

Surveiller un réseau électrique en plaçant des dispositifs sur ses liens : un problème difficile

Annie Chateau², Benoît Darties¹, Rodolphe Giroudeau², Mathias Weller²

¹Le2i FRE2005, CNRS, Arts et Métiers, Univ. Bourgogne Franche-Comté

²LIRMM-CNRS-UMR 5506-161, rue Ada 34090 Montpellier, France

Nous nous intéressons au problème du placement de dispositifs de mesures de déphasage (PMU) sur les liens d'un réseau électrique. Nous montrons que le problème de placer un nombre optimal de PMU est NP-difficile même si le graphe modélisant le réseau est biparti planaire de degré borné, et proposons de nouveaux résultats d'approximation. Ce travail a été en partie réalisé grâce au soutien financier du Conseil Régional de Bourgogne.

1 Introduction

La surveillance des nœuds d'un réseau électrique étendu haute tension peut s'opérer au moyen de dispositifs de mesure de déphasage (PMU - *Phasor Measurement Units*), qui permet d'observer différentes mesures (voltage, phase) au sein de ces nœuds (centrales, tours, transformateurs) selon des règles de surveillance, dans le but de monitorer le l'approvisionnement électrique. Le problème de placer un nombre optimal de PMU sur les nœuds afin d'avoir une surveillance complète du réseau, connu sous le nom de POWER DOMINATING SET, a été très étudié [7]. Une variante récente de ce problème [6], nommée POWER EDGE SET, consiste à disposer les PMU sur les liens du réseau plutôt que sur les nœuds, en considérant les deux règles suivantes : (1) les deux extrémités d'une arête portant un PMU sont surveillées et (2) si un nœud est surveillé et tous ses voisins aussi, sauf un, alors ce dernier devient surveillé. Le problème de placer un nombre minimum de PMU pour surveiller l'ensemble du réseau est connu pour être \mathcal{NP} -difficile dans le cas général, mais peut se résoudre dans les arbres en un temps polynomial. Dans ce papier, nous présentons de nouveaux résultats de complexité et des améliorations des résultats existants, notamment une meilleure borne de non-approximabilité.

Nous modélisons le réseau électrique par un graphe $G = (V, E)$ avec $|V| = n$. Nous notons $N_G(v)$ l'ensemble des voisins de $v \in V$ et $d_G(v) = |N_G(v)|$ son degré dans G . Les notations $V(G)$ et $E(G)$ désignent les sommets et les arêtes de G . Le problème POWER EDGE SET peut être vu comme un problème de propagation de couleur avec un ensemble de deux couleurs $\{0, 1\}$ désignant respectivement les états *non surveillé* et *surveillé*. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, entrée de POWER EDGE SET et $c(v)$ la couleur affectée au nœud v . Avant le placement des PMU, nous avons $c(v) = 0, \forall v \in V$. L'objectif de POWER EDGE SET est de trouver un ensemble d'arêtes $pmu(G) \subseteq E$ sur lesquelles placer les PMU, de coût minimum $s^* = |pmu(G)|$, et qui induit $c(v) = 1, \forall v \in V$ par application itérative des RÈGLE R_1 et RÈGLE R_2 suivantes :

- RÈGLE R_1 : si $(u, v) \in pmu(G)$, alors $c(u) = c(v) = 1$: les extrémités de (u, v) sont coloriées.
- RÈGLE R_2 : si $c(u) = 1, u' \in N_G(u)$ et $\forall v \in N_G(u) \setminus \{u'\}, c(v) = 0$, alors on a $c(u') = 1$: Si u' est le seul voisin non colorié d'un nœud u déjà colorié, alors u' est colorié par *propagation* de u .

Les auteurs de [6] proposent un résultat de complexité ainsi qu'un seuil d'approximation $(1.12 - \epsilon, \epsilon > 0)$ en se basant sur une E -réduction (réduction qui préserve l'appartenance aux classes de complexité PTAS et APX) à partir de VERTEX COVER. Ils proposent également un algorithme linéaire dans le cas des arbres en procédant à une réduction polynomiale vers PATH COVER. De plus, dans [5] les auteurs développent une méthode exacte, un programme linéaire avec des variables binaires, indexées sur les itérations nécessaires en utilisant les RÈGLE R_1 et RÈGLE R_2 de propagation, étendue à un programme linéaire en variables mixtes, dans le but d'être efficace en pratique.

2 Résultats de complexité

Théorème 1. *Le problème POWER EDGE SET est \mathcal{NP} -complet dans les graphes planaires de degré au plus 6.*

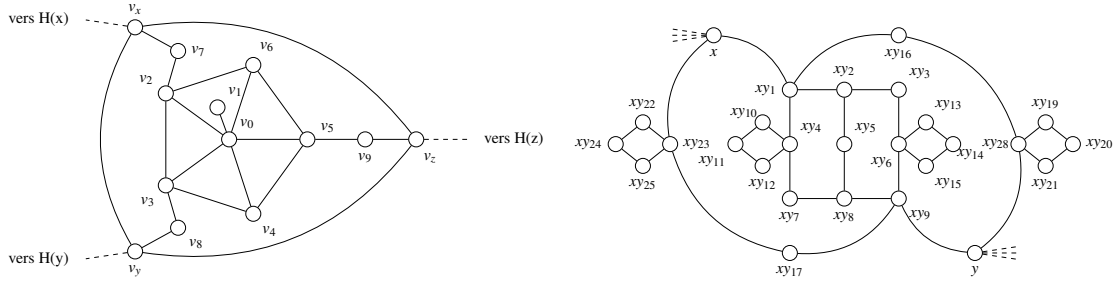

 (a) Gadget $H(v)$ pour un sommet v avec $N(v) = \{x, y, z\}$ dans G (b) Gadget $I(x, y)$, planaire, biparti et de degré maximum 4.

FIGURE 1: Gadgets pour les preuves des théorèmes 1 et 2.

Schéma de preuve La preuve est basée sur une réduction depuis le problème 3-REGULAR PLANAR VERTEX COVER (voir [3]) : compte-tenu d'un graphe planaire 3-régulier $G = (V, E)$ et d'un entier k en entrée, ce problème consiste à se demander s'il existe un ensemble $S \subseteq V$ de taille au plus k qui couvre les arêtes de G , c.à.d. $\forall \{u, v\} \in E$, on a $u \in S \vee v \in S$. Ce problème est connu pour être \mathcal{NP} -complet. Depuis G , construisons un graphe $G' = (V', E')$ comme suit : pour chaque sommet $v \in V$ avec $N_G(v) = \{x, y, z\}$, nous ajoutons à G' un gadget $H(v)$ représenté dans la Figure 1a. Pour chaque arête $(x, y) \in E$, nous ajoutons l'arête (x_y, y_x) à E' , connectant ainsi les gadgets $H(x)$ et $H(y)$. Considérons la coloration des sommets de $V(H(v))$ dans G' pour tout $v \in V$. Par étude des configurations sur $H(v)$, on montre les points suivants :

- Supposons que $c(v_x) = c(v_y) = c(v_z) = 1$ avant tout placement de PMU dans $H(v)$, c.à.d. que les trois sommets v_x, v_y, v_z ont été coloriés par propagation de leur voisin respectif x_v de $H(x)$, y_v de $H(y)$, et z_v de $H(z)$. Par propagation de v_x, v_y, v_z , on a respectivement $c(v_7) = 1$, $c(v_8) = 1$, $c(v_9) = 1$, puis $c(v_2) = 1$, $c(v_3) = 1$, $c(v_5) = 1$. Alors, 1 seul PMU supplémentaire est nécessaire et suffisant sur $E(H(v))$ pour obtenir $c(u) = 1, \forall u \in V(H(v))$, par exemple sur (v_0, v_6) .
- En revanche, s'il existe 1 à 3 sommets $u \in \{v_x, v_y, v_z\}$ tel que $c(u) = 0$, alors on ne pourra obtenir ni $c(v_2) = 1$, ni $c(v_3) = 1$, ni $c(v_5) = 1$ par propagation. Dès lors, 2 PMU seront nécessaires et suffisants pour obtenir $c(u) = 1, \forall u \in V(H(v))$, mais également $c(x_v) = c(y_v) = c(z_v) = 1$ par propagation de v_x, v_y , et v_z sur leur voisin respectif dans $H(x), H(y)$ et $H(z)$.

Dans toute solution optimale à POWER EDGE SET, chaque gadget $H(v)$ contient 1 ou 2 PMU (il n'y a pas d'intérêt à poser des PMU sur les arêtes connectant les gadgets). Les gadgets $H(v)$ avec 2 PMU induisent une coloration des 3 sommets v_x, v_y, v_z des 3 gadgets voisins $H(x), H(y), H(z)$ via les 3 arêtes en bordure, à l'inverse des gadgets avec 1 PMU. Soit k le nombre de gadgets avec 2 PMU. Depuis une solution dans G' de coût $2k + (n - k) = n + k$ on peut alors construire une solution à 3-REGULAR PLANAR VERTEX COVER de coût k en ajoutant dans S tous les sommets v tel que $H(v)$ contient 2 PMU, et réciproquement. \square

En complexifiant la construction de la preuve du Théorème 1, on peut étendre le résultat aux graphes planaires bipartis de degré 8. L'idée est de supprimer tous les cycles impairs du graphe G' de la preuve en remplaçant une arête de chaque cycle impair par une nouvelle structure, sans altérer le schéma de propagation de la coloration dans G' . Pour ce faire, nous proposons le gadget $I(x, y)$ présenté dans la figure 1b), et appelons $r(G, (x, y)) = (V(G) \cup V(I(x, y)), E(G) \cup E(I(x, y)) - (x, y))$ la transformation qui consiste à remplacer l'arête (x, y) d'un graphe G par le graphe $I(x, y)$.

Lemme 1. Soit G un graphe, (x, y) une arête de G , et $G' = r(G, (x, y))$. Si $|pmu(G)| = k$, alors $|pmu(G')| = k + 4$ et réciproquement.

Schéma de preuve Soit $pmu(G)$ une solution optimale dans G . La construction $I(x, y)$ est un graphe biparti où x et y sont à distances paires. Les sommets $xy_4, xy_6, xy_{23}, xy_{28}$ de $I(x, y)$ sont tous de degré 4 et connectés à des cycles de taille 4. Cette configuration requiert de placer un PMU sur chacun des 4 cycles pour en colorier leurs sommets respectifs, par ex. sur les 4 arêtes $S_I = \{\{xy_{11}, xy_{12}\}, \{xy_{14}, xy_{15}\}, \{xy_{20}, xy_{21}\}, \{xy_{24}, xy_{25}\}\}$. Nous aurons alors $c(xy_4) = c(xy_6) = c(xy_{23}) = c(xy_{28}) = 1$. On pose $pmu(G') = pmu(G) \cup S_I - \{x, y\}$. Si l'on avait $(x, y) \in pmu(G)$, alors on ajoute (x, xy_1) à $pmu(G')$. Il suffit de vérifier que $(x, xy_1) \cup S_I$ implique $c(u) = 1 \forall u \in V(I(x, y))$. Par propagations successives en chaîne, un ordre possible de coloration est $xy_7,$

Surveiller un réseau électrique en plaçant des dispositifs sur ses liens : un problème difficile

$xy_8, xy_{17}, xy_9, y, xy_{16}, xy_3, xy_2, xy_5$. Autrement, il suffit de vérifier (dans le sens x vers y seulement du fait de la symétrie de la construction) que :

1. si dans G nous avons $c(x) = 1$ et obtenions $c(y) = 1$ par propagation de x , ceci reste vrai dans G' : la séquence de propagation est similaire au placement de l'arête (x, xy_1) , si x propage vers xy_1 dans G' .
2. si $c(x) = 1$ mais x ne se propage pas sur y dans G , car il existe un nœud $u \in N_G(x) - y$ tel que $c(u) = 0$, alors dans G' tous les voisins xy_9 et xy_{28} de y dans $I(x, y)$ doivent être aussi coloriés, mais sans colorier y : les sommets xy_1, xy_6, xy_5, xy_8 , et xy_7 restent non coloriés, prévenant toute propagation de xy_9 ou xy_{28} sur y . De plus, si y vient à être colorié, sa propagation se poursuivra sur un sommet hors de $I(x, y)$, et $c(x) = 1$ impliquera la coloration de tous les sommets de I . \square

Théorème 2. POWER EDGE SET est \mathcal{NP} -complet dans les graphes planaires bipartis de degré au plus 8.

Schéma de preuve On reprend la preuve du Théorème 1 avec un nouveau gadget $H'(v)$ construit à partir du gadget $H(v)$ de la preuve et la construction r (figure 1b) : à partir de $H(v)$, on construit $H'(v)$ en remplaçant les 6 arêtes $\{v_x, v_y\}, \{v_y, v_z\}, \{v_x, v_z\}, \{v_2, v_3\}, \{v_0, v_4\}$ et $\{v_0, v_6\}$ par des graphes $I(v_x, v_y), I(v_y, v_z), I(v_x, v_z), I(v_2, v_3), I(v_0, v_4)$ et $I(v_0, v_6)$.

Le nouveau gadget $H'(v)$ de 169 sommets et 224 arêtes est biparti planaire de degré maximum 8. D'après le Lemme 1, si on a besoin de k PMU pour couvrir $H(v)$, alors on a besoin de $24 + k$ PMU pour couvrir $H'(v)$. Reprenant la preuve du Théorème 1 et un graphe planaire 3-régulier G , si $(x, y) \in E(G)$, on construit $H'(x)$ et $H'(y)$ et les connectons par le gadget $I(x, y)$ (et pas simplement par une arête $\{x_y, y_x\}$ afin de s'assurer que la construction résultante est bien un graphe biparti). Le reste de la preuve est identique. \square

Corollaire 1. Soit \tilde{G} une classe de graphes telle que, pour chaque biparti G il y a un supergraphe de G dans \tilde{G} . Pour tout $\rho \in \mathbb{N}$, POWER EDGE SET dans \tilde{G} est \mathcal{NP} -dur à approcher avec un ratio inférieur à ρ .

3 Bornes inférieures

Nous prouvons des bornes inférieures d'approximabilité pour le problème POWER EDGE SET en utilisant une L -réduction depuis le problème Er VERTEX COVER ($ErVC$) qui, étant donné en entrée un hypergraphe r -uniforme $G = (V, E)$ avec $|V| = n$ et $|E| = m$, cherche une couverture par les sommets VC de taille minimale. Il est admis que Er VERTEX COVER est difficile à approximer avec un ratio inférieur à $(r - 1 - \epsilon)$ pour tout $r \geq 3$ et $\epsilon > 0$, à moins que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ (voir [2]), même lorsque les sommets sont incidents à au plus 3 arêtes. Sous l'hypothèse UGC $ErVC$ est même difficile à approcher avec un ratio inférieur à $r - \epsilon$, pour tous $r \geq 2, \epsilon > 0$, [1].

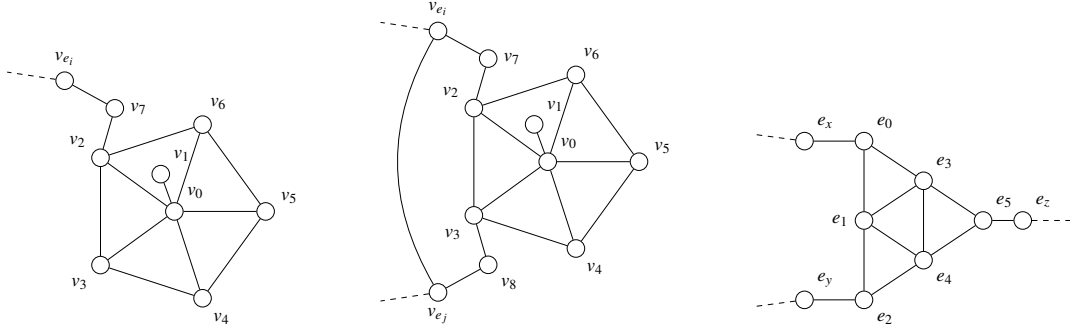
Rappelons la définition d'une L -réduction entre deux problèmes difficiles Π et Π' , décrite par Papadimitriou et Yannakakis dans [4]. Cette réduction consiste en une paire de fonctions polynomiales (f, g) telles que si x est une instance de Π alors $f(x)$ est une instance de Π' , et g envoie une solution réalisable y' de $f(x)$, sur une solution réalisable de x . De plus, on a, pour deux constantes non nulles α_1, α_2 :

- 1 $OPT_{\Pi'}(f(x)) \leq \alpha_1 OPT_{\Pi}(x)$
- 2 $|cost_{\Pi}(g(y')) - OPT_{\Pi}(x)| \leq \alpha_2 |cost_{\Pi'}(y') - OPT_{\Pi'}(f(x))|$

Théorème 3. Sous l'hypothèse Unique Game Conjecture (UGC)[4], POWER EDGE SET est difficile à approximer avec un ratio inférieur à $(17/15 - \epsilon)$.

Démonstration. On considère la réduction suivante depuis une instance I de Er VERTEX COVER avec $r=3$ et sommets incidents à au plus 3 arêtes. Soit $G = (V, E)$ un hypergraphe 3-uniforme issu de I , on construit une instance I' de POWER EDGE SET de la façon suivante : Pour chaque sommet $v \in V$ de contenue dans une (resp. deux, resp. trois) arêtes, on crée le gadget H_v^1 (resp. H_v^2 , resp. $H_v^3 = H(v)$) en remplaçant v_x, v_y, v_z par $v_{e_i}, v_{e_j}, v_{e_k}$ donné par la Figure 2a (resp. Figure 2b, resp. Figure 1a). Pour chaque hyperarête e (de cardinalité 3), on crée un gadget $J(e)$ comme sur la figure 2c, Pour tout $e \in E$ et tout $v \in e$, on ajoute une arête entre le sommet bordure e_v du gadget $H^i(v) | i \in \{1, 2, 3\}$ et le sommet bordure e_v du gadget $J(e)$.

Les gadgets-sommets $H^i(v)$ sont définis de sorte que si tous leurs sommets bordures e_j sont coloriés par propagation des e_v adjacents, alors 1 PMU suffit sur $E(H^i(v))$ pour avoir $c(x) = 1, \forall x \in H^i(v)$. Autrement, 2 PMU suffisent sur $E(H^i(v))$ pour avoir $c(x) = 1, \forall x \in H^i(v)$, mais également $c(e_v) = 1$ sur les gadgets-arêtes incidents. Les gadgets-arêtes $J(e)$ sont définis de sorte que si au moins un sommet bordure $e_x | x \in e$



(a) Gadget $H^1(v)$ pour un sommet $v \in V$ de degré 1 (incident à l'arête e_i). (b) Gadget $H^2(v)$ pour un sommet $v \in V$ de degré 2 (incident aux arêtes e_i et e_j). (c) Gadget $J(e)$: arête $e \in E$ de cardinalité 3, avec $e = \{x, y, z\}$.

FIGURE 2: Transformation pour les sommets de degrés deux et un et pour les hyper-arêtes.

a été colorié par propagation de v_e du gadget-sommet incident $H^i(v)$, 1 PMU suffit sur $J(e)$ pour propager vers les sommets-bordures des autres gadget-sommets incidents.

Il existe un $ErVC$ dans I ssi il existe une solution optimale de valeur $(k+n+m)$ pour POWER EDGE SET dans I' : les gadgets-sommets $H^i(v)$ avec 2 PMU propagent sur les sommets bordures de tous les gadget-arêtes. L'ajout d'un PMU par gadget-arête propage vers les sommets bordures gadgets-sommets H^i_v ayant 1 PMU. Les gadgets-sommets $H^i(v)$ avec 2 PMU induisent ainsi une solution à I .

On a : $OPT(I') \leq OPT(I) + n + m$. Comme chaque sommet est incident à au plus 3 arêtes de cardinalité 3, on a $\frac{n}{7} \leq OPT(I)$. Puisque $n \leq 3m \leq 3n$, on obtient : $OPT(I') \leq 8OPT(I) + m \leq 15.OPT(I)$.

D'autre part, on a $A(I') = A(I) + n + m$ pour toutes les solutions, y compris optimales, d'où : $OPT(I') = A(I) + n + m \geq OPT(I) + n + m$.

En utilisant la première équation : $A(I') - OPT(I') = A(I) - OPT(I)$. Ainsi, on a une L -réduction avec $\alpha_1 = 15, \alpha_2 = 1$. On en déduit le seuil :

$$\begin{aligned} A(I) &\geq (r - \epsilon)OPT(I) \text{ par hypothèse } \mathcal{UGC} \\ A(I') - OPT(I') + OPT(I) &\geq (r - \epsilon)OPT(I) \\ A(I') &\geq (r - 1 - \epsilon)OPT(I) + OPT(I') \geq \frac{2 - \epsilon}{15}OPT(I') + OPT(I') \quad \square \end{aligned}$$

4 Conclusion

Nous avons présenté plusieurs résultats qui améliorent les travaux existants. Le challenge à venir concerne le développement d'algorithmes d'approximation efficaces avec garantie de performance.

Références

- [1] N. Bansal and S. Khot. Inapproximability of hypergraph vertex cover and applications to scheduling problems. In *Automata, Languages and Programming, 37th International Colloquium, ICALP 2010, Bordeaux, France, July 6-10, 2010, Proceedings, Part I*, pages 250–261, 2010.
- [2] I. Dinur, V. Guruswami, S. Khot, and O. Regev. A new multilayered PCP and the hardness of hypergraph vertex cover. *SIAM J. Comput.*, 34(5) :1129–1146, 2005.
- [3] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1979.
- [4] C. H. Papadimitriou and M. Yannakakis. Optimization, approximation, and complexity classes. *J. Comput. Syst. Sci.*, 43(3) :425–440, 1991.
- [5] P. Poirion, S. Toubaline, C. D'Ambrosio, and L. Liberti. The power edge set problem. *Networks*, 68(2) :104–120, 2016.
- [6] S. Toubaline, C. D'Ambrosio, L. Liberti, P.-L. Poirion, B. Schieber, and H. Shachnai. Complexité du problème power edge set. In *Roadef 2016*, 2016.
- [7] W. Yuill, A. Edwards, S. Chowdhury, and S. P. Chowdhury. Optimal pmu placement : A comprehensive literature review. In *2011 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, pages 1–8, July 2011.