



**HAL**  
open science

# Méthode des discontinuités fortes et rupture ductile en grandes déformations

Jérémie Bude, Delphine Brancherie, Jean-Marc Roelandt

► **To cite this version:**

Jérémie Bude, Delphine Brancherie, Jean-Marc Roelandt. Méthode des discontinuités fortes et rupture ductile en grandes déformations. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01517279

**HAL Id: hal-01517279**

**<https://hal.science/hal-01517279>**

Submitted on 3 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Méthode des discontinuités fortes et rupture ductile en grandes déformations

J. Bude<sup>1</sup>, D. Brancherie<sup>1</sup>, J.-M. Roelandt<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne, {jeremie.bude,delphine.brancherie,jean-marc.roelandt}@utc.fr*

---

## Résumé —

Nous présentons dans ce travail un modèle numérique permettant de décrire, dans le cadre des grandes déformations et de façon objective vis-à-vis du maillage, le comportement jusqu'à rupture des matériaux ductiles. Ce modèle s'appuie sur la méthode des discontinuités fortes : la régularisation du problème de localisation est rendue possible par l'introduction d'une discontinuité du champ de déplacement.

**Mots clés** — rupture ductile, discontinuités fortes, grandes déformations.

---

## 1 Introduction

Le travail présenté ici a pour objectif le développement d'un outil numérique. D'un point de vue phénoménologique, les matériaux ductiles sont caractérisés par un comportement fortement non linéaire induisant deux phases distinctes de la réponse globale jusqu'à rupture complète : la phase pré-pic durant laquelle se développent la plasticité et l'endommagement et la phase post-pic adoucissante conduisant au développement d'une macro-fissure responsable de la rupture.

Différents modèles tenant compte du développement, éventuellement simultané, de la plasticité et de l'endommagement, sont utilisés pour décrire la phase pré-pic du comportement. On peut citer notamment le modèle micromécanique de croissance des vides de Gurson [3] et ses extensions, le modèle de coalescence des vides de Rice et Tracey [7], ou encore le modèle de Mohr-Coulomb récemment étendu à la prise en compte de l'angle de Lode pour décrire le phénomène de transition d'un mode de rupture plan vers un mode de rupture oblique observé dans les plaques [1]. Si ces modèles permettent de décrire le comportement pré-pic, la description de la phase post-pic adoucissante nécessite de disposer d'un outil de régularisation permettant de garantir l'objectivité de la solution vis-à-vis de la discrétisation. Différentes méthodes de régularisation sont disponibles parmi lesquelles on peut citer les modèles de Cosserat [5], les modèles à viscosité ou encore les modèles à gradient et modèles non locaux [6]. Dans notre étude, la régularisation est assurée par la méthode des discontinuités fortes [4] dont la robustesse a déjà été mise en évidence dans le cadre de la description de la rupture de matériaux quasi-fragiles en petites déformations. Un des enjeux de ce travail est de proposer une méthode permettant de coupler les modèles élastoplastiques éventuellement endommageables couramment utilisés pour la description de la phase pré-pic à la méthode à discontinuité forte pour décrire de façon objective la phase post-pic du comportement dans un cadre de grandes déformations adapté à la description de matériaux ductiles. Un autre enjeu est de montrer que la méthode est capable de reproduire les trajets de fissuration spécifiques observés expérimentalement.

## 2 Approche proposée

La philosophie générale du travail repose sur une décomposition des mécanismes dissipatifs en dissipation volumique d'une part, afin de décrire la phase pré-pic du comportement pour laquelle plasticité et endommagement évoluent, et en dissipation surfacique d'autre part afin de décrire la phase post-pic d'autre part, qui correspond à l'apparition d'une zone de localisation des déformations plastiques et qui conduit à l'apparition d'une macro-fissure et à sa propagation.

## 2.1 Phase pré-pic et dissipation volumique

On propose plusieurs approches pour décrire la phase pré-pic du comportement ductile. Dans un premier temps, on propose d'utiliser une loi élasto-plastique de von Mises établie en configuration de référence et qui fait appel à la description multiplicative de la plasticité, le tout associé à un critère de Rice et Tracey utilisé en tant que critère de localisation basé sur le modèle de croissance des cavités exprimé dans (1). Le critère de Rice et Tracey (voir equation (2)) étant un critère de coalescence de cavités, on considère que la coalescence de cavités correspond au moment d'apparition d'une macro-fissure et donc de l'introduction d'une surface de discontinuité des déplacements et de son comportement adoucissant qui lui est associé.

$$\frac{\dot{R}}{R_0} = \alpha \exp\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_h}{\sigma_{eq}}\right) \dot{\epsilon}_{eq}^p \quad (1)$$

où  $\alpha$  est un paramètre qui ne dépend pas du matériau mais qui diffère selon les auteurs,  $R$  est le rayon actuel de la cavité,  $R_0$  est le rayon initial de la cavité, et  $\dot{\epsilon}_{eq}$  est le taux de déformation équivalente.

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)_c \quad (2)$$

Une comparaison sera faite entre l'utilisation d'un critère de Rice et Tracey et un critère basé sur l'endommagement de Lemaitre, dont l'évolution est exprimée dans l'équation (3). Pour ce dernier cas, un modèle découplé d'endommagement-plasticité sera formulé en se basant toujours sur le modèle de von Mises établi en configuration de référence.

$$\dot{D} = \frac{\dot{\epsilon}_{eq}^p}{1-D} \left(\frac{Y}{S}\right)^s \quad (3)$$

où  $s$  et  $S$  sont deux paramètres matériau,  $Y$  est le taux de restitution d'énergie élastique qui dépend notamment du taux de triaxialité des contraintes  $\sigma_h/\sigma_{eq}$  comme pour le modèle de Rice et Tracey (voir equation (1)).

Une discussion sera proposée concernant l'effet du choix du modèle "pré-pic" sur la réponse "post-pic", le choix du critère ayant une conséquence sur le moment d'introduction de la discontinuité de déplacement.

## 2.2 Phase post-pic et dissipation surfacique

Une fois la discontinuité introduite dans un élément, une dissipation surfacique est ajoutée à la dissipation volumique et les deux phénomènes de dissipation peuvent coexister.

La surface de discontinuité est, dans ce travail, considérée comme une interface cohésive (rigide avant son activation) dont le comportement traction/saut de déplacement permet de rendre compte des phénomènes de dissipation surfaciques associés au développement de macro-fissures ou de zones de localisation. Nous considérons un comportement rigide-endommageable pour la surface de discontinuité, développé dans le cadre de la thermodynamique des interfaces.

Elle permet de décrire les modes I et II de rupture. Un schéma décrivant le comportement de la surface cohésive en mode I est présenté en figure 1. Dans cette figure,  $\bar{\xi}$  est la variable interne associée au comportement adoucissant en mode I, tandis que  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$  et  $\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}$  sont la traction et le saut de déplacement projetés sur la normale à la discontinuité, respectivement.

Cette loi non-associée est écrite en termes de compliance et non en terme de rigidité, ce qui est une manière de traiter le caractère rigide de l'interface avant l'ouverture de fissure.

## 2.3 Implémentation numérique et résolution

Nous considérons dans ce travail un élément triangulaire à 3 nœuds enrichi par un saut de déplacement supposé constant dans l'élément. L'enrichissement de la cinématique de l'élément s'appuie sur la méthode des modes incompatibles ce qui permet de garantir un enrichissement élémentaire sans ajout de degrés de liberté nodaux ni modification de l'architecture globale du code de calcul. Ceci est rendu

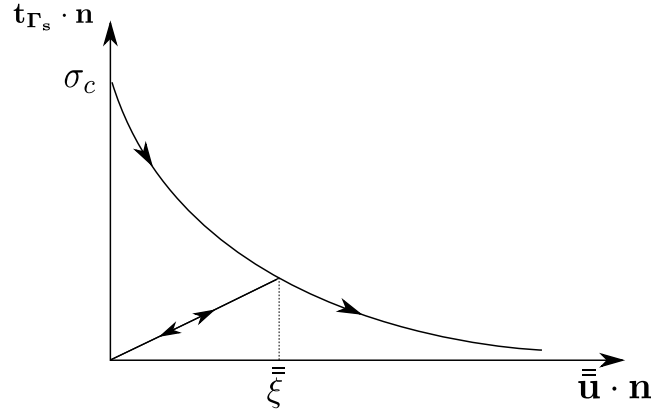


FIGURE 1 – loi cohésive en mode I

possible par condensation statique des degrés de libertés associés à la surface de discontinuité au niveau global. L'enrichissement cinématique se traduit par l'apparition du saut de déplacement comme inconnue élémentaire. La détermination de ces inconnues locales est assurée par la résolution au niveau élémentaire de la forme faible discrétisée de l'équation de continuité des tractions à travers la surface de discontinuité. La résolution du problème d'équilibre global est réalisée de façon classique moyennant la modification de la matrice de rigidité élémentaire afin de prendre en compte le développement de la surface de discontinuité (voir équations (4) et (5)).

Le cadre des grandes transformations suppose un choix d'écriture des équations. Dans ce travail, elles sont écrites en configuration courante pour laquelle on utilise le tenseur des contraintes de Khirchoff qui reste donc symétrique, ce qui facilite l'implémentation numérique du modèle.

Le système linéarisé à résoudre peut s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{e=1}^{Nel} \left\{ \mathbf{K}_{fd,n+1}^{e(i)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \mathbf{K}_{f\alpha,n+1}^{e(i)} \Delta \alpha_{n+1}^{(i)} \right\} = \mathbf{A}_{e=1}^{Nel} \left\{ \mathbf{f}_{n+1}^{ext,e(i)} - \mathbf{f}_{n+1}^{int,e(i)} \right\} & (4a) \\ \mathbf{h}_{n+1}^{e(i)} + \mathbf{K}_{hd,n+1}^{e(i)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} + \left[ \mathbf{K}_{h\alpha,n+1}^{e(i)} + \mathbf{F}_{h\alpha,n+1}^{e(i)} \right] \Delta \alpha_{n+1}^{(i)} = \mathbf{0} & (4b) \end{cases}$$

où les matrices tangentes élémentaires  $\mathbf{K}_{fd,n+1}^{e(i)}$ ,  $\mathbf{K}_{f\alpha,n+1}^{e(i)}$ ,  $\mathbf{K}_{hd,n+1}^{e(i)}$ ,  $\mathbf{K}_{h\alpha,n+1}^{e(i)}$  et  $\mathbf{F}_{h\alpha,n+1}^{e(i)}$  contiennent les dérivées des fonctions de formes compatibles et incompatibles (en configuration déformée), ainsi que les modules tangents des lois volumiques et surfaciques.  $\mathbf{h}_{n+1}^{e(i)}$  correspond à la forme faible de l'équation de continuité des tractions à travers la surface de discontinuité.

Après condensation statique de la seconde équation écrite au niveau élémentaire dans la première écrite au niveau global, le système se ramène à un système non-linéaire standard de la forme :

$$\mathbf{A}_{e=1}^{Nel} \left\{ \hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{e(i)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} \right\} = \mathbf{A}_{e=1}^{Nel} \left\{ \mathbf{f}_{n+1}^{ext,e(i)} - \mathbf{f}_{n+1}^{int,e(i)} \right\} \quad (5)$$

où  $\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{e(i)}$  est la matrice tangente élémentaire modifiée contenant les matrices élémentaires écrites dans le système (4).

Le système final à résoudre est donc équivalent à celui écrit dans le cadre des petites déformations, la seule différence étant la prise en compte d'une partie géométrique pour chacune des matrices élémentaires dans (4).

## 2.4 Résultats numériques

Le travail présenté propose un modèle pour des chargements quasi-statiques en deux dimensions et en déformations planes dans le cadre des grandes déformations. Nous présenterons divers exemples numériques permettant de mettre en évidence la caractère régularisant de l'approche proposée comme pour l'essai 'Compact Tension' étudié pour différents maillages et illustré dans la figure 2. Nous mettrons également en évidence la capacité à décrire des comportements observés expérimentalement, notamment les

trajets de fissuration complexes et le phénomène de "cup-cone" observé pour des essais axisymétriques.

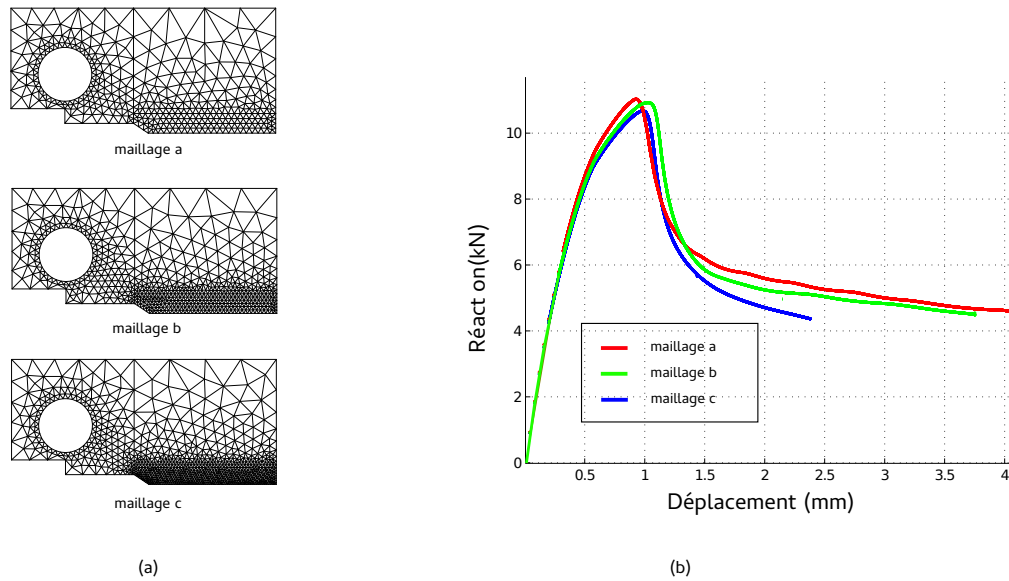


FIGURE 2 – (a) maillages d'une demi-épreuve CT, (b) résultats en termes de réaction/déplacement

## Références

- [1] Y. Bai, T. Wierzbicki, *Application of extended Mohr-Coulomb criterion to ductile fracture*, International Journal of Fracture, 161, 1-20, 2010.
- [2] D. Brancherie, A. Ibrahimbegovic, *Novel anisotropic continuum-discrete damage model capable of representing localized failure of massive structures. Part I : theoretical formulation and numerical implementation*, Journal of Engineering Computations, 26, 100-127, 2009.
- [3] A. L. Gurson, *Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth : Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media*, Journal of Engineering Material Technology, 99, 2-15, 1977.
- [4] J. Lemaitre, J.L. Chaboche, *Mechanics of Solid Materials*, University Press : Cambridge, 1990.
- [5] H.-B. Muhlhaus, I. Vardoulakis, *The thickness of shear bands in granular materials*, Geotechnique, 37, 271-283, 1987.
- [6] G. Pijaudier-Cabot, Z.P. Bazant, *Non local damage theory*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, 113, 1512-1533, 1987.
- [7] J.R. Rice, D.M. Tracey, *On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 17, 201-217, 1969.