



**HAL**  
open science

## Passage du modèle d'endommagement Thick Level Set au modèle de zone cohésive et vice versa : cas unidimensionnel

Nicolas Moes, Claude Stolz, Andres Parrilla-Gomez

### ► To cite this version:

Nicolas Moes, Claude Stolz, Andres Parrilla-Gomez. Passage du modèle d'endommagement Thick Level Set au modèle de zone cohésive et vice versa : cas unidimensionnel. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01517311

**HAL Id: hal-01517311**

**<https://hal.science/hal-01517311>**

Submitted on 3 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

## Passage du modèle d'endommagement Thick Level Set (TLS) au modèle de zone cohésive et vice versa : cas unidimensionnel

N. Moës<sup>1</sup>, C. Stolz<sup>1,2</sup>, A. Parrilla-Gomez<sup>1</sup>

<sup>1</sup> GeM, UMR CNRS 6183, Ecole Centrale Nantes, {nicolas.moes,claud.stolz,andres.parrilla-gomez}@ec-nantes.fr

<sup>2</sup> Lamsid, UMR CNRS 2832, EDF-CEA

**Résumé** — On considère un modèle d'endommagement local avec une chute de la contrainte dès que l'endommagement apparaît. Ce modèle local est régularisé par l'approche level set épaisse [1, 2]. Ce modèle fait intervenir une longueur  $l_c$  et un profil d'endommagement. On s'intéresse dans le cas unidimensionnel au modèle cohésif équivalent. On montre que pour un modèle cohésif (extrinsèque) donné, on peut trouver un modèle d'endommagement TLS donnant la même réponse et ce quel que soit la longueur  $l_c$ .

**Mots clés** — endommagement, modèle cohésif, TLS, Thick Level Set

### 1 Motivations

Le modèle d'endommagement basé sur des level set épaisses (TLS) a été introduit dans le papier [1] and [2] comme une nouvelle manière de délocaliser l'endommagement. Ce modèle est plus riche qu'un modèle cohésif car il permet de prédire le chemin que va suivre la fissure et peut gérer des chemins de fissurations très complexes (coalescence et branchement). La relation entre modèle d'endommagement à gradient et modèle cohésif a déjà été étudiée par différents auteurs [3, 4]. La nouveauté dans ce papier est de s'intéresser à cette relation dans le cas de modèles d'endommagement régularisés par la TLS.

### 2 Description des modèles CZM et TLS

On considère une barre élastique endommageable de longueur  $2L : x \in [-L, L]$  et de module de Young  $E$ . Les dégradations sont modélisées soit par une zone cohésive (CZM) en  $x = 0$ , soit par une zone d'endommagement de type TLS. Par symétrie, on se restreint à l'étude de la zone  $x \in [0, L]$ . On dénote  $u$  et  $\sigma$  respectivement le déplacement et la contrainte (uniforme) le long de la barre. Pour le modèle CZM, le déplacement est discontinu en  $x = 0$  et l'ouverture de la zone cohésive est donnée par  $w = 2u(0^+)$ . L'ouverture dépend de la contrainte par une relation  $\sigma = \sigma(w)$ . En dessous d'une contrainte critique  $\sigma_c$ , il n'y a pas d'ouverture et au delà d'une certaine ouverture  $w_c$ , la contrainte s'annule. Concernant le modèle TLS, le déplacement est continu (sauf lorsque  $d = 1$  en  $x = 0$ ). L'étendue de la zone endommagée est noté  $[0, l]$  où  $x = l$  correspond à la position actuelle du front d'endommagement. Dans le sillage du front, l'endommagement est donné par le profil  $d(\phi)$  qui est une donnée d'entrée du modèle TLS et où  $\phi$  est la distance au front  $\phi = l - x$ . Lorsque  $l$  atteint  $l_c$ , l'endommagement atteint 1 en  $x = 0$  et la barre est rompue. On dira que les modèles CZM et TLS sont équivalents si la relation entre contraintes  $\sigma$  et déplacement en bout de barre  $u_L$  est identique dans les deux modèles.

#### 2.1 Modèle CZM

Le déplacement est relié à la contrainte par

$$u_L = \frac{L\sigma}{E} + \frac{w(\sigma)}{2} \quad (1)$$

La relation  $w - \sigma$  est donnée par la forme adimensionnelle

$$\frac{\sigma}{\sigma_c} = F\left(\frac{w}{w_c}\right) \quad (2)$$

telle que  $F(0) = 1$ ,  $F(1) = 0$  et  $F = 0$  au delà de 1. L'énergie de la zone cohésive est

$$\Phi_{\text{coh}}(w, d_{\text{coh}}) = \frac{1}{2}(d_{\text{coh}}^{-1} - 1)kw^2 \quad (3)$$

donnant les lois d'état :

$$\sigma = (d_{\text{coh}}^{-1} - 1)kw, \quad Y_{\text{coh}} = \frac{1}{2}d_{\text{coh}}^{-2}kw^2 \quad (4)$$

et donc (1) peut s'écrire

$$u_L = \frac{L\sigma}{E} + \frac{\sigma}{2k} \frac{d_{\text{coh}}}{1 - d_{\text{coh}}} \quad (5)$$

## 2.2 Modèle TLS

On considère un modèle local d'endommagement avec adoucissement caractérisé par une fonction  $H(d)$ . L'énergie libre est donnée par

$$\varphi(\varepsilon, d) = \frac{1}{2}(1 - d)E\varepsilon^2 + Y_c(H(d) - d) \quad (6)$$

Les lois d'état qui en découlent sont

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = (1 - d)E\varepsilon, \quad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial d} = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 - Y_c(H_{,d} - 1) \quad (7)$$

La relation déplacement contrainte sur la barre s'écrit.

$$u_L = \int_0^L \frac{\sigma}{E(1 - d)} dx = \frac{L\sigma}{E} + \frac{\sigma}{E} \int_0^l \frac{d}{1 - d} dx \quad (8)$$

L'évolution de l'endommagement est supposée vérifier

$$Y \leq Y_c, \quad \dot{d} \geq 0, \quad (Y - Y_c)\dot{d} = 0 \quad (9)$$

La condition  $Y - Y_c$  donne

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2Y_c}{E}} \sqrt{H_{,d}(d)} \quad (10)$$

nécessitant

$$H_{,d}(d) \geq 0 \quad (11)$$

On impose également

$$H_{,dd}(d) \geq 0 \quad (12)$$

pour assurer une pente négative de la courbe contrainte déformation après le pic. En effet, on a la relation

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E(-2\frac{H_{,d}(d)}{H_{,dd}(d)} + (1 - d)) \leq 0 \quad (13)$$

Finalement, les restrictions sur  $H$  se résument en

$$H(0) = 0, \quad H_{,d}(0) = 1, \quad H_{,d}(d) \geq 0, \quad 0 \leq H_{,dd}(d) \leq \frac{2H_{,d}(d)}{1 - d} \quad (14)$$

Le modèle local décrit ci-dessus est maintenant rendu non-local en imposant un profil d'endommagement  $d(\phi)$ . Le taux d'endommagement est donné par

$$\dot{d} = d_{,\phi}\dot{\phi} \quad (15)$$

où  $d_{,\phi}$  est la dérivée de  $d$  par rapport à  $\phi$ . Le champ  $\dot{\phi}$  doit être uniforme sur  $[0, l]$  pour que  $\phi$  reste une fonction distance. L'évolution non-local de  $d$  est donnée par (9) (voir [5]).

$$\bar{Y} \leq Y_c, \quad \bar{d} \geq 0, \quad (\bar{Y} - Y_c)\bar{d} = 0 \quad (16)$$

où

$$\bar{Y} = \frac{\int_0^l Y d_\phi d\phi}{\int_0^l d_\phi d\phi}, \quad \bar{d} = \frac{\int_0^l d d\phi}{\int_0^l d\phi} = \phi \frac{\int_0^l d_\phi d\phi}{\int_0^l d\phi} \quad (17)$$

Après quelques calculs, on obtient

$$\bar{Y} = \frac{\sigma^2}{2E(1-d_0)} - \frac{Y_c(H_{,d}(d_0) - 1)}{d_0}, \quad \bar{d} = \phi \frac{d_0}{l} \quad (18)$$

où  $d_0$  est la valeur maximale de l'endommagement sur la barre (maximum atteint en  $x = 0$ ). La contrainte est donc

$$\sigma = \sqrt{2EY_c} \sqrt{(1-d_0)H(d_0)/d_0} \quad (19)$$

### 2.3 Relations CZM TLS

On impose pour les deux modèles le même module Young et la même contrainte critique.

$$\sigma_c = \sqrt{2EY_c} \quad (20)$$

A ce stade, il est utile de définir les nombres sans dimension suivants

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_c}, \quad \hat{\varepsilon} = \frac{E\varepsilon}{\sigma_c}, \quad \hat{w} = \frac{w}{w_c}, \quad \hat{\phi} = \frac{\phi}{l_c}, \quad \lambda = \frac{2\sigma_c l_c}{Ew_c} \quad (21)$$

On complète (20) par les trois relations suivantes

$$\hat{\sigma} = \sqrt{(1-d_0) \frac{H(d_0)}{d_0}}, \quad \hat{w} = \lambda \left( \int_0^{\hat{\phi}_0} \frac{d}{1-d} d\hat{\phi} \right) \hat{\sigma}, \quad \hat{\sigma} = F(\hat{w}) \quad (22)$$

où  $d_0 = d(\hat{\phi}_0)$ . En éliminant  $\hat{\sigma}$  et  $\hat{w}$ , on obtient

$$\sqrt{(1-d_0) \frac{H(d_0)}{d_0}} = F \left( \lambda \sqrt{(1-d_0) \frac{H(d_0)}{d_0}} \int_0^{\hat{\phi}_0} \frac{d}{1-d} d\hat{\phi} \right) \quad (23)$$

Cette condition lie  $\lambda$ , le profil d'endommagement et la forme de l'adoucissement  $H(d)$ . Notons que le profil d'endommagement n'intervient que via

$$I = \int_0^{\hat{\phi}_0} \frac{d}{1-d} d\hat{\phi} \quad (24)$$

alors que l'adoucissement via

$$S = \sqrt{(1-d) \frac{H(d)}{d}} \quad (25)$$

La condition (23) s'écrit donc de manière compacte

$$S = F(\lambda I S) \quad (26)$$

### 3 Exemple d'une loi cohésive linéaire : $F(\hat{w}) = 1 - \hat{w}$

Avec un profil parabolique d'endommagement, figure 1,

$$d = 2\hat{\phi} - \hat{\phi}^2 \quad (27)$$

on obtient après quelques calcul

$$H(d(\hat{\phi})) = \frac{2\hat{\phi} - \hat{\phi}^2}{(1 - \hat{\phi} + \lambda\hat{\phi}^2)^2} \quad (28)$$

qui satisfait (14) si  $\lambda \leq 1/2$ . Les relations contraintes déformations correspondantes sont données figure 2. On note que plus  $l_c$  est faible pour le modèle local doit être en capacité de dissiper plus (d'où une aire sous la courbe plus importante).

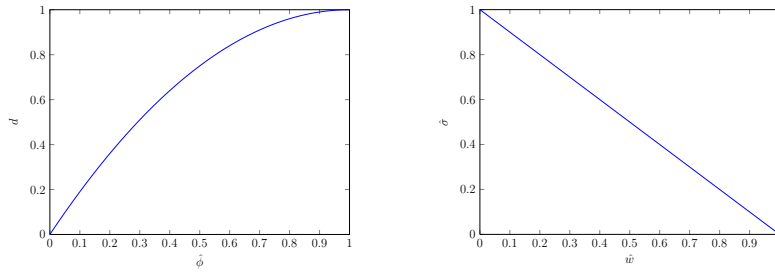


FIGURE 1 – Le profil d’endommagement :  $d = 2\hat{\phi} - \hat{\phi}^2$  (gauche) et une loi cohésive linéaire (droite).

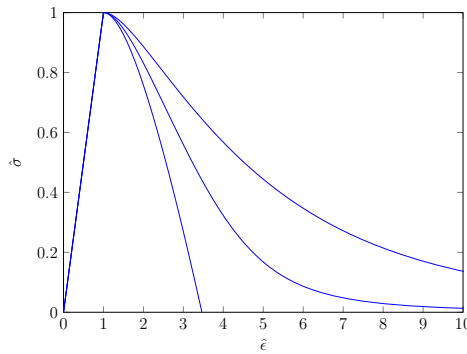


FIGURE 2 – Relations contrainte déformation correspondant au modèle cohésif linéaire pour différentes valeurs de  $l_c$  (0.5, 0.4, 0.3. de gauche à droite).

## 4 Perspectives

Si un modèle TLS et un modèle CZM sont compatibles en 1D, il est intéressant de voir si leur résultats sont proches en 2D et 3D pour des  $l_c$  petit par rapport à la taille de la zone cohésive et à la limite où  $l_c$  tend vers 0. Une preuve mathématique de cette limite serait un résultat intéressant à obtenir.

## Références

- [1] N. Moës, C. Stolz, P.-E. Bernard, and N. Chevaugeon. A level set based model for damage growth : the thick level set approach. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 86 :358–380, 2011.
- [2] C. Stolz and N. Moës. A new model of damage : a moving thick layer approach. *International Journal of Fracture*, 174(1) :49–60, March 2012.
- [3] E. Lorentz, S. Cuvilliez, and K. Kazymyrenko. Convergence of a gradient damage model toward a cohesive zone model. *Comptes Rendus Mécanique*, 339(1) :20–26, January 2011.
- [4] F. Cazes, M. Coret, and A. Combescure. A two damage variables model for the distinction of diffuse and localized failure. *Engineering Fracture Mechanics*, 2011.
- [5] P.-E. Bernard, N. Moës, and N. Chevaugeon. Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach : Efficient discretization for quasi-static loadings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 233-236 :11–27, August 2012.