



HAL
open science

Sur la sensibilité paramétrique de l'Hyper-réduction en Dynamique des structures

Nissrine Akkari, Fatima Daim, David Ryckelynck

► **To cite this version:**

Nissrine Akkari, Fatima Daim, David Ryckelynck. Sur la sensibilité paramétrique de l'Hyper-réduction en Dynamique des structures. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. 4 p. hal-01517285

HAL Id: hal-01517285

<https://hal.science/hal-01517285>

Submitted on 3 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Sur la sensibilité paramétrique de l'Hyper-réduction en Dynamique des structures

N. Akkari¹, F. Daim², D. Ryckelynck¹

¹ Centre des Matériaux, Mines ParisTech, {nissrine.akkari,david.ryckelynck}@mines-paristech.fr

² ESI Group, fatima.daim@esi-group.com

Résumé — Dans cette communication, nous présentons un résultat mathématique sur la sensibilité paramétrique de la technique d'Hyper-réduction de modèles, par une base réduite obtenue grâce à la méthode de la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) et un domaine d'intégration réduit (RID) associé à cette base. Nous nous intéressons plus particulièrement au cadre des équations hyperboliques de la dynamique des structures avec une loi de comportement visco-élastique. Nous présenterons au cours de la conférence une comparaison avec des simulations numériques pour la configuration d'un cas académique de dynamique d'une plaque d'acier.

Mots clés — Hyper-réduction, Base réduite POD, RID, Equations hyperboliques visco-élastiques, Sensibilité paramétrique.

1 Introduction et résultats principaux

1.1 Introduction

Les problèmes aux limites avec évolution paramétrique sont un vrai enjeu dans différentes thématiques de recherche, comme les problèmes de contrôle optimal, les problèmes inverses, etc... Par exemple en dynamique des structures, ces études nécessitent la résolution multiple des équations hyperboliques de l'équilibre des puissances virtuelles. Or pour un paramètre donné, une simulation complète de ces équations est très onéreuse en temps de calcul, même si on est situé dans un cadre de dynamique explicite. Et, a fortiori quand le paramètre se déplace dans un intervalle donné. La technique d'Hyper-réduction [4] faisant appel à une base réduite et un domaine d'intégration réduit (RID) sur lequel la solution dynamique est déterminée grâce à une formulation Petrov-Galerkin, a gagné beaucoup d'importance dans le contexte de la dynamique des structures. Cette technique de calcul de données manquantes sur une partie du domaine de la structure, est complétée par une étape d'extrapolation pour construire le champs partout en espace. Aussi, l'étude de la sensibilité de cette technique de réduction de modèles vis-à-vis l'enjeu des études paramétriques, est indispensable afin de préciser le domaine de validité d'un modèle d'ordre réduit de référence pour une conception capable entre autres de réaliser des optimisations paramétriques en dynamique, d'obtenir un calcul en temps réel [1], mais aussi d'initialiser et accélérer les algorithmes itératifs d'enrichissement de bases réduites, comme par exemple l'algorithme de Greedy. Nous proposons dans cette communication, un développement mathématique d'une estimation a priori de la norme L^2 de l'erreur paramétrique associée à l'Hyper-réduction des équations viscoélastiques de la dynamique par une base réduite POD [2] et un RID de référence. Cette borne supérieure a priori mesure l'erreur par rapport à la variation du paramètre de la viscosité. Elle est obtenue par la résolution d'inégalités différentielles couplées et linéaires. Ce résultat est une généralisation de celui développé dans [3], pour le cas d'équations paraboliques quasi-nonlinéaires, plus particulièrement dans le cadre d'un écoulement fluide incompressible.

1.2 Formulation mathématique du problème

Nous notons $X = [L^2(\Omega)]^d$ et $V = [H^1(\Omega)]^d$. Où, Ω est un ouvert borné, régulier, connexe et régulier de \mathbb{R}^d , $d = 2$, ou 3 . Et, nous notons V^h un sous-espace de V de dimension M grande. Soit $(\varphi)_{i=1,\dots,M}$ une base éléments finis de V^h . Alors, les équations hyperboliques visco-élastiques sont données par leur

formulation Galerkin à deux champs en dimension M : Trouver, u_v^h et $v_v^h \in L^2(0, T; V^h)$ telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} u_v^h, w^h \right)_X = (v_v^h, w^h)_X \quad \forall w^h \in V^h \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} v_v^h, w^h \right)_X = - \left(E \varepsilon(u_v^h) + \nu \varepsilon(v_v^h), \varepsilon(w^h) \right)_{[L^2(\Omega)]^{d \times d}} + (F, w^h)_X + \int_{\Gamma_s} T.n w^h d\Gamma_s \quad \forall w^h \in V^h \quad . \quad (1) \\ (u_v^h(0), w^h)_X = (u_0^h, w^h)_X \quad \forall w^h \in V_R^h \\ (v_v^h(0), w^h)_X = (v_0^h, w^h)_X \quad \forall w^h \in V_R^h \end{array} \right.$$

Où, E est le module d'Young, ν est la viscosité, ε est le tenseur de déformation, F est une force extérieure et T est une force de contact sur une partie Γ_s du bord de Ω . Nous notons $\Phi^{v_0} = (\Phi_n^{v_0})_{n=1, \dots, M}$ la suite des vecteurs propres POD associés à une solution de référence $u_{v_0}^h$ sur un intervalle de temps $(0, T)$. Soit Ω_R le RID associé à la base POD de référence. Aussi, Ω_R est l'union de tous les éléments e du domaine Ω , où certaines positions des degrés de liberté renvoient des valeurs maximales des normes respectives des vecteurs propres POD de référence Φ^{v_0} , ou de leurs gradients symétriques $\varepsilon(\Phi^{v_0})$. Nous définissons les notations suivantes : $\forall k = 1, \dots, M$, $\Phi_k^{v_0} = \sum_{i=1}^M \varphi_i A_{ik}$. Où, A désigne la matrice dont les

colonnes sont les coordonnées des vecteurs propres POD. $\forall k = 1, \dots, N$, ($N \ll M$), $\Phi_k^R = \sum_{i=1}^M \varphi_i B_{ii} A_{ik}$, de

sorte que $\int_{\Omega \setminus \Omega_R} \|\Phi_k^R\|^2 dx = 0$. B est la matrice donnée par : $B = Z^T Z$. Où, Z vérifie : $Z_{ij} = 1$ si le $j^{\text{ème}}$ degré de liberté est associée à la $i^{\text{ème}}$ équation d'équilibre Hyper-réduite. Sinon, Z_{ij} est égal à zéro. Pour plus de détails concernant la construction du RID et de la base $(\Phi_k^R)_{k=1, \dots, N}$, nous renvoyons à [4]. Par continuité, il existe une interface I incluse dans Ω_R , sur laquelle Φ_k^R et $\Phi_k^\delta = \Phi_k - \Phi_k^R$ ne sont pas nulles. Les Φ_k^δ , $k = 1, \dots, N$ sont nulles presque partout sur $\tilde{\Omega}_R = \Omega_R \setminus I$.

Formulation Petrov-Galerkin

Soient $V_N^h = \text{Span} \{ \Phi_1^{v_0}, \dots, \Phi_N^{v_0} \}$ et $V_R^N = \text{Span} \{ \Phi_1^R, \dots, \Phi_N^R \}$. L'Hyper-réduction des équations hyperboliques visco-élastiques (1) est possible grâce à la formulation Petrov-Galerkin en dimension N suivante : Trouver $\hat{u}_{v, v_0} = \sum_{n=1}^N a_n^v \Phi_n^{v_0}$ et $\hat{v}_{v, v_0} = \sum_{n=1}^N \gamma_n^v \Phi_n^{v_0} \in L^2(0, T; V_N^h)$, telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_{v, v_0}, \hat{w} \right)_{[L^2(\Omega_R)]^d} = (\hat{v}_{v, v_0}, \hat{w})_{[L^2(\Omega_R)]^d} \quad \forall \hat{w} \in V_R^N \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} \hat{v}_{v, v_0}, \hat{w} \right)_{[L^2(\Omega_R)]^d} = - \left(E \varepsilon(\hat{u}_{v, v_0}) + \nu \varepsilon(\hat{v}_{v, v_0}), \varepsilon(\hat{w}) \right)_{[L^2(\Omega_R)]^{d \times d}} \\ \quad + (F, \hat{w})_{[L^2(\Omega_R)]^d} + \int_{\Gamma_s \cap \partial \Omega_R} T.n \hat{w} d(\Gamma_s \cap \partial \Omega_R) \quad \forall \hat{w} \in V_R^N \\ (\hat{u}_{v, v_0}(0), \hat{w})_{[L^2(\Omega_R)]^d} = (u_0^h, \hat{w})_{[L^2(\Omega_R)]^d} \quad \forall \hat{w} \in V_R^N \\ (\hat{v}_{v, v_0}(0), \hat{w})_{[L^2(\Omega_R)]^d} = (v_0^h, \hat{w})_{[L^2(\Omega_R)]^d} \quad \forall \hat{w} \in V_R^N \end{array} \right. \quad . \quad (2)$$

Nous couplons au problème (2) la correction suivante sur l'interface I :

$$\hat{v}_{v, v_0}(x) = \int_{\tilde{\Omega}_R} \mathcal{R}(x, \tilde{x}) \hat{v}_{v, v_0}(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad \forall x \in I. \quad (3)$$

Où, $\mathcal{R}(x, \tilde{x}) = \sum_{n=1}^N \Phi_n^{v_0}(x) \Phi_n^R(\tilde{x})$, $\forall (x, \tilde{x}) \in I \times \tilde{\Omega}_R$.

Nous nous intéressons à l'étude paramétrique a priori de la sensibilité du modèle Hyper-réduit par POD qui décrit l'évolution de l'approximation $\hat{u}_{v, v_0}(t)$ de $u_v^h(t)$, dans le sous-espace POD de dimension N engendré par $\{ \Phi_1^{v_0}, \dots, \Phi_N^{v_0} \}$. Aussi, nous cherchons une borne supérieure a priori de $\|u_v^h - \hat{u}_{v, v_0}\|_{L^2(0, T; X)}^2$. Pour répondre à cet objectif, nous considérons $\|u_v^h - \hat{u}_{v, v_0}\|_{L^2(0, T; [L^2(\Omega_R)]^d)}^2$ comme un indicateur de l'erreur $\|u_v^h - \hat{u}_{v, v_0}\|_{L^2(0, T; X)}^2$ associée à l'Hyper-réduction et définie sur tout le domaine Ω .

1.3 Résultat principal

Résultat formel 1

$$\|u_{\mathbf{v}}^h - \hat{u}_{\mathbf{v}, \mathbf{v}_0}\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega_R)]^d)}^2 \leq C_1(N, \mathbf{v}_0, T) + C_2(\mathbf{v}_0, T) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|^2.$$

Où, $C_1(N, \mathbf{v}_0, T) = \|u_{\mathbf{v}_0}^h - \hat{u}_{\mathbf{v}_0}\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega_R)]^d)}^2$ est l'erreur liée à l'Hyper-réduction et à la troncature des modes POD pour $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$.

Et, $C_2(\mathbf{v}_0, T)$ est une constante strictement positive qui dépend de \mathbf{v}_0 et du temps, que nous détaillerons dans ce qui suit.

Le résultat formel 1 atteste la garantie de la réduction de modèles lorsque la viscosité \mathbf{v} s'écarte de celle de référence. En plus, ce résultat procure un outil pratique afin de déterminer un domaine de validité de la base réduite de référence et du RID associé, à reproduire différentes solutions paramétriques. Dans ce qui suit, nous donnons les grandes lignes de la preuve.

2 Etude paramétrique a priori de l'erreur liée à l'Hyper-réduction par une base POD de référence

Résultat intermédiaire

Soient P et Q deux matrices symétriques définies par : $\forall i, j = 1, \dots, N, P_{ij} = \int_{\Omega_R} \Phi_i^{\mathbf{v}_0} \Phi_j^{\mathbf{v}_0} dx$ et $Q_{ij} = \int_{\Omega_R} \Phi_i^R \Phi_j^R$. En effet, le RID Ω_R est choisi pour que P et Q soient définies positives. Nous démontrons :

Proposition 1 $\forall u = \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n^{\mathbf{v}_0} \in V_N^h$, nous notons $u^R = \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n^R$ et $u^\delta = \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n^\delta$. Alors, il existe c un réel strictement positif tel que : $\|u^\delta\|_{[L^2(\Omega_R)]^d}^2 \leq c \|u\|_{[L^2(\Omega_R)]^d}^2$.

Preuve. Soit $U = (a_1, a_2, \dots, a_N)$, alors : $\|u^\delta\|_{[L^2(\Omega_R)]^d}^2 = \|u - u^R\|_{[L^2(\Omega_R)]^d}^2 \leq 2 \|u\|_{[L^2(\Omega_R)]^d}^2 + 2 \|u^R\|_{[L^2(\Omega_R)]^d}^2 \leq 2 \|U\|_P^2 + 2 \|U\|_Q^2$.

Ce qui conclue au résultat grâce à l'équivalence des deux normes $\|\cdot\|_P$ and $\|\cdot\|_Q$ sur \mathbb{R}^N .

Contrôle de $\|u_{\mathbf{v}}^h - u_{\mathbf{v}_0}^h\|_{L^2(0,T;X)}^2$ **et** $\|\hat{u}_{\mathbf{v}, \mathbf{v}_0} - \hat{u}_{\mathbf{v}_0}\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega_R)]^d)}^2$

Proposition 2 Il existe $B(\mathbf{v}_0, T)$ un réel strictement positif, tel que :

$$\|u_{\mathbf{v}}^h - u_{\mathbf{v}_0}^h\|_{L^2(0,T;X)}^2 \leq B(\mathbf{v}_0, T) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|^2.$$

Preuve. La preuve de cette proposition est basée essentiellement sur des méthodes énergétiques classiques appliquées à la formulation Galerkin de dimension M couplée (1), de manière à obtenir un système de deux inégalités différentielles ordinaires, linéaires et couplées en $\|u_{\mathbf{v}}^h - u_{\mathbf{v}_0}^h\|_{L^2(0,T;X)}^2$ et $\|\hat{v}_{\mathbf{v}}^h - \hat{v}_{\mathbf{v}_0}^h\|_{L^2(0,T;X)}^2$. Ce système est résolu grâce à un lemme de Gronwall généralisé. Nous détaillerons la preuve au cours de la conférence.

Proposition 3 Il existe $\hat{B}(\mathbf{v}_0, T)$ un réel strictement positif, tel que :

$$\|\hat{u}_{\mathbf{v}, \mathbf{v}_0} - \hat{u}_{\mathbf{v}_0}\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega_R)]^d)}^2 \leq \hat{B}(\mathbf{v}_0, T) |\mathbf{v} - \mathbf{v}_0|^2.$$

Preuve. La preuve de cette proposition est basée essentiellement sur les points clefs suivants :

- Remplacer la fonction test \hat{w} dans (2) par $\Phi_n^R = \Phi_n^{\mathbf{v}_0} - \Phi_n^\delta, \forall n = 1, \dots, N$.
- Construire la formulation Petrov-Galerkin en $\hat{u}_{\mathbf{v}, \mathbf{v}_0} - \hat{u}_{\mathbf{v}_0}$.
- Utiliser la proposition 1, la correction (3) sur l'interface I et des techniques de majoration classiques afin de déduire un système de deux inégalités différentielles ordinaires, linéaires et couplées en $\|\hat{u}_{\mathbf{v}, \mathbf{v}_0} - \hat{u}_{\mathbf{v}_0}\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega_R)]^d)}^2$ et $\|\hat{v}_{\mathbf{v}, \mathbf{v}_0} - \hat{v}_{\mathbf{v}_0}\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega_R)]^d)}^2$.
- Résolution de ce système grâce à un lemme de Gronwall généralisé.

Nous détaillerons la preuve au cours de la conférence.

Preuve du résultat 1

$u_v^h - \hat{u}_{v,v_0} = u_{v_0}^h - \hat{u}_{v_0} + u_v^h - u_{v_0}^h + \hat{u}_{v_0} - \hat{u}_{v,v_0}$. Alors,

$$\begin{aligned} \|u_v^h - \hat{u}_{v,v_0}\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega_R)]^2)}^2 &\leq 2 \|u_{v_0}^h - \hat{u}_{v_0}\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega_R)]^d)}^2 + 2 \|u_v^h - u_{v_0}^h\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega_R)]^d)}^2 \\ &\quad + 2 \|\hat{u}_{v,v_0} - \hat{u}_{v_0}\|_{L^2(0,T;[L^2(\Omega_R)]^d)}^2 \end{aligned}$$

Ce qui conclue au résultat, en se basant sur les propositions 2 et 3. Alors, $C_2(v_0, T) = 2B(v_0, T) + 2\hat{B}(v_0, T)$.

3 Validation numérique

Notre configuration d'étude est le modèle d'une plaque en acier, sur laquelle nous imposons une vitesse initiale et qu'on lâche par la suite. La construction de la base réduite POD de référence et du domaine d'intégration réduit est associée à une solution dynamique éléments finis de référence pour $v_0 = 0$ calculée par le code VPS (Virtual Performance Solution) de dynamique rapide d'ESI group grâce à une résolution explicite (figure (1a)) en temps des équations (1). M , F_{int} et F_{ext} désignent respectivement la matrice de masse, le vecteur des puissances internes qui dépend de $u_{v_0}^h$ et $v_{v_0}^h$ et le vecteur des forces extérieures, dans la formulation matricielle des équations (1). Dans cette partie, nous nous contentons de présenter la reconstruction du champs de déplacements de référence à un instant donné, sur le RID (figure (1b)). La mise en oeuvre des résultats sur la sensibilité paramétrique sera présentée au cours de la conférence.

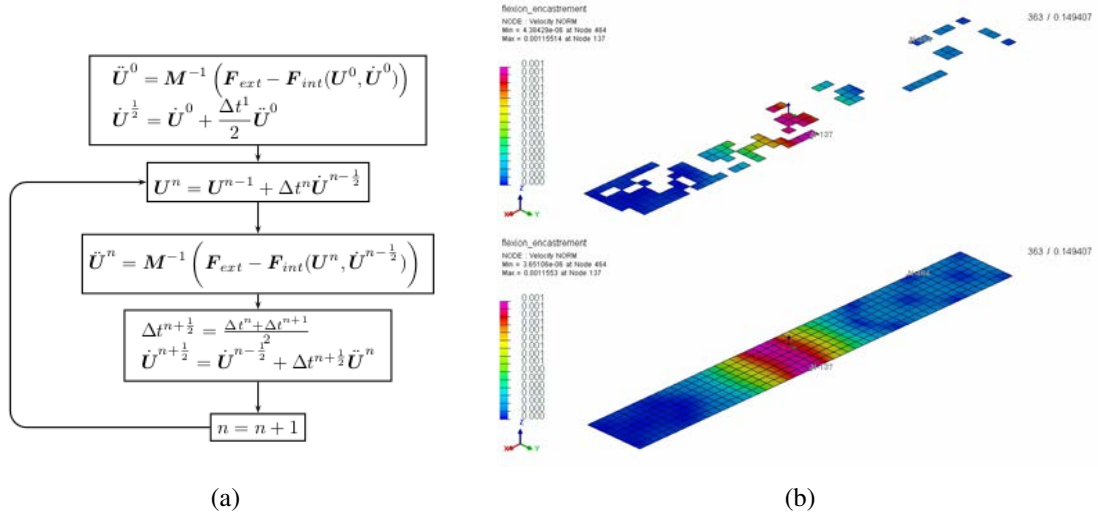


FIGURE 1 – (a) : Schéma de dynamique explicite. (b) : Solutions dynamiques éléments finis et Hyper-réduite.

3.1 Références bibliographiques

Références

- [1] T. Lieu, C. Farhat, M. Lesoinne. *Reduced-order fluid/structure modeling of a complete aircraft configuration*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(41–43), 5730–5742, 2006.
- [2] Lumley J.L.. *The structure of inhomogeneous turbulent flows*, Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation vol. In A.M. Yaglom and Tararsky, 166-178, 1967.
- [3] N. Akkari, A. Hamdouni, E. Liberge and M. Jazar, *On the sensitivity of the POD technique for a single parameterized quasi-nonlinear parabolic equation*, Journal of Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences. Vol 1 (1), 14, 2014.
- [4] D. Ryckelynck, *Hyper-reduction of mechanical models involving internal variables*, Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol. 77, 75–89, 2009.