

► **To cite this version:**

Léo Gerville-Réache. De l'Homo sapiens à Homo œconomicus (ou lorsque la satisfaction absolue tend vers l'espérance mathématique). 2017. hal-01522157

HAL Id: hal-01522157

<https://hal.science/hal-01522157>

Preprint submitted on 13 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

De l'Homo sapiens à Homo oeconomicus

ou lorsque la satisfaction absolue tend vers l'espérance mathématique

Léo Gerville-Réache - Univ. Bordeaux, CNRS, IMS, UMR 5218, 33405 Talence, France

Introduction

Le concept d'espérance morale est né en 1738 avec la tentative de résolution par Daniel Bernoulli du paradoxe de St Pétersbourg. L'idée est alors que le choix rationnel entre plusieurs situations risquées (des loteries), doit se fonder sur la maximisation de cette espérance morale, aujourd'hui connue sous le nom d'utilité espérée.

Il faut attendre alors 1944 pour que la proposition de Bernoulli soit la conséquence d'une axiomatique précise, pensée par John Von Neumann et Oskar Morgenstern (VN&M) et publiée dans leur livre « Theory of games and economic behavior ». La maximisation de l'utilité espérée trouve ainsi une démonstration mathématique incontournable. Pour autant, Maurice Allais refuse que la rationalité devant le risque soit dictée par l'utilité espérée. Il écrit en 1953 dans son article «Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Américaine » :

D'après le principe de Bernoulli, à tout gain g de probabilité p on peut faire correspondre un indicateur $B(g)$ tel que la valeur V d'une perspective aléatoire donnant des probabilités p_1, p_2, \dots, p_n de gagner des gains g_1, g_2, \dots, g_n soit donnée par la relation $B(V) = \sum_i p_i B(g_i)$. [...] On peut considérer que la thèse centrale des partisans de la formulation bernoullienne est que pour tout individu rationnel il existe nécessairement un index $B(g)$ tel que la valeur V de toute perspective aléatoire soit donnée par la relation

$$(7) \quad B(V) = \sum_i p_i B(g_i)$$

avec

$$(8) \quad \sum_i p_i = 1,$$

où les p_i sont les probabilités objectives. [...]

Notre thèse est que non seulement la formulation de Bernoulli ne peut, ni représenter convenablement le comportement de l'homme réel, ni permettre de déterminer la satisfaction absolue, mais que, même pour un homme rationnel, la dépendance entre la valeur V et les gains g est en général d'une forme beaucoup plus complexe:

$$(9) \quad \bar{s}(V) = f(g_1, g_2, \dots, g_n, p_1, p_2, \dots, p_n),$$

de sorte qu'en général il n'existe pas d'indicateur $B(g)$ satisfaisant à la formulation de Bernoulli.

Il est important de rappeler ici que Maurice Allais n'est pas le premier à avoir soulevé cette question fondamentale. A l'époque de Bernoulli, Jean le Rond d'Alembert, connu pour ses doutes sur le calcul des probabilités, remettait déjà en question le bien-fondé de l'espérance morale. Il écrivait :

Je voyais bien que l'espérance était d'autant plus grande ;

1° que la somme espérée était plus grande ;

2° que la probabilité de gagner l'était aussi.

Mais je ne voyais pas alors avec la même évidence, et je ne le vois pas encore,

1° que la probabilité soit estimée exactement par les méthodes usitées ;

2° que quand elle le serait, l'espérance doit être proportionnelle à cette probabilité simple, plutôt qu'à une puissance ou même à une fonction de cette probabilité ;

3° que quand il y aurait plusieurs combinaisons qui donnent différents avantages ou différents risques (qu'on regarde comme des avantages négatifs) il faille se contenter d'ajouter finalement ensemble toutes les espérances pour avoir l'espérance totale.

La position de D'Alembert est donc la suivante. Soit on remet en cause le calcul des probabilités (et on peut par exemple se référer alors à ses réflexions sur les probabilités suites mêlées et non-mêlées), soit on accepte ces calculs mais alors, on doit moduler l'influence de ces probabilités via une fonction (qui reste à déterminer). Et enfin, lorsque la loterie comporte de multiples gains, il pose la question de la linéarité de l'espérance morale. Et dans tous les cas, la maximisation de cette espérance morale ne peut être en toute généralité le critère ultime de la décision rationnelle.

L'expérience d'Allais

Afin de démontrer que la théorie de « l'école américaine », justifiant mathématiquement la position de Daniel Bernoulli, ne décrit pas le comportement de tous les individus rationnels, Maurice Allais expérimente auprès de différents publics, un ensemble de situations basées sur des choix entre loteries. En 1953, il publie un premier article dans le journal de la société statistique de Paris sous le titre : *La psychologie de l'homme rationnel devant le risque : la théorie et l'expérience*. C'est avec cette expérience que Maurice Allais met en exergue un paradoxe publié dans la revue *Econometrica*, la même année et basé sur les réponses aux questions n°35 et n°36 suivantes :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|--|---|--|---|--------------------------------------|---|-----|
| 35. Préférez-vous la situation A à la situation B? | | | | | | | | | |
| Situation A : | Certitude de recevoir 100 millions. . . | | | | | | | | |
| Situation B : | <table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td>10 chances sur 100 de gagner 500 millions.</td> </tr> <tr> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td>89 chances sur 100 de gagner 100 millions.</td> </tr> <tr> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td>1 chance sur 100 de ne rien gagner .</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td style="border-top: 1px solid black;">100</td> </tr> </table> | } | 10 chances sur 100 de gagner 500 millions. | } | 89 chances sur 100 de gagner 100 millions. | } | 1 chance sur 100 de ne rien gagner . | } | 100 |
| } | 10 chances sur 100 de gagner 500 millions. | | | | | | | | |
| } | 89 chances sur 100 de gagner 100 millions. | | | | | | | | |
| } | 1 chance sur 100 de ne rien gagner . | | | | | | | | |
| } | 100 | | | | | | | | |
| 36. Préférez-vous la situation C à la situation D? | | | | | | | | | |
| Situation C : | <table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td>11 chances sur 100 de gagner 100 millions.</td> </tr> <tr> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td>89 chances sur 100 de ne rien gagner. .</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td style="border-top: 1px solid black;">100</td> </tr> </table> | } | 11 chances sur 100 de gagner 100 millions. | } | 89 chances sur 100 de ne rien gagner. . | } | 100 | | |
| } | 11 chances sur 100 de gagner 100 millions. | | | | | | | | |
| } | 89 chances sur 100 de ne rien gagner. . | | | | | | | | |
| } | 100 | | | | | | | | |
| Situation D : | <table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td>10 chances sur 100 de gagner 500 millions.</td> </tr> <tr> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td>90 chances sur 100 de ne rien gagner. .</td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</td> <td style="border-top: 1px solid black;">100</td> </tr> </table> | } | 10 chances sur 100 de gagner 500 millions. | } | 90 chances sur 100 de ne rien gagner. . | } | 100 | | |
| } | 10 chances sur 100 de gagner 500 millions. | | | | | | | | |
| } | 90 chances sur 100 de ne rien gagner. . | | | | | | | | |
| } | 100 | | | | | | | | |

Les répondants affichant leur préférence pour la loterie A par rapport à B préfèrent majoritairement la loterie D à la C. Pourtant, aucune utilité espérée ne peut justifier cette double préférence. En effet, en supposant par exemple une utilité linéaire comme la fonction identité, les espérances mathématiques des quatre loteries étant respectivement de 100 ; 139 et 11 ; 50 et il est clair que $E(A) < E(B)$ et $E(D) > E(C)$. Maurice Allais précisait que lui-même préférait A à B et D à C et ne se considérait pas comme irrationnel. Aussi, la théorie de l'utilité espérée, en construction depuis Daniel Bernoulli et axiomatisée dès 1944 par VN&M ne serait pas une théorie des préférences de l'individu rationnel devant le risque.

La fin de la théorie de VN&M ?

Il semble clair que toutes choses égales par ailleurs, la réflexion théorique et le contre-exemple expérimental de Maurice Allais signerait la fin de la théorie de l'école américaine (très majoritaire à l'époque et encore aujourd'hui). Mais, ce serait oublier que l'expérience d'Allais était précédée de consignes très précises dont l'une d'entre elles est loin d'être anecdotique:

Chaque question correspond à une offre qui ne se présente à vous qu'une seule fois et qui très probablement ne se représentera jamais à nouveau. Cette hypothèse est absolument essentielle.

Il s'agit donc de répondre aux questions sans faire référence à la répétition possible de l'offre, en nombre fini ou infini. Mais, de leur côté, VN&M construisent leur axiomatique sur ce qu'ils appellent des probabilités objectives dont ils précisent le sens :

« Probability has often been visualized as a subjective concept more or less in the nature of an estimation. Since we propose to use it in constructing an individual, numerical estimation of utility, the above view of probability would not serve our purpose. The simplest procedure is, therefore, to insist upon the alternative, perfectly well founded interpretation of probability as frequency in long runs. »

On pourrait discuter de l'affirmation «*perfectly well founded*» mais il est clair que la théorie de l'utilité espérée est fondée sur une conception fréquentielle de la probabilité et la répétition de la situation. Avec cette conception, l'espérance mathématique s'interprète précisément en termes de moyenne à long terme (là-même où s'applique la loi des grands nombres).

Il y a donc une différence de paradigme entre l'expérience d'Allais et la théorie de VN&M. L'un supposant que la situation est unique et les autres qu'elle est par principe répétable un grand nombre de fois. Et cette différence est essentielle. Le livre de VN&M : « Théorie des jeux et du comportement économique » traite de « l'agent économique rationnel ». Son but est donc de théoriser le comportement de celui que l'on nomme « l'Homo œconomicus ». Or, en économie, on traite d'échange, de commerce et fondamentalement de situation qui sont amenées à se reproduire un nombre indéfini de fois. Aussi, l'Homo œconomicus se doit de raisonner, en toute généralité, en supposant que la situation (ou le jeu) se présentera un grand nombre de fois. De ce fait, les probabilités sont supposées objectives et l'utilité espérée sera un gain qui se produira effectivement en moyenne (via les propriétés de loi des grands nombres). En l'état, l'interprétation des probabilités et de l'utilité espérée semble parfaitement cohérente avec le sujet que traite précisément VN&M.

La thèse de Maurice Allais est plus générale et questionne en réalité l'hypothèse que tout individu rationnel (tout Homo sapiens), c'est-à-dire qui cherche à maximiser sa satisfaction absolue, devrait nécessairement maximiser son utilité espérée. La question est essentielle car l'Homo sapiens n'a aucune raison de ne considérer que le cas où la situation risquée se présenterait un grand nombre de fois. En particulier nous devons nous interroger sur le choix rationnel dans une situation risquée unique. Mais pour autant, l'approche de Maurice Allais incarnée par son expérience permettait-elle de contester la théorie des jeux et du comportement économique de VN&M ? En l'état, la réponse est négative. Cette expérience montre essentiellement que la théorie de VN&M ne modélise pas l'Homme rationnel devant un risque qui ne se présenterait qu'une fois. Et cela, même si les risques présentés dans le questionnaire sont des probabilités objectives.

La question est alors de comprendre si nous devons, en toute généralité, raisonner comme si les choses devaient se présenter une unique fois ou un grand nombre de fois. Cette question est très délicate et de notre point de vue, sans réponse. En ignorant combien de fois la situation pourrait se présenter, il appartient à chaque individu de choisir sa référence. Cependant nous retiendrons que l'Homo œconomicus est supposé, en toute généralité, faire référence à une répétition en grand nombre.

Conciliation

La différence de paradigme entre les approches de VN&M et Allais n'est pas incompatible. Il est possible de mettre en relation l'Homo sapiens et l'Homo œconomicus. Pour cela, partons de la formulation très générale d'Allais :

$$\bar{s}_{HS}(V) = f(\mathbf{g}, \mathbf{p}) = f(g_1, g_2, \dots, g_k, p_1, p_2, \dots, p_k).$$

Daniel Kahneman et Amos Tversky dans leur article de 1979 « Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk », propose une déformation psychologique des probabilités objectives qui permet de traduire l'aversion au risque ou encore l'asymétrie des probabilités selon qu'il s'agisse d'un gain ou d'une perte. En revanche, les auteurs ne prennent pas en compte l'ensemble des gains de la loterie pour définir chaque probabilité psychologique et ne tiennent pas compte du nombre de répétitions de

la situation. De ce qui a été énoncé avant, il semble que l'on puisse préciser la satisfaction absolue d'un Homo sapiens ainsi :

$$\bar{s}_{HS}(V) = \sum_i \bar{p}_{i_{HS}}(\mathbf{g}, \mathbf{p}, n) \times \bar{s}_{HS}(g_i).$$

Où n est nombre de répétitions.

Aussi, les probabilités psychologiques d'un individu rationnel, les $\bar{p}_{i_{HS}}(\mathbf{g}, \mathbf{p}, n)$, ne sont pas nécessairement les probabilités objectives. En revanche elles en dépendent fondamentalement. Et cette dépendance ne peut se soustraire à la propriété suivante :

$$(1) \quad \text{Quelle que soit } p_i > 0, \quad |\bar{p}_{i_{HS}}(\mathbf{g}, \mathbf{p}, n) - p_i| < |\bar{p}_{i_{HS}}(\mathbf{g}, \mathbf{p}, n+1) - p_i|.$$

La relation (1) signifie que, quel que soit l'ensemble fini des probabilités et des gains, l'écart entre la probabilité psychologique et la probabilité objective pour un nombre $n+1$ de répétitions doit être inférieure à l'écart entre la probabilité subjective et la probabilité objective pour un nombre n de répétitions. Il s'ensuit que

$$(2) \quad \text{Quelle que soit } p_i > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}_{i_{HS}}(\mathbf{g}, \mathbf{p}, n) = p_i.$$

La relation (2) signifie que lorsque le nombre de répétitions du jeu tend vers l'infini, la probabilité psychologique ne peut diverger de la probabilité objective.

Il en résulte que :

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{s}_{HS}(V) = \sum_i p_i \times \bar{s}_{HS}(g_i)$$

On reconnaît sans difficulté dans la relation (3), l'utilité espérée de VN&M. Aussi, l'Homo sapiens, maximiseur rationnel se doit de maximiser son utilité espérée lorsque le nombre de répétitions tend vers l'infini.

De son côté, l'Homo œconomicus, se doit de maximiser :

$$(4) \quad \bar{s}_{HE}(V) = \sum_i p_i \times \bar{s}_{HE}(g_i)$$

On peut noter que l'Homo sapiens asymptotique (c'est-à-dire l'Homo œconomicus) se doit également d'être neutre au risque. Cette remarque peut sembler anodine mais en réalité elle pose la question de la pertinence des concepts d'Homo œconomicus risquophile ou risquophobe. En effet, un tel agent économique serait par définition irrationnel. On peut même se demander dans quelle mesure en se plaçant dans une optique de nombreuses répétitions de la situation et en l'absence d'information complémentaire, l'Homo œconomicus devrait avoir une fonction d'utilité non-linéaire. Aussi, on peut même se poser la question de la pertinence théorique de supposer une fonction d'utilité non-linéaire.

Aussi, il semble que l'on puisse résumer la relation entre la satisfaction absolue d'un Homo sapiens et celle de l'Homo œconomicus comme suit :

Afin de me résumer, sous l'hypothèse d'égalité des fonctions d'utilités, on a :

$$(5) \quad \bar{s}_{HS}(V) = \bar{s}_{HE}(V) + \epsilon_{HS_n}(V) = \sum_i p_i \times g_i + \epsilon_{HS_n}(V)$$

$$\text{Avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_{HS_n}(V) = 0 \text{ et } \epsilon_{HS_{n+1}}(V) - \epsilon_{HS_n}(V) < 0$$

Exemple

On propose de choisir entre les deux loteries suivantes :

A : gagner 100

B : gagner 300 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et 0 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

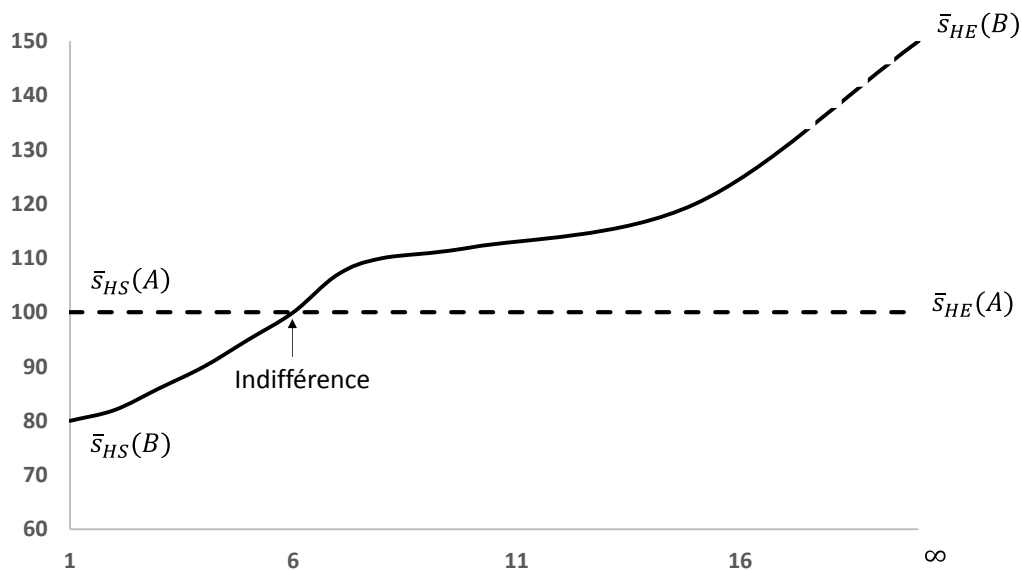
Il est clair qu'un Homo œconomicus, dont la fonction d'utilité serait (ou devrait être) l'identité ($\bar{s}(g) = g$) préférera la loterie B puisque :

$$\bar{s}_{HE}(B) = 150 > \bar{s}_{HE}(A) = 100.$$

Supposons que notre Homo sapiens ait les satisfactions absolues (qui lui sont personnelles) suivantes :

$$\bar{s}_{HS}(A) = 100 \quad \text{et} \quad \bar{s}_{HS}(B) = 80.$$

Ce que nous dit la relation (5) est représentée dans le graphique suivant :



Cet Homo sapiens a des probabilités psychologiques qui lui sont propres et qu'il ne nous appartient pas de juger. Son point d'indifférence, c'est-à-dire le nombre approximatif de répétitions de la situation qui rend égale les satisfactions absolues des deux propositions, est ici pour 6 répétitions. Asymptotiquement, sa satisfaction absolue coïncide avec celle de l'Homo œconomicus et il doit donc rationnellement se comporter comme tel.

Dans l'ensemble des Homo sapiens, les probabilités psychologiques peuvent différer et il peut exister un grand nombre de rationalités différentes. En revanche, lorsque le nombre de répétitions du jeu augmente, quel que soit cet Homo sapiens, il doit se comporter de plus en plus comme l'Homo œconomicus de même fonction d'utilité.

Il est important de préciser qu'il s'agit ici de préférences et non de stratégies dans un jeu séquentiel. Pour être clair, si l'on propose cette loterie 10 fois, et que l'on a la possibilité au fur et à mesure des répétitions du jeu, de prendre en compte les résultats des loteries précédentes, la situation est très différente. Par exemple, un Homo sapiens pourrait commencer par choisir A cinq fois puis B une fois et en fonction du résultat de B, poursuivre avec B ou revenir sur A... Mais c'est un autre problème qui nous rappelle le Dilemme du prisonnier où en fonction du nombre de répétitions connues ou inconnues du jeu, le comportement rationnel peut s'avérer différent de celui d'un jeu unique.

Expérimentation

Ce propos sur la controverse entre d'Allais et VN&M ne pouvait se terminer sans petite expérience. En effet, l'Homo sapiens est un maximiseur, au même titre que l'Homo œconomicus. Il doit donc rester cohérent face à son objectif de maximisation de sa satisfaction absolue. Aussi, à la fin d'un examen de première année universitaire, deux questions en temps limité ont été posées aux 234 étudiants présents. Ces étudiants ont une formation généraliste en sciences humaines et sociales et également en sciences du vivant mais aucune compétence spécifique en théorie de jeux, probabilité ou statistique.

L'objectif de ces deux questions est de voir dans quelle mesure le choix entre deux loteries dépend du nombre de répétitions hypothétiques du jeu.

Voici la diapositive soumise sans autre consigne :

| |
|---|
| <p>Voici une offre qui ne se présente à vous qu'une seule fois et qui très probablement ne se représentera jamais à nouveau.</p> <p>Que préférez-vous? (Ici, il n'y a pas de bonne ou de mauvaise réponse.)</p> <p>a) Recevoir 1 000 euros.</p> <p>b) Avoir 2 chances sur 10 de recevoir 10 000 euros et 8 chances sur 10 de ne rien recevoir.</p> <p>Voici une offre qui se présentera de nombreuses fois.</p> <p>Que préférez-vous? (Ici, il n'y a pas de bonne ou de mauvaise réponse.)</p> <p>c) Recevoir 1 000 euros.</p> <p>d) Avoir 2 chances sur 10 de recevoir 10 000 euros et 8 chances sur 10 de ne rien recevoir.</p> |
|---|

On comprend bien que la réponse (b ; c), traduit un problème de rationalité. En effet, quelle rationalité peut-on trouver chez un individu qui risque 1000 euros au profit d'une loterie d'espérance de 2000 euros lorsque le choix ne sera proposé qu'une fois et ne risque pas 1000 euros lorsque la situation se présenterait un grand nombre de fois. Il semble bien que cet individu ait une attitude incohérente, se fondant d'une part, sur la maximisation de l'espérance de gain lorsque la situation ne se présente qu'une fois et d'autre part sur la certitude du gain (bien que moindre) lorsque la loi des grands nombres est à l'œuvre. Sur les 222 étudiants répondants, on obtient les résultats suivants :

| Résultats | C | D |
|-----------|----|-----|
| A | 47 | 117 |
| B | 37 | 21 |

Plus de la moitié des répondants (117/222) préfère le gain certain dans une loterie unique mais préfère une espérance de gain maximale si la loterie devait se répéter un grand nombre de fois. Ces étudiants, clairement risquophobes ne présentent aucun défaut de rationalité. En ajoutant les 21 étudiants qui ont choisi, dans les deux situations, la loterie qui maximise l'espérance de gain, c'est près de deux tiers des étudiants dont la rationalité n'est pas mise en cause. En revanche, la rationalité des 84 étudiants ayant refusé la maximisation de l'espérance de gain pour la situation répétée est mise en défaut.

A contrario, si l'on refuse de différencier théoriquement la situation unique de la situation répétée un grand nombre de fois, ce sont alors les 154 étudiants (117+37) qui seraient frappés d'irrationalité.

Conclusion

Les approches de Maurice Allais et de John Von Neumann & Oskar Morgenstern ne sont pas contradictoires. Fondées sur un paradigme différent, celui de la répétition ou non de la situation, la conciliation semble possible. L'Homo œconomicus doit baser sa rationalité sur la maximisation de l'espérance de gain parce qu'il raisonne à horizon infini. L'Homo sapiens, dont la rationalité peut dépendre rationnellement du nombre de répétitions du jeu, est plus complexe. Mais en tout état de cause, la satisfaction absolue de l'Homo sapiens doit converger vers l'espérance mathématique.

Bibliographie

[1] Allais M. (1953) *La psychologie de l'homme rationnel devant le risque : la théorie et l'expérience*. Journal de la société statistique de Paris, 94, pp. 47-73.

[2] Allais M. (1953) *Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine*, *Econometrica*, Vol. 21, No. 4 (Oct., 1953), pp. 503-546.

[3] Mongin P. (2014) *Le paradoxe d'Allais. Comment lui rendre sa signification perdue ?*, *Revue Economique*, 65, pp. 743-779.

[4] Kahneman D. and Tversky A. (1979) *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk*, *Econometrica*, Vol. 47, No. 2 (Mar., 1979), pp. 263-292

[5] Von Neumann J. and Morgenstern O. (1947), *Theory of Games and Economic Behavior*, 2ème édition, *Princeton University Press*.