



**HAL**  
open science

# Réponse d'un matériau hyperélastique fragile : comparaison approches analytiques et numériques en mode anti-plan

Claude Stolz, Andrès Parilla Gomez

## ► To cite this version:

Claude Stolz, Andrès Parilla Gomez. Réponse d'un matériau hyperélastique fragile : comparaison approches analytiques et numériques en mode anti-plan. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01517303

**HAL Id: hal-01517303**

**<https://hal.science/hal-01517303v1>**

Submitted on 3 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

## Réponse d'un matériau hyperélastique fragile : comparaison approches analytiques et numériques en mode anti-plan

C. Stolz<sup>1,2</sup>, A. Parilla Gomez<sup>1</sup>

<sup>1</sup> GeM, UMR 6183, Ecole Centrale Nantes, {claude.stolz}@ec-nantes.fr

<sup>2</sup> IMSIA, UMR CNRS 8193

**Résumé** — On étudie la forme des champs mécaniques autour d'une quasi-fissure pour une classe de matériau isotrope hyperélastique incompressible fragile. dont le critère de rupture est une déformation critique. La quasi-fissure est une zone endommagée où les contraintes sont nulles, la frontière entre zone saine et endommagée est obtenue analytiquement. Des simulations numériques fondées sur une optimisation de forme sont proposées pour résoudre le problème d'équilibre avec quasifissure pour des comportements fragiles plus généraux.

**Mots clés** — hyperélasticité fragile, mode anti-plan, optimisation de forme

### 1 Introduction

On considère un domaine  $\Omega$  constitué d'un matériau hyperélastique fragile en déformation anti-plane définie par le déplacement  $w(x_1, x_2)$  porté par la normale au plan  $(x_1, x_2)$ . Le gradient de la transformation dépend du gradient  $\nabla w$  de norme  $R$ . Une loi de comportement isotrope hyperélastique incompressible est une fonction  $E(I_1, I_2)$  des invariants du tenseur des dilatations de Cauchy, qui sont égaux en déformation anti-plane  $I_1 = I_2 = 3 + R^2$  et l'énergie devient  $E(I_1, I_2) = \Psi(I_1)$ . La loi contrainte déformation se met sous la forme  $\tau(R) = R\Psi' = \mu(R)R$ . Pour déterminer les champs mécaniques à l'équilibre, on utilise la méthode de l'hodographe. Dans cette transformation, les coordonnées  $(x_1, x_2)$  sont remplacées par les composantes du gradient ( $\xi_i = w_{,i}$ ). On introduit  $U(\xi_i) = x_i w_{,i} - w$  la transformée de Legendre par rapport à  $\xi_i$ . Dans cette transformation les équations d'équilibre deviennent en coordonnées polaires  $\xi_1 = R \cos \Theta, \xi_2 = R \sin \Theta$  [6, 2, 7] :

$$\frac{\partial}{\partial R} (\tau(R) \frac{\partial U}{\partial R}) + \frac{(\tau')}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial \Theta^2} = 0 \quad (1)$$

le déplacement  $w = R^2 \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{U}{R} \right)$  aux points de coordonnées

$$x_1 = \cos \Theta \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{\sin \Theta}{R} \frac{\partial U}{\partial \Theta} \quad x_2 = \sin \Theta \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\cos \Theta}{R} \frac{\partial U}{\partial \Theta} \quad (2)$$

On considère les lois de comportement fragile de type puissance

$$\begin{cases} R \leq R_o & \tau = \mu_o R \\ R_o \leq R \leq R_m & \tau = \mu_o R_o \left( \frac{R}{R_o} \right)^\alpha = \hat{\mu} R^\alpha \\ R_m \leq R & \tau = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Le cas  $R_m = \infty$  est celui des fissures. La solution est alors de la forme

$$U(R, \Theta) = AR \cos(\Theta) I_o(R); \quad I_o(R) = \int_R^\infty \frac{dt}{\mu(t)t^3} \quad (4)$$

Pour un matériau néohookéen  $\mu(t) = \mu_o$ ,  $U = \frac{A}{2\mu_o R} \cos \Theta$ ,  $w = -\frac{A}{\mu_o R} \cos \Theta$ . Les contraintes sont nulles à l'infini, les lèvres de la fissure sont libres de contraintes et pour  $x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta$ , on trouve la solution d'Irwin :  $2\Theta = \pi + \theta, R^2 = r, A = \frac{K^2}{\pi \mu_o}$ , où  $K$  est le facteur d'intensité des contraintes. On notera que la solution pour un matériau néohookéen est celle du matériau élastique linéaire.

## 2 Cas de la quasifissure

. Dans le cas d'un matériau fragile le matériau est rompu dès que la déformation atteint un seuil critique, la valeur critique en glissement est  $R_m$ . Pour un chargement de type fissure à l'infini, la zone endommagée est une bande de hauteur  $H$  parallèle à l'axe des  $x_1$  et fermée par une courbe régulière à déterminer. Pour les lois puissance proposées, on recherche des solutions particulières de l'équation d'équilibre

$$R\left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}\log R\cos\Theta - \Theta\sin\Theta\right), \quad R\cos\Theta, \quad R\sin\Theta \quad (5)$$

La première solution décrit une bande de hauteur unité, la seconde une translation suivant  $x_1$ , la dernière une translation suivant  $x_2$ . La solution est alors recherchée sous la forme

$$\begin{cases} 0 \leq R \leq R_o, & U = U_o(R, \Theta) \\ U_o = A_o R \cos \Theta \int_R^{R_o} \frac{dt}{\mu_o t^3} - B_o R (\log R \cos \Theta - \Theta \sin \Theta) + C_o R \cos \Theta \\ R_o \leq R \leq R_m & U_1 = \hat{U}(R, \Theta) \\ U_1 = A_1 R \cos \Theta \int_R^{R_o} \frac{dt}{\mu_o t^{\alpha+2}} - B_1 R \left(\frac{2\alpha}{\alpha+1} \log R \cos \Theta - \Theta \sin \Theta\right) + C_1 R \cos \Theta \end{cases} \quad (6)$$

Les constantes  $(A_o, A_1, B_o, B_1, C_o, C_1)$  sont déterminées par (a) la continuité du potentiel en  $R = R_o$ , (b) la continuité du déplacement, (c) les conditions de chargement à l'infini et (d) la nullité du vecteur contrainte sur la frontière de la quasifissure. (a) impose  $B_o = B_1 = B$ , (b)  $A_1 + \mu_o R_o^2 B \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = A_o$ , (c)

$A_o = \frac{K^2}{\pi \mu_o}$ . Pour simplifier les expressions on adopte les notations  $(a, a_1, b)$

$$\frac{A_o}{\mu_o R_o^2} = \frac{K^2}{\pi \tau_o^2} = a, \quad \frac{A_1}{\mu_o R_o^2} = a a_1, \quad B = b a \quad (7)$$

La constante  $C_o = 2 - B + B \log(R_o)$  détermine la position de la quasifissure selon  $x_2 = 0$ , et on introduit les grandeurs adimensionnelles  $X_i = \frac{x_i}{a}$ ,  $\rho = \frac{R}{R_o}$ . Alors  $\rho_o = 1$ ,  $\rho_m = \frac{R_m}{R_o}$ . La condition (c) devient  $a_1 + b \frac{\alpha-1}{\alpha+1} = 1$  L'image du plan d'hodographe dans le plan physique est

$$X_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\rho^2} \cos(2\Theta) - b \log \rho \quad X_2 = -\frac{1}{2\rho^2} \sin(2\Theta) + b\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right) \quad (8)$$

-  $1 \leq \rho \leq \rho_m$

$$\begin{aligned} X_1 &= -\left(\frac{a_1}{\rho^{\alpha+1}} + b \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) \frac{\cos 2\Theta}{2} - \left(\frac{a_1}{\rho^{\alpha+1}} + b\right) \frac{\alpha-1}{2(\alpha+1)} - \frac{2b\alpha}{\alpha+1} \log \rho - \frac{a_1}{\alpha+1} \\ X_2 &= -\left(\frac{a_1}{\rho^{\alpha+1}} + b \frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right) \frac{\sin 2\Theta}{2} + b\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Pour  $\rho = \rho_a$ , la courbe  $X_1(\rho_a, \Theta), X_2(\rho_a, \Theta)$  est une cycloïde. La condition (d)  $\tau_1 dX_2 - \tau_2 dX_1 = 0$  montre que la frontière de la quasifissure se décompose en deux lignes horizontales  $\Theta = \pi/2 \pm \pi/2$  et la cycloïde où  $\rho = \rho_m$ , ce qui conduit à la condition

$$\left(\frac{2b}{\alpha+1} - \frac{a_1}{\rho_m^{\alpha+1}}\right) \cos \Theta = 0. \quad (9)$$

Combinée avec la condition à l'infini donne une relation hauteur  $b$  fonction du chargement unité

$$1 = \frac{2b}{\alpha+1} \left(\rho_m^{\alpha+1} + \frac{\alpha-1}{2}\right) \quad (10)$$

Le flux d'énergie de déformation évaluée en  $R_m$  est donnée par

$$D_d = HE(R_m) = H \int_o^{R_m} \tau(t) dt = H \frac{1}{\mu_o} \frac{\tau_o^2}{\alpha+1} \left(\rho_m^{\alpha+1} + \frac{\alpha-1}{2}\right) \quad (11)$$

Comme  $a$  est une fonction de  $K$  l'épaisseur de la zone endommagée  $H = ba\pi$

$$\frac{1}{2}a\pi = \frac{H}{\alpha+1}(\rho_m^{\alpha+1} + \frac{\alpha-1}{2}) = \frac{1}{2} \frac{K^2}{\tau_o^2} \quad (12)$$

et le flux d'énergie à travers la cycloïde est donc  $D_d = HE(R_m) = \pi a \frac{\tau_o^2}{2\mu_o} = \frac{K^2}{2\mu_o}$ , ce qui correspond exactement au taux de restitution d'énergie de la fissure équivalente vue depuis l'infini.  $\mathcal{G} = J = HE(R_m)$  comme dans le cas du milieu élastique fragile [1]

## 2.1 Propriété de la solution pour $\alpha > 0$

Ce cas correspond à celui de Neuber  $R_m$  fini [5], Rice  $R_m = \infty$ , [6]. Dans ce cas les cycloïdes sont emboîtées. La solution proposée est unique, les équations d'équilibre sont de nature elliptique. On retrouve au passage la solution de Bui  $R_m = R_o$ . On se propose d'utiliser ces solutions comme solutions test d'un algorithme de calcul de détermination de la solution pour des classes de comportement plus générales. Pour  $\alpha < 0$  la solution est plus complexe dû au fait que les équations deviennent hyperboliques pour  $\rho > 1$  [3, 7].

## 3 Approche numérique

On met en oeuvre un algorithme d'optimisation pour déterminer la forme de la quasi-fissure. On cherche à déterminer la relation entre l'épaisseur de la quasifissure, la loi de comportement et le facteur d'intensité des contraintes équivalent à une fissure. On se place dans le cas de comportement pour lequel les équations d'équilibre demeurent elliptiques. Ce problème est celui d'une frontière mobile libre pour laquelle on adapte le chargement afin de satisfaire au mieux toutes les conditions requises définissant la solution.

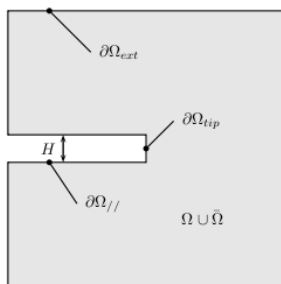
On se donne une géométrie épaisseur  $H$  fixée, une courbe  $\Gamma = \partial\Omega_{tip}$ , un chargement  $K$  donné, on résout un problème d'élasticité non linéaire, en supposant une loi de comportement de la classe proposée où  $R_m$  n'est pas imposé. A partir de cette configuration, on actualise la géométrie  $\Gamma$  afin de rendre compatible la condition de surface libre et le fait que le critère soit atteint exactement le long de  $\Gamma$ . Le problème mécanique à géométrie fixée est résolu par une méthode Newton-Rapson

Dès que le problème d'élasticité est résolu, la frontière libre  $\Gamma$  évolue de façon à satisfaire la condition  $R = R_m$ . La frontière  $\Gamma$  est une level set. Une estimation de la vitesse normale de la frontière est donnée par  $a = -k(R - R_m)/R_m$ , cette vitesse est régularisée le long de  $\Gamma$  par une équation de diffusion

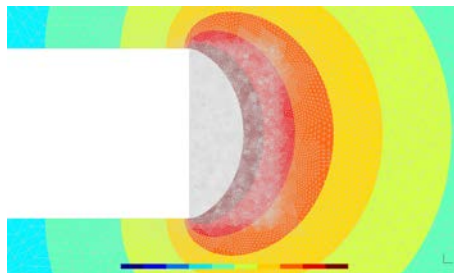
$$\forall a^*, \int_{\Gamma_t} \tilde{a}a^* d\Gamma + \nu \int_{\Gamma_t} \nabla \tilde{a} \nabla a^* d\Gamma = \int_{\Gamma_t} aa^* d\Gamma \quad (13)$$

La nouvelle position  $\Gamma_{t+dt} = \Gamma_t + a(s)\mathbf{n}dt$ , où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à  $\Gamma_t$ .

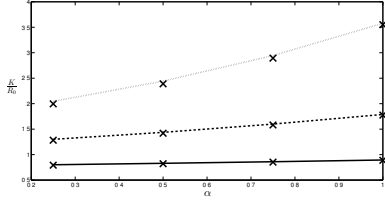
Le facteur d'intensité des contraintes est actualisé en égalant la valeur du glissement aux points commun entre  $\Gamma_t$  et les bords horizontaux de la quasifissure.



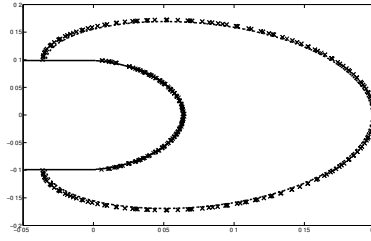
(A) Géométrie initiale



(B) Détail de la solution en déformation



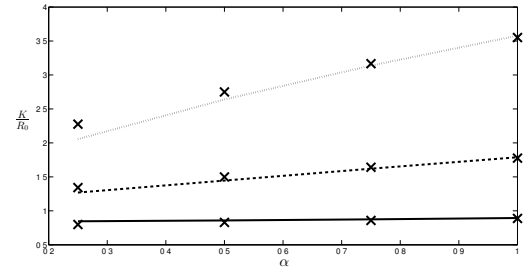
(C) Comparaison analytique-numérique K fonction de  $\rho_m, \alpha$



(D) Comparaison analytique numérique, courbes  $\rho = 1, \rho = \rho_m$

On considère maintenant une loi bilinéaire. On note  $\alpha = \frac{\tau_m}{\tau_o}$ . On compare la relation épaisseur chargement obtenue par l'analyse de la dissipation avec les résultats numériques.

$$\begin{cases} R \leq R_o & \tau = \mu_o R \\ R_o \leq R \leq R_m & \tau = \tau_o + \frac{\tau_m - \tau_o}{R_m - R_o} (R - R_o) \\ R_m \leq R & \tau = 0 \end{cases} \quad (14)$$



## 4 Conclusion

On a montré la pertinence de l'algorithme pour résoudre le problème de la détermination d'une zone endommagée associée à un comportement élastique fragile. C'est une étape dans la recherche de solution plus générale comme la prise en compte de modèle où l'endommagement est une fonction de la distance à la frontière endommagement matériau sain [4].

## Références

- [1] H.D. Bui, A. Ehrlacher, *Propagation dynamique d'une zone endommagée dans un solide élastique fragile en mode III et en régime permanent*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser B 290, 273-276, 1980
- [2] J.K. Knowles, E Sternberg, *Discontinuous deformations gradients near the tip of a crack in finite anti-plane shear : an example*, Journal of Elasticity 10, 81-110, 1980
- [3] J.K. Knowles, E Sternberg, *Anti-plane shear fields with discontinuous gradients near the tip of a crack in finite elastostatics*, Journal of Elasticity 11, 129-164, 1981
- [4] N. Moës, C. Stolz, P-E. Bernard, N. Chevaugeon, *A level set based model for damage growth : the thick level set approach*. Int. J. Numer. Meth. Engng., 86(3) :358-380, 2011.
- [5] H. Neuber, *A physically nonlinear notch and crack model*, J. Mech. Phys. Solids, 16, 289-294, 1986
- [6] J. Rice, *Stresses due to a sharp notch in a work hardening elastic plastic material loaded by a longitudinal shear*, J. Applied Mechanics, 34(2), 287-298, 1967
- [7] C. Stolz, *Closed form solution for the finite anti-plane shear field for a class of incompressible brittle solids*, C.R Mécanique 338, 663-669, 2010.