



HAL
open science

Modèle de comportement élastoplastique en transformations finies dans le cadre d'un formalisme quadridimensionnel

Mingchuan Wang, Emmanuelle Rouhaud, Benoît Panicaud, Richard Kerner,
Arjen Roos, Guillaume Altmeyer

► **To cite this version:**

Mingchuan Wang, Emmanuelle Rouhaud, Benoît Panicaud, Richard Kerner, Arjen Roos, et al.. Modèle de comportement élastoplastique en transformations finies dans le cadre d'un formalisme quadridimensionnel. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01517286

HAL Id: hal-01517286

<https://hal.science/hal-01517286>

Submitted on 3 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Modèle de comportement élastoplastique en transformations finies dans le cadre d'un formalisme quadridimensionnel

M. Wang¹, E. Rouhaud¹, B. Panicaud¹, R. Kerner², A. Roos¹, G. Altmeyer¹

¹ LASMIS, Université de Technologie de Troyes, {mingchuan.wang, emmanuelle.rouhaud, benoit.panicaud, arjen.roos, guillaume.altmeyer}@utt.fr

² LPTMC, Université Pierre et Marie Curie, richard.kerner@upmc.fr

Résumé — Il s'agit de proposer une relation constitutive pour un matériau élastoplastique respectant le principe de covariance en mécanique des milieux continus, en relation avec l'objectivité matérielle. Au lieu des approches classiques dans lesquelles différentes dérivées objectives sont utilisées, un formalisme quadridimensionnel est proposé. De plus, la dérivée de Lie est utilisée comme une vraie variation par rapport au temps pour établir un modèle élastoplastique incrémental. Les simulations numériques sur une structure simple ont été mises en oeuvre pour tester les modèles.

Mots clés — modèle de comportement, plasticité, transformation finie, objectivité matérielle, dérivé de Lie.

1 Introduction

Pour établir un modèle élastoplastique incrémental concernant les transformations finies, il faut respecter le principe d'objectivité, un critère classique en mécanique des milieux continus pour s'assurer que le modèle constitutif vérifie les faits physiques suivants :

1) Invariance par rapport à la superposition de mouvement de corps rigide : quand un matériau non déformé est sollicité par un mouvement de corps rigide, aucune contrainte supplémentaire n'est générée dans le matériau.

2) Indépendance par rapport aux changements d'observateurs (ou référentiels) : lorsqu'un observateur se déplace autour d'un matériau non déformé, aucune contrainte supplémentaire n'est générée dans le matériau, quelque soit le mouvement de l'observateur.

Ce principe est important pour les effets dissipatifs dans les solides, car une formulation en variation est utilisée pour établir les modèles de comportement. Dans ce cas, en effet, une dérivée objective du tenseur des contraintes est nécessaire, également appelée transport objectif. Cependant, de nombreux transports objectifs ont été proposés, mais la difficulté reste la sélection de ces transports objectifs pour construire un modèle élastoplastique cohérent.

Par ailleurs, le formalisme quadridimensionnel de la théorie de la Relativité garantit que les tenseurs, les opérations et toutes les lois physiques sont par construction indifférents aux changements d'observateurs selon le principe de covariance. En outre, l'utilisation de ce formalisme permet également de définir une dérivée spécifique, la dérivée de Lie, utilisable pour les modèles de comportement. La dérivée de Lie d'une densité de tenseur \mathbf{A} dans le champ de vitesse \mathbf{v} , notée $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\mathbf{A})$, décrit la variation de \mathbf{A} :

$$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{A(\xi^\mu + v^\mu(t' - t)) - A(\xi^\mu)}{t' - t} = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\mathbf{A})(\xi^\mu) \quad (1)$$

vue par la particule de matière en mouvement. La particule se déplace de l'événement ξ^μ (à l'instant t), à l'événement $\xi^\mu + v^\mu(t' - t)$ (à l'instant t') avec la vitesse \mathbf{v} .

2 Modélisation de l'élastoplasticité dans un formalisme 4D

Les modèles élastoplastiques dans le cadre d'un formalisme 4D ont été tout d'abord construits à partir de la décomposition additive du taux de déformation ($d = (\frac{\partial v}{\partial x})^{sym}$)

$$d_{\mu\nu} = d_{e\mu\nu} + d_{p\mu\nu} \quad (2)$$

Selon cette décomposition, deux comportements sont nécessaires : le modèle hypoélastique pour obtenir d_e et le modèle de plasticité pour obtenir d_p . Comme la dérivée de Lie correspond à la seule variation par rapport au temps qui soit à la fois covariante et indifférente à la superposition d'un mouvement de corps rigide, les relations seront naturellement recherchées entre la dérivée de Lie du tenseur des contraintes de Cauchy et le taux de déformation [2]. On peut en particulier montrer que la dérivée de Lie de la déformation est égal au taux de déformation ($\mathcal{L}_v(e)_{\mu\nu} = d_{\mu\nu}$) où e est le tenseur des déformations d'Euler Lagrange.

2.1 Modélisation de l'hypoélasticité à partir de l'hyperélasticité

Le modèle 4D hyperélastique choisi correspond à un modèle linéaire exprimé avec les coefficients de Lamé λ, μ [4] :

$$\sigma^{\mu\nu} = \lambda e_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + 2\mu e^{\mu\nu} \quad (3)$$

où g est le tenseur métrique qui dans un référentiel inertiel orthonormé prend la forme :

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Deux types de modèle hypoélastique sont ensuite développés à partir du modèle hyperélastique ci-dessus :

- Un pseudo modèle, obtenu en remplaçant les tenseurs des contraintes et des déformations dans le modèle hyperélastique par leur dérivée de Lie respectivement :

$$\mathcal{L}_{v_e}(\sigma^{\mu\nu}) = \lambda d_{e\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + 2\mu d_{e\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \quad (5)$$

sachant que $\mathcal{L}_{v_e}(e_{e\mu\nu}) = d_{e\mu\nu}$

- Un vrai modèle, obtenu en évaluant les dérivées de Lie de chaque côté de l'équation hyperélastique :

$$\mathcal{L}_{v_e}(\sigma^{\mu\nu}) = \mathcal{L}_{v_e}(\lambda e_{\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} + 2\mu e_{\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta}) \quad (6)$$

On peut représenter ces modèles sous une forme plus générale en utilisant un tenseur d'ordre quatre :

$$\mathcal{L}_{v_e}(\sigma^{\mu\nu}) = C^{\mu\nu\alpha\beta} d_{e\alpha\beta} \quad (7)$$

$$\text{Pseudo modèle } C_1^{\mu\nu\alpha\beta} = \lambda \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + 2\mu (\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta})^{Sym}$$

$$\begin{aligned} \text{Vrai modèle } C_2^{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{\lambda^2}{\mu(N\lambda + 2\mu)} (\eta_{\gamma\delta} \sigma^{\gamma\delta}) (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta}) + \lambda \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{\mu} \eta^{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta} \\ &+ \frac{2\lambda}{N\lambda + 2\mu} \eta_{\gamma\delta} \sigma^{\gamma\delta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + 2\mu \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \sigma^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - 4(\eta^{\mu\alpha} \sigma^{\beta\nu})^{Sym} \end{aligned}$$

2.2 Modélisation de la plasticité

Le modèle de plasticité est obtenu en utilisant la théorie du potentiel plastique associé avec un écrouissage isotrope, caractérisé par le taille de la surface plastique $\kappa(r)$ [1]. Un comportement entre le taux de déformation plastique d_p et le déviateur de la contrainte σ^D est obtenu :

$$\begin{aligned} d_{p\mu\nu} &= \Xi \sigma_{\mu\nu}^D \quad (8) \\ \text{où } \Xi &= \frac{\mathcal{L}_{v_p}(\sigma_{eff})}{\frac{\partial \kappa}{\partial r} \sigma_{eff}} \end{aligned}$$

où le critère de plasticité de Von Mises est utilisé,

$$\begin{cases} \mathcal{F} = \sigma_{eff} - \kappa(r) \leq 0 \\ \sigma_{eff} = \sqrt{\sigma^{D\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}^D} \end{cases} \quad (9)$$

On peut alors vérifier que :

$$\mathcal{L}_{v_p}(\sigma_{eff}) = \frac{\partial \sigma_{eff}}{\partial \sigma^{\mu\nu}} \frac{d\sigma^{\mu\nu}}{dt} \quad (10)$$

Le modèle plastique devient :

$$d_{p_{\mu\nu}} = \Xi \sigma_{\mu\nu}^D \quad (11)$$

$$\text{où } \Xi = \frac{\frac{d\sigma^{\alpha\beta}}{dt} \sigma_{\alpha\beta}^D}{\frac{\partial \kappa}{\partial r} \sigma_{eff}^2}$$

En combinant un des modèles hypoélastiques et le modèle plastique, deux modèles élastoplastique sont obtenus :

$$\mathcal{L}_{v_e}(\sigma)^{\mu\nu} = C^{\mu\nu\alpha\beta} (d_{\alpha\beta} - \Xi \sigma_{\alpha\beta}^D) \quad (12)$$

en fonction du modèle hypoélastique choisi.

3 Application du modèle 4D à la simulation numérique 3D

Pour utiliser les modèles obtenus dans le cadre du formalisme quadridimensionnel avec un logiciel de calcul FEM 3D (Zebulon[®]) et les comparer avec des modèles 3D existants, une projection du modèle 4D sur la 3D a été faite. On obtient alors pour le pseudo modèle 3D :

$$\mathcal{L}_{v_e}(\sigma^{ij}) = \lambda tr(d) I^{ij} + 2\mu d^{ij} - 2\mu d_p^{ij} \quad (13)$$

$$\text{où } d_p^{ij} = \frac{2\mu d_{ab} \sigma^{Dab} + 2d_{am} \sigma_b^m \sigma^{Dab} - \sigma_{ab} \sigma^{Dab} trd}{\sigma^{Dab} \sigma_{ab}^D (\partial \kappa / \partial r + 2\mu) + 2\sigma_{am}^D \sigma_b^m \sigma^{Dab}} \sigma^{Dij}$$

et pour le vrai modèle en 3D :

$$\mathcal{L}_{v_e}(\sigma^{ij}) = \xi_1 I^{ij} + \xi_2 d^{ij} - \xi_2 d_p^{ij} + trd \sigma^{ij} - 2(d^{ia} \sigma_a^j + d^{ja} \sigma_a^i) + 2(d_p^{ia} \sigma_a^j + d_p^{ja} \sigma_a^i) \quad (14)$$

$$\text{où } \xi_1 = \frac{\lambda^2}{\mu(3\lambda + 2\mu)} tr \sigma trd + \lambda trd - \frac{\lambda}{\mu} \sigma^{ab} (d_{ab} - d_{pab})$$

$$\xi_2 = \frac{2\lambda}{3\lambda + 2\mu} tr \sigma + 2\mu$$

$$d_p^{ij} = \frac{\xi_2 d_{ab} \sigma^{Dab} - 2d_{am} \sigma_b^m \sigma^{Dab}}{\sigma^{Dab} \sigma_{Dab} (\partial \kappa / \partial r + \xi_2) - 2\sigma_{am}^D \sigma_b^m \sigma^{Dab}} \sigma^{Dij} \quad (15)$$

Où tr représente la trace du tenseur considéré.

Les modèles 4D projetés sur la 3D (pseudo modèle ou vrai modèle) sont comparés avec un modèle classique qui utilise une décomposition multiplicative et la dérivé de Jaumann [3]. Ce modèle est :

$$\frac{D^J \sigma^{ij}}{Dt} = \lambda tr(d) I^{ij} + 2\mu d^{ij} - \frac{4\mu^2 d^{ab} \sigma_{ab}^D}{(\frac{\partial \kappa}{\partial r} + 2\mu) (\sigma_{cd}^D \sigma^{Dcd})} \sigma^{Dij} \quad (16)$$

La simulation d'un cisaillement simple a été réalisée avec les différents modèles pour comparaison (Fig. 1). A partir de cette figure, on peut voir que les composantes σ_{12} sont proches pour les trois modèles. Les autres composantes (σ_{11} et σ_{33}) par contre, présentent des différences significatives. Parce que le vrai modèle hypoélastique correspond à un modèle élastique de type Hookéan, il donne exactement le même résultat que le modèle élastique initial dans le domaine élastique. En outre, des simulations numériques sur une structure poutre ont également été mises en œuvre pour tester la pertinence des différents modèles, notamment dans la gestion du retour élastique.

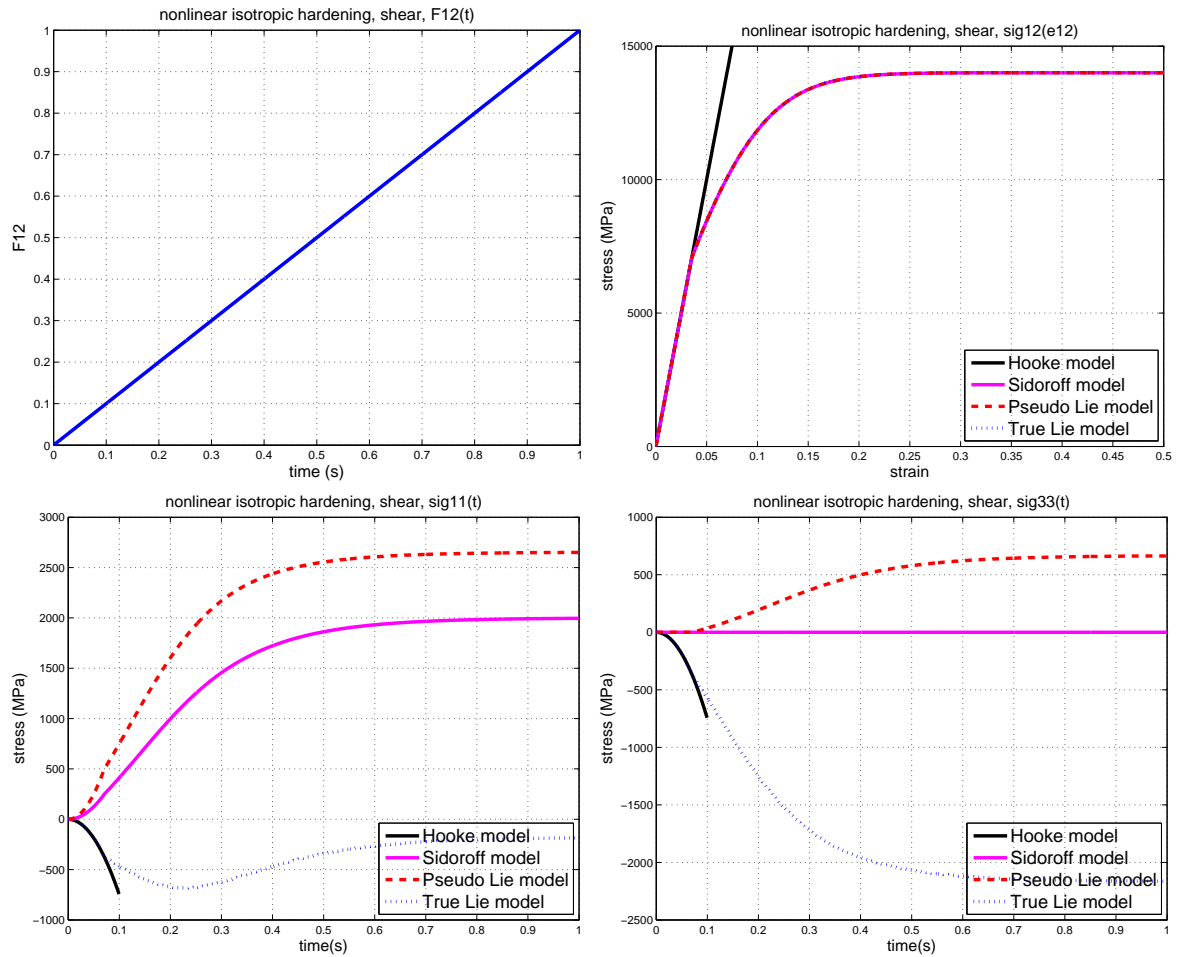


FIGURE 1 – Composantes des contraintes en fonction du temps pour un cisaillement simple

4 Conclusion

Des modèles élastoplastiques ont été construits grâce au formalisme 4D dans le cadre duquel tenseurs et opérations sont nécessairement indifférents au changement d'observateurs et en utilisant la dérivée de Lie qui est une dérivée par rapport au temps indifférente à la superposition de mouvements de corps rigides. Dans la procédure de la modélisation, les modèles incrémentaux de l'hypoélasticité et la plasticité sont traités avec la dérivée de Lie et les modèles sont combinés par une décomposition additive simple. Cela démontre que la 3D est un cas particulier du formalisme 4D qui peut proposer de nouveaux modèles. Enfin, les simulations numériques sur un point matériel et une structure simple illustrent l'avantage des modèles développés avec le formalisme 4D.

Références

- [1] A. S. Khan, S. Huang, *Continuum Theory of Plasticity*, John Wiley & Sons, Inc, 1995.
- [2] B. Panicaud, E. Rouhaud, R. Kerner. *Canonical frame-indifferent transport operators with the four-dimensional formalism of differential geometry*, Computational Materials Science, 120-130, 2013.
- [3] F. Sidoroff. *Incremental constitutive equation for large strain elasto plasticity*, International Journal of Engineering Science, 19-26, 1982.
- [4] M. Wang, E. Rouhaud, A. Roos, B. Panicaud, R. Kerner, O. Ameline. *Anisotropic elastic behaviour using the four-dimensional formalism of differential geometry*, Computational Materials Science, 132-141, 2014.