



**HAL**  
open science

## Modèle en éléments finis de mélange fluide/grains

Jonathan Lambrechts, Frédéric Dubois, Jean-Francois Remacle

► **To cite this version:**

Jonathan Lambrechts, Frédéric Dubois, Jean-Francois Remacle. Modèle en éléments finis de mélange fluide/grains. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01517290

**HAL Id: hal-01517290**

**<https://hal.science/hal-01517290>**

Submitted on 3 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Modèle en éléments finis de mélange fluide/grains

J. Lambrechts<sup>1</sup>, F. Dubois<sup>2</sup>, J.-F. Remacle<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LMGC, Université de Montpellier 2, jonathan.lambrechts@uclouvain.be

<sup>2</sup> LMGC, Université de Montpellier 2, frederic.dubois@univ-montp2.fr

<sup>3</sup> CAAM, Rice University, jean-francois.remacle@uclouvain.be

**Résumé** — Un modèle de mélange fluide/grains est présenté. Pour la phase granulaire, la dynamique des contacts est calculée à l'échelle des grains. À une échelle supérieure, les équations de Navier-Stokes/Brinkman modélisent l'écoulement du fluide dans un milieu poreux. Ces équations sont résolues au moyen d'une méthode éléments finis. Cette approche permet de simuler dans un même modèle une transition continue entre, à concentration élevée de grains, un régime de Darcy et, à faible concentration, un écoulement fluide classique.

**Mots clés** — mélange fluide/grains, dynamique de contact, éléments finis

### 1 Modèle

Les mélanges fluide/grains sont présents dans un grand nombre d'applications industrielles et géophysiques comme les lits fluidisés, le mélange, les coulées de boues, les glissements de terrain ou les avalanches sous-marines. Le modèle de dynamique des contact LMGC90[1], développé par le LMGC permet de simuler des phases granulaires composées d'un grand nombre de grains de tailles et de formes différentes à des compacités variables. Cependant, le calcul explicite de l'écoulement fluide autour de chaque grain aurait un coût prohibitif. C'est pourquoi nous résolvons l'écoulement à une échelle supérieure, à laquelle chaque grain n'est pas pris en compte individuellement.

#### Équations de Navier-Stokes/Brinkman

Pour tenir compte de la concentration de grains (compacité) et de leur vitesse, les équations de Navier-Stokes sont moyennées sur un volume de contrôle  $dv$  d'une taille supérieure à l'échelle des grains [2]. L'équation de conservation du volume obtenue s'écrit simplement :

$$\nabla \cdot v_f + \nabla \cdot v_s = 0$$

où la vitesse d'ensemble de la phase fluide  $v_f = \frac{1}{dv} \int_{dv} v \xi dv_m$  est la moyenne de la vitesse fluide  $v$  sur le volume de contrôle,  $\xi$  valant 1 dans la phase fluide et 0 dans la phase liquide. De même,  $v_s$  désigne la vitesse d'ensemble de la phase solide. Dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, l'effet de la déviation de la vitesse locale par rapport à la vitesse moyenne et de l'entraînement du fluide par les grains est modélisé au moyen d'une viscosité modifiée  $\bar{\mu}$  et de l'ajout des paramétrisations de Darcy et Forchheimer.

$$\underbrace{\rho \frac{\partial v_f}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (v_f v^f) + \bar{\mu} (\nabla \cdot \nabla v_f - \nabla v^f \cdot \nabla \varepsilon) - \varepsilon \nabla p^f}_{\text{Navier-Stokes}} - \underbrace{\frac{\mu \varepsilon^2}{K_1} (v^f - v^s)}_{\text{Darcy}} - \underbrace{\frac{\rho}{K_2} |v^f - v^s| (v^f - v^s)}_{\text{Forchheimer}} = 0$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique du fluide,  $\varepsilon = \frac{1}{dv} \int_{dv} \xi dv_m$  la porosité,  $v^f = \frac{v_i}{\varepsilon}$  la vitesse fluide intrinsèque,  $p^f$  la pression intrinsèque,  $v^s = \frac{v_s}{1-\varepsilon}$  la vitesse solide intrinsèque  $K_1$  la perméabilité et  $K_2$  la perméabilité inertielle.

## Formulation éléments finis

Ces équations sont résolues au moyen d'une méthode éléments finis continus du second ordre de précision. Le choix de l'espace de discrétisation peut être problématique. Même dans un cas stationnaire à bas Reynolds (c'est à dire en négligeant les termes d'inerties et de Forchheimer), une stabilisation est nécessaire. En effet, à faible porosité, le terme de Darcy s'équilibre avec le gradient de pression. Pour satisfaire cet équilibre discrètement, il serait nécessaire d'utiliser un ordre de discrétisation de la pression supérieur à celui de la vitesse. Mais, pour une porosité proche de 1, le terme gradient de pression s'équilibre avec le terme visqueux, or pour satisfaire cet équilibre discrètement, l'ordre de discrétisation de la pression devrait être inférieur à celui de la vitesse.

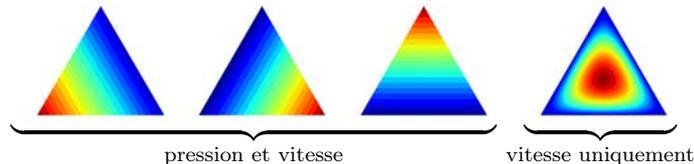


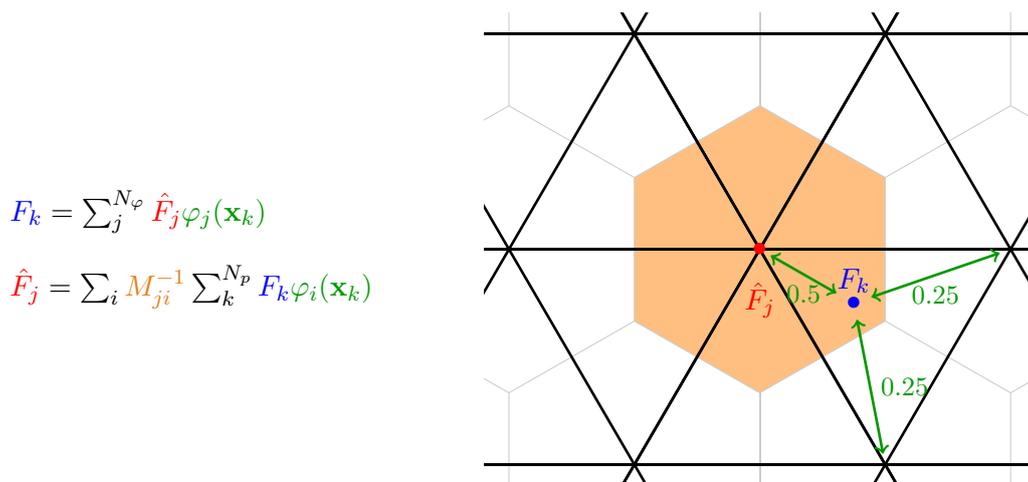
FIGURE 1 – Fonctions de forme  $P_1$  pour la pression et  $P_1^{\text{mini}}$  pour la vitesse

Nous employons une formulation mixte (Fig.1), éléments continus linéaires  $P_1$  pour la pression et  $P_1^{\text{mini}}$  pour la vitesse. Cette discrétisation est stable quelque soit la porosité [3]. A haut Reynolds, une stabilisation additionnelle de type SUPG/PSPG[4] reste nécessaire.

## Couplage spatial et temporel

Une itération temporelle complète du modèle couplé se déroule comme suit :

1. La pression et la vitesse fluide au pas de temps  $n+1$  sont calculées au moyen d'un schéma temporel implicite sur base de la vitesse et de la pression du fluide ainsi que de la position  $x_p^n$  et de la vitesse des grains  $v_p^n$  au pas de temps précédent.
2. La vitesse libre des grains au pas de temps suivant  $\tilde{v}_p^{n+1}$  est calculée sur base de la force  $f_p^n$  exercée par le fluide sur les grains :  $\tilde{v}_p^{n+1} = v_p^n + \Delta t \frac{f_p^n}{m_p}$ .
3. La vitesse des grains  $v_p^{n+1}$  est obtenue sur base de la vitesse libre en résolvant les contacts.
4. La position des grains est mise à jour :  $x_p^{n+1} = x_p^n + \Delta t v_p^{n+1}$ .



$$F_k = \sum_j^{N_\varphi} \hat{F}_j \varphi_j(\mathbf{x}_k)$$

$$\hat{F}_j = \sum_i M_{ji}^{-1} \sum_k^{N_p} F_k \varphi_i(\mathbf{x}_k)$$

FIGURE 2 – Transfert des champs des grains  $F_k$  aux nœuds du maillage  $\hat{F}_j$  et réciproquement.  $\varphi_j$  désigne la fonction de forme associée au nœud  $j$ ,  $M$  la matrice de masse.

L'étape 1 nécessite de projeter la masse et la vitesse des grains aux nœuds du maillage afin d'obtenir la compacité et la vitesse d'ensemble solide. Comme illustré sur la figure 2, ces projections peuvent être vues comme des projections  $L_2$  standard des valeurs des grains multipliées par des

fonctions Delta de Dirac. Pour éviter la résolution d'un système linéaire global, la matrice passage peut être diagonalisée. De manière similaire, l'étape 2 nécessite d'évaluer les champs éléments finis à la position des grains.

En procédant de cette manière naïve, bien que le fluide soit résolu par un schéma temporel implicite, le couplage est traité de manière explicite ce qui entraîne une condition CFL. Cette contrainte sur le pas de temps est si restrictive qu'elle rend le modèle inutilisable en pratique. Pour s'en affranchir, lors de la résolution du problème fluide à l'étape 1, (une approximation de) la vitesse libre des particules au temps  $n+1$  est utilisée à la place de la vitesse des particules au temps  $n$ . Ceci permet de traiter de manière implicite une approximation (la résolution des contacts restant explicite) de l'impact du gradient de pression sur la vitesse des particules. Concrètement, dans les équations de conservation, la vitesse solide  $v_s$  est remplacée par  $v_s - \frac{\Delta t}{\rho_s}(1 - \varepsilon)\nabla p^f$ , ce qui, pour l'équation de conservation du volume, revient à ajouter un terme de diffusion de la pression avec une diffusivité de  $\frac{\Delta t}{\rho_s}(1 - \varepsilon)$ . Notons que ce terme n'a aucun impact en l'absence de grains ( $\varepsilon = 1$ ).

## 2 Résultats

### Validation

Afin de valider l'approche moyennée, nous avons effectués des simulations sur des domaines restreints pour lesquels une approche directe consistant à calculer explicitement l'écoulement autour de chaque particule était possible. Les résultats des modèles direct et moyenné sont ensuite comparés. Pour des cas simples, le modèle direct lui même est validé à partir de résultats théoriques (Fig. 3).

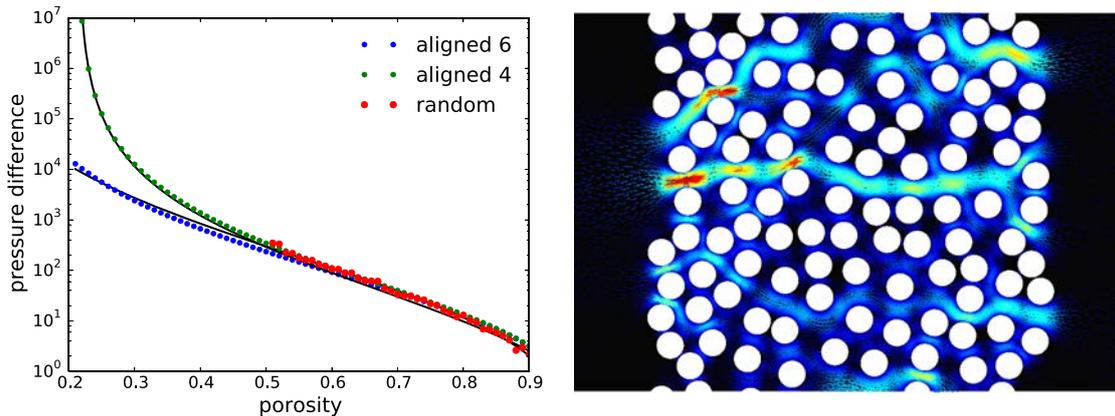


FIGURE 3 – À gauche, comparaison du saut de pression obtenu par une simulation directe avec des valeurs théoriques pour différents arrangements de grains : en carré (aligned 4), en hexagone (aligned 6)[5] ou aléatoire (random). À droite, exemple d'écoulement obtenu par simulation directe pour une porosité de 0.6 et un arrangement aléatoire.

## Mélange dans un écoulement de Couette

Le modèle a été utilisé pour simuler un mélange dans un écoulement de Couette reproduisant les conditions décrites dans [6]. Les résultats sont illustrés à la figure 4.



FIGURE 4 – Mélange dans un écoulement de Couette simulé par le modèle moyenné

## Conclusions et perspectives

Le modèle présenté est stable et permet d'effectuer des simulation à un coût bien moindre qu'un modèle directe. Des développements sont actuellement en cours, notamment l'extension au 3d et l'implémentation sur GPU. De nouvelles applications sont également envisagées. Les résultats obtenus seront détaillés lors de la présentation.

Nous remercions la société Hydro-Quebec pour son soutien financier à ce travail. Jonathan Lambrechts est chargé de recherche financé par le Fonds de la Recherche Scientifique (F.R.S.-FNRS, Belgique).

## Références

- [1] F. Radjai, F. Dubois. *Modélisation numérique discrète des matériaux granulaires*, Lavoisier, 2010.
- [2] S. Whitaker *Flow in Porous Media I : A Theoretical Derivation of Darcy's Law*, Transport in porous media 1, 3-25, 1986.
- [3] A. Hannukainen, M. Juntunen, R. Stenberg. *Computations with finite element methods for the Brinkman problem*, Computational Geosciences 15, 155-166, 2011.
- [4] A.N. Brooks, T.J.R. Hughes, *Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 32, 199-259, 1982
- [5] A. Tamayol, M. Bahrami. *Parallel flow in ordered fibrous structures : an analytical approach.*, ASME 2009 Fluids Engineering Division Summer Meeting, American Society of Mechanical Engineers, 1311-1321, 2009.
- [6] T. Dbouk, E. Lemaire, L. Lobry, F. Moukalled. *Shear-induced particle migration : Predictions from experimental evaluation of the particle stress tensor*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 198, 78-95, 2013