



**HAL**  
open science

# Approche level-set pour la résolution de problèmes comportant des inégalités : application au cas de membrane contactant un solide rigide

Nicolas Chevaugéon, Mathieu Graveleau, Nicolas Moes

## ► To cite this version:

Nicolas Chevaugéon, Mathieu Graveleau, Nicolas Moes. Approche level-set pour la résolution de problèmes comportant des inégalités : application au cas de membrane contactant un solide rigide. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01517310

**HAL Id: hal-01517310**

**<https://hal.science/hal-01517310>**

Submitted on 3 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Approche level-set pour la résolution de problèmes comportant des d'inégalités : application au cas de membrane contactant un solide rigide.

N. Chevaugéon<sup>1</sup>, M. Graveleau<sup>1</sup>, N. Moës<sup>1</sup>

<sup>1</sup> GeM, Ecole Centrale Nantes, {nicolas.chevaugéon, matthieu.graveleau, nicolas.moes}@ec-nantes.fr

---

## Résumé —

Nous proposons une méthode pour la résolution des problèmes de contact dans laquelle la zone de contact est modélisée par une level-set. Nous appelons cette méthode ILS pour “Inequality Level Set”, publiée pour la première fois dans [1] où elle était appliquée à la résolution d’un problème de statique où le matériau comportait une limite d’extensibilité. Dans cette méthode, le problème de contact est traité itérativement en résolvant d’une part, les équations d’équilibres à zone de contact fixée, c’est à dire un problème avec des contraintes d’égalité uniquement, et d’autre part, en résolvant un problème de sensibilité de la solution à la position de la zone de contact. Le problème de sensibilité permet de calculer comment la level-set modélisant la zone de contact doit se déplacer pour se rapprocher de la zone de contact optimale, c’est à dire tel que toutes les équations du problème sous forme faible soient vérifiées. Dans cet article, on illustrera l’approche sur des problèmes de membrane en hpp et nous discuterons de ses mérites.

**Mots clés** — contact, level-set, ILS, élément finis étendus, sensibilité.

---

## 1 Introduction

Les problèmes de contact en mécanique sont toujours réputés difficiles et sont l’objet de nombreux travaux. Si les équations sont bien établies, la difficulté pour les résoudre numériquement de manière robuste persiste encore [4]. De notre point de vue, la résolution des équations d’équilibre soumises aux contraintes d’inégalité de contact est la difficulté majeure. Notre approche propose de séparer le problème entre d’un côté, des équations d’équilibre sous contraintes d’égalités, imposées dans une zone définie par une level-set, plus faciles à résoudre, et de l’autre, un problème de sensibilité de cette solution d’équilibre au mouvement de la level-set. La solution du problème est calculée itérativement en modifiant la position de la level-set à partir du résultat du calcul de sensibilité pour vérifier au mieux toutes les équations du contact.

Outre la méthode de résolution simplifiée, la méthode présente à priori d’autres avantages potentiels sur les méthodes classiques de résolution du contact. La zone de contact est ici représentée par une level-set et on a donc une définition implicite précise de la limite entre la zone de contact et la zone libre, que nous appellerons  $\Gamma$ . Cela donne la possibilité d’enrichir la discrétisation des champs pour mieux décrire ceux-ci autour de  $\Gamma$ , en utilisant la méthode des éléments finis étendus [2]. En effet, les champs solutions de problèmes de contact ont typiquement des singularités sur cette frontière  $\Gamma$  qu’il est difficile de prendre en compte dans la discrétisation lorsque la position de la frontière n’est pas explicitement connue. Cette connaissance de la frontière  $\Gamma$  permet aussi d’envisager la modélisation plus précise de physiques différentes entre la zone de contact et la zone libre, par exemple des phénomènes d’adhésions ou d’usure.

## 2 présentation générale de la méthode appliquée aux membranes

Dans cet article, on présentera la méthode appliquée aux problèmes de contact entre une membrane et un solide rigide en hypothèse des petites perturbations. Les notations sont reprises dans la figure 1.

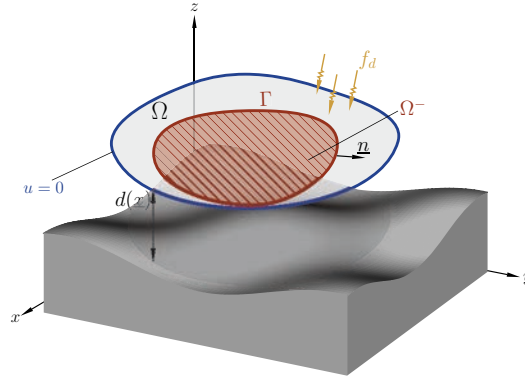


FIGURE 1 – Membrane en contact avec une surface rigide surface

Le problème revient sous forme forte, à trouver  $u$  et  $p$  tel que :

$$\begin{cases} T\Delta u + f_d + p = 0 & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u + d \geq 0 & \text{sur } \Omega, \\ p \geq 0 & \text{sur } \Omega, \\ p(u + d) = 0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Si la zone de contact est connue, le domaine est découpé en deux parties et on peut écrire : trouver  $u$ ,  $p$  et  $\Omega^-$  tel que :

	dans $\Omega^+$	dans $\Omega^-$	sur $\Gamma$
égalité	$T\Delta u + f_d = 0$ $u = 0$ sur $\partial\Omega$	$T\Delta u + f_d + p = 0$ $-u = d$	$u^+ = u^-$
inégalité	$-u \leq d$	$p \geq 0$	

Dans le cadre de la méthode ILS, on se donne une zone de contact à priori fausse, mais connue explicitement. On résoud alors le problème d'équilibre sous contraintes d'égalités suivant : trouver  $u$ ,  $p$  et  $\lambda$  tel que :

	dans $\Omega^+$	dans $\Omega^-$	sur $\Gamma$
égalité	$T\Delta u + f_d = 0$ $u = 0$ sur $\partial\Omega$	$T\Delta u + f_d + p = 0$ $-u = d$	$T[\nabla u] \cdot \underline{n} = \lambda$ $u^+ = u^-$

Et on voit apparaître un multiplicateur  $\lambda$  correspondant à une traction par unité de longueur, sur l'interface  $\Gamma$ .

La méthode que l'on propose est de partir d'une zone de contact initiale et de calculer la solution d'équilibre pour cette zone de contact en résolvant le problème ci-dessus. Ce problème ne contient que des égalités, et est donc plus aisé à résoudre que le problème complet. Le problème résolu, on peut calculer la sensibilité des champs à la position de la zone de contact et la déplacer en conséquence pour mieux vérifier les conditions pour que la zone soit à la bonne position. Le problème de sensibilité s'apparente à un problème d'optimisation de forme [3]. On peut en particulier montrer que les dérivées des quantités  $u$ ,  $p$  et  $\lambda$  par rapport à un champs de vitesse appliqué à la zone de contact, vérifient sous forme faible un système d'équation ayant le même opérateur bilinéaire que les équations d'équilibre. Seul le membre de droite change. Notre stratégie consiste essentiellement à calculer la sensibilité de  $\lambda$  à des champs de vitesse afin de trouver le champs de vitesse qui au premier ordre, appliqué à la zone de contact annulera  $\lambda$  sur  $\Gamma$ . Puis on itère en calculant l'équilibre à nouveau sur la nouvelle zone de contact. La stratégie s'apparente donc à un algorithme de Newton sur  $\lambda$ , où à chaque pas on déplace la frontière en utilisant les résultats du problème de sensibilité.

### 3 Résultats

Le problème est écrit sous forme faible, tant pour la partie équilibre que pour la partie sensibilité et discrétisé à l'aide de la méthode des éléments finis étendus. La zone de contact est représentée par une level-set définie aux noeuds des éléments. Les champs de déplacement sont linéaires par élément et enrichis d'un saut sur l'interface, ce qui permet de modéliser facilement un saut du gradient de  $u$  sur cet interface (En effet lorsque la position de la zone de contact n'est pas exacte, on a bien un saut du gradient de  $u$  dans le cas des membranes). Le champs de vitesses de la zone de contact est défini par des modes sur  $\Gamma$  et étendu dans le domaine.

Un problème axisymétrique est d'abord résolu, pour lequel la solution analytique est connue, comme sur la figure 2. Les résultats sont présentés sur la figure 3 où on compare en fonction du nombre d'éléments, l'erreur sur la position de la zone de contact à gauche, et le nombre d'itérations pour atteindre la convergence à droite, avec une méthode de contact plus classique de contraintes actives.

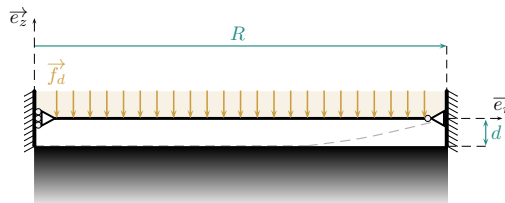


FIGURE 2 – Problème axisymétrique de la membrane sous pression rentrant en contact avec le sol.

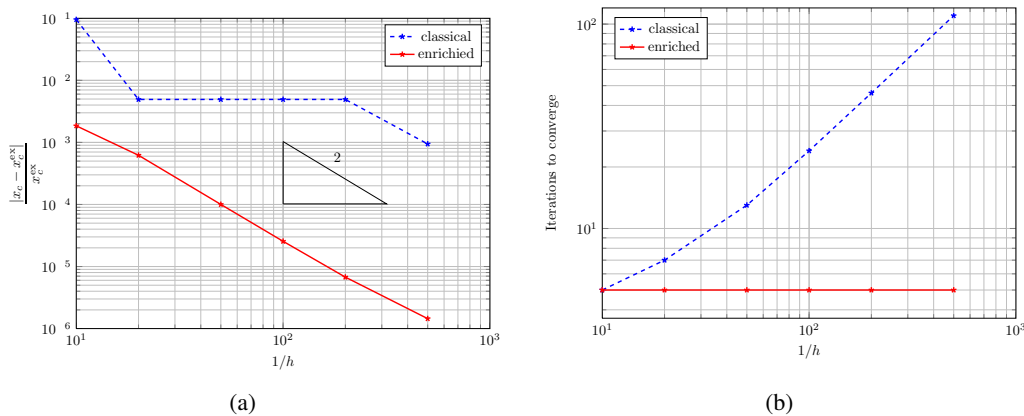


FIGURE 3 – Evolution (a), de l'erreur sur la position de  $\Gamma$  (b) nombre d'itérations pour atteindre la convergence, en fonction de la taille du maillage : comparaison entre une méthode classique et la méthode ILS

Le deuxième exemple présenté dans ce résumé est celui d'une membrane qui, sous pression, rentre en contact avec un moule dont le profil est décrit figure 4, ressemblant à une boîte à oeufs. Les résultats présentés figure 5 montrent le champs de déplacement vertical de la membrane et le contour de l'interface  $\Gamma$  entre la zone de contact et la zone libre. Dans cette simulation, on effectue un cycle où la pression est augmentée d'abord puis relâchée ensuite et on peut suivre sur les 9 images l'évolution de la zone de contact lors de ce cycle de pression. La figure 4 montre à droite le maillage sur lequel est discrétisé l'obstacle. Le même maillage a été utilisé pour la discrétisation de la membrane et de la level-set décrivant la zone de contact. On peut constater que le contour  $\Gamma$  est déjà très bien représenté sur cette grille pourtant grossière. Aucune extrapolation n'est nécessaire pour construire ce contour, contrairement à ce qui aurait dû être fait dans le cas d'une méthode plus classique où le statut de contact ne sera connu qu'aux noeuds ou aux points d'intégration selon la stratégie appliquée. On note aussi que la représentation par level-set de la frontière  $\Gamma$  permet de prendre en compte naturellement ces changement de topologie.

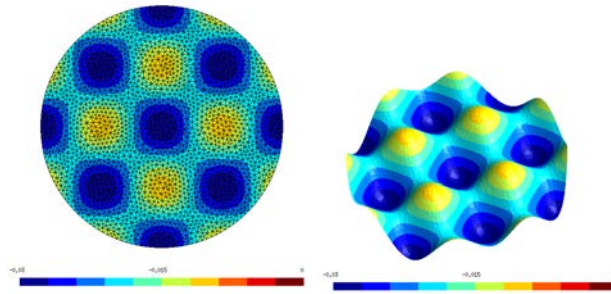


FIGURE 4 – Forme du moule et maillage associé

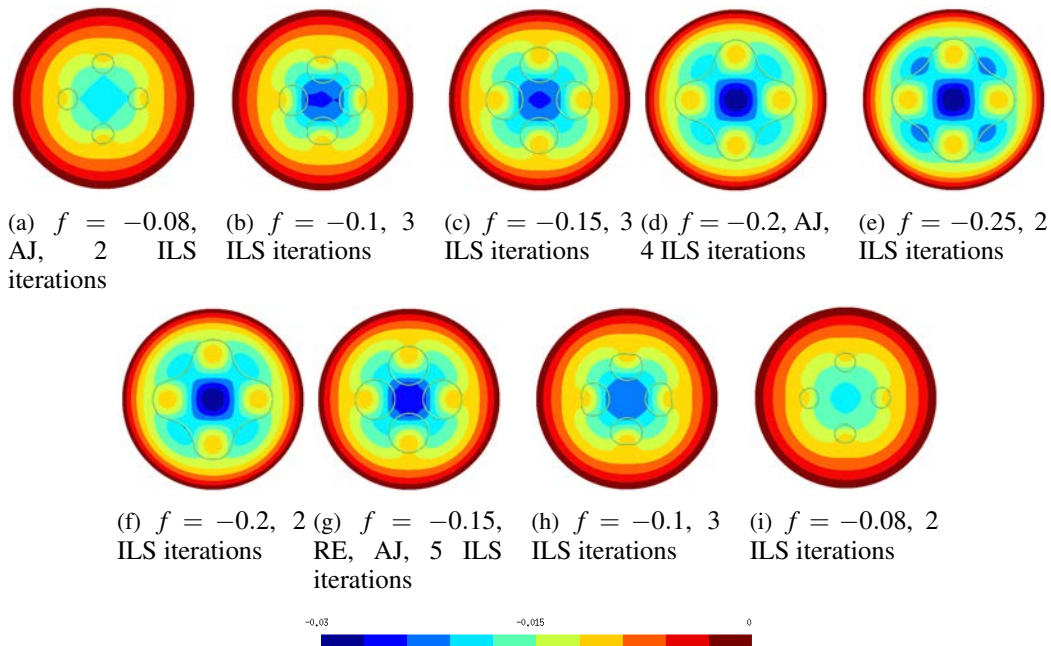


FIGURE 5 – Evolution du déplacement et de la zone de contact lors d'un chargement.  $f$  est le paramètre de chargement. Chaque incrément de résolution est présenté, avec le nombre d'itérations ILS, et si une zone a du être ajoutée à la zone de contact (AJ) ou retirée (RE)

## 4 conclusion

Dans cet article nous avons montré l'état d'avancée de nos travaux sur la méthode ILS, appliquée au contact. Pour l'instant, nos applications se sont limitées à des calculs de membranes en petites perturbations. La prochaine étape sera de passer au calcul de contact sur des pièces volumiques. Les premiers résultats sont encourageants et nous pensons que la méthode sera d'autant plus intéressante dans ces cas puisque le problème de positionnement de la zone de contact n'est que bi-dimensionnel alors que le problème d'équilibre est tri-dimensionnel, ce qui veut dire que le surcoût de la méthode sera sans doute négligeable par rapport au coût de la résolution du problème volumique.

## Références

- [1] N. Bonfils, N. Chevaugeon, N. Moës. *Treating volumetric inequality constraint in a continuum media with a coupled x-FEM/level-set strategy*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 16-28, 2012.
- [2] T. Belytschko, C. Parimi, N. Moës, N. Sukumar, S. Usui. *Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces.*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 609-635, 2003.
- [3] E. Taroco. *Shape sensitivity analysis in linear elastic fracture mechanics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 697-712, 2000.
- [4] P. Wriggers. *Computational contact mechanics*, Springer, 2006.