HAL
open science

Méthodes sans maillage et séries de Taylor

Jie Yang, Michel Potier-Ferry, Koffi Akpama, Heng Hu, Yao Koutsawa

To cite this version:

Jie Yang, Michel Potier-Ferry, Koffi Akpama, Heng Hu, Yao Koutsawa. Méthodes sans maillage et séries de Taylor. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01516634

HAL Id: hal-01516634

https://hal.science/hal-01516634v1

Submitted on 2 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

CSMA 2015
12 Colloque National en Calcul des Structures
18-22 Mai 2015, Presqu'île de Giens (Var)

Méthodes sans maillage et séries de Taylor

J. Yang [1], M. Potier-Ferry [2], K. Akpama [3], H. Hu [1], Y. Koutsawa [4]

[1] *School of Civil Engineering, Université de Wuhan, {jie_yang,huheng}@whu.edu.cn*
[2] *LEM3, Université de Lorraine, michel.potier-ferry@univ-lorraine.fr*
[3] *LEM3, ENSAM, pierreholanyo@yahoo.fr*
[4] *Centre Henri Tudor, yao.koutsawa@tudor.lu*

Résumé — On passe en revue les progrès récents réalisés sur une méthode sans maillage qui ne discrétise que les frontières. L'idée est de résoudre l'EDP dans le domaine par la méthode des séries de Taylor. Quatre points-clé sont discutés : le traitement des conditions aux limites, les techniques de raccord entre polynômes de degré élevé, les procédures pour obtenir la solution générale d'une EDP quelconque et l'efficacité numérique de la méthode.
Mots clés — Méthode sans maillage, série de Taylor

1. Introduction

On s'intéresse à une méthode sans maillage introduite récemment [9]. Les méthodes sans maillage [5] n'ont pas besoin d'un maillage structuré, ce qui permet davantage de souplesse dans le processus de discrétisation. Après une période d'engouement, elles connaissent aujourd'hui une période de désaffection qui précède probablement une phase de progrès significatifs. Brièvement, les méthodes de type Galerkin posent la question du processus d'intégration de fonctions compliquées alors que les méthodes basées sur la collocation sont assez instables et conduisent à des matrices mal conditionnées. Par ailleurs d'autres méthodes comme la méthode des éléments frontières ou la méthode de la solution fondamentale permettent de ne discrétiser que la frontière du domaine, mais elles s'appliquent mal aux problèmes non-linéaires. La technique proposée vise à ne discrétiser que des frontières, y compris pour des systèmes non-linéaires.

L'idée est de résoudre les équations aux dérivées partielles dans le domaine par la technique des séries de Taylor. Si on prend l'exemple de l'équation de Laplace $\Delta u=0$, on dispose d'une base de polynômes solutions

$$1,\ \ \mathrm{Re}(x+iy)^n, \mathrm{Im}(x+iy)^n \quad n\in[1,p] \tag{1}$$

On combine linéairement ces solutions de base, puis on applique les conditions aux limites, par exemple par la méthode des moindres carrés [1,9]. Souvent la convergence est très rapide et l'erreur de discrétisation décroit exponentiellement avec le degré p. On sait également [8] faire des résolutions par morceaux et raccorder plusieurs polynômes de haut degré.

Trois points seront discutés dans cet exposé. Quelles sont les bonnes procédures pour appliquer les conditions aux limites et les conditions de transmission ? Comment calculer la base de polynômes analogues à (1) pour résoudre un problème mécanique d'intérêt industriel ? Quelle est l'efficacité par aux méthodes existantes ?

2. Méthodes et résultats

2.1. Conditions aux limites, conditions de transmission

Deux classes de méthodes se sont avérées efficaces : la méthode des moindres carrés pour appliquer les conditions aux limites [9] et diverses techniques basées sur des multiplicateurs de Lagrange pour les conditions de transmission [8]. Plus récemment on a mis au point des méthodes sans maillage basée sur les multiplicateurs de Lagrange pour les conditions aux limites et montré que la méthode des moindres carrés peut s'appliquer aux conditions de transmission. La figure 1 montre une convergence exponentielle pour un algorithme de type « moindres carrés », qui est très proche des résultats obtenus avec les multiplicateurs de Lagrange [8]. On observe un plateau de convergence pour un très grand niveau de précision (10^{-7}), qui semble lié au conditionnement de la matrice.

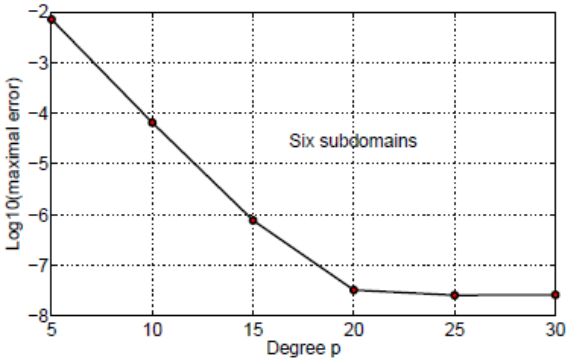

Figure 1 – Exemple de convergence exponentielle pour une résolution en six morceaux

2.2. Méthodologie générale de calcul de la base polynomiale

L'enjeu est de pouvoir construire une base de polynômes analogue à (1) pour les équations obtenues par linéarisation à partir d'un problème non-linéaire. L'application présentée est un modèle hyper-élastique, linéarisé par la méthode Newton-Raphson. Vu la relative complexité du problème, il est commode d'utiliser une technique de différentiation automatique à plusieurs variables [2, 3, 6] pour évaluer les dérivées des équations à des ordres élevés, puis d'en déduire un procédé de construction des polynômes. Les résultats numériques montrent une convergence exponentielle comme dans les cas linéaires.

2.3. Application à des problèmes 3D et évaluation

Une première comparaison avec des méthodes existantes avait été faite en [7], où un problème 2D avait été résolu par la présente méthode et par divers éléments finis. Il avait été montré que le problème pouvait être résolu avec moins de 100 degrés de liberté, alors que les éléments finis en demandent des milliers, voire des dizaines de milliers. Des résultats comparables sont obtenus en 3D et ces tests 3D permettent une évaluation plus significative des temps calcul. Les résultats 3D montrent une convergence exponentielle et des temps de calcul très inférieurs aux éléments finis. De plus, il semble que ce soit le calcul des matrices qui soit le plus gourmand et cette opération est aisément parallélisable. Nous avons effectivement obtenu des gains de temps sur un ordinateur de bureau à 4 cœurs.

3. Perspectives

Les techniques mises au point permettent d'appliquer cette méthode sans maillage à des modèles de plus en plus complexes. Une des difficultés rencontrées concerne les solutions non régulières (forces concentrées, pointes de fissures…) qui sont plus difficiles à approcher par des polynômes, ainsi que les problèmes non réguliers (contact, plasticité...) qui nécessiteraient des techniques particulières. Nous concevons cette approche comme un complément plutôt qu'une alternative aux méthodes existantes et c'est pourquoi nous mettons l'accent sur les méthodes de couplage. Notons enfin que l'information contenue dans une série de Taylor ne se limite pas à ses valeurs numériques : elle donne accès à la détection de singularités et à des techniques d'accélération de convergence [7].

Références

[1] G. Fairweather and A. Karageorghis. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. Advances in Computational Mathematics, 9, 69–95, 1998.

[2] A. Griewank. Evaluating derivatives: principles and techniques of algorithmic differentiation. SIAM, Philadelphia, 2000.

[3] A. Griewank, J. Utke, A. Walther. Evaluating higher derivative tensors by forward propagation of univariate Taylor series. Mathematics of Computation, 69, 1117-1130, 2000.

[4] J. L. Lopez, E.P. Sinusia, N.M. Temme. Multi-point Taylor approximations in one-dimensional linear boundary value problems. Applied Mathematics and Computation 207, 519–27, 2009.

[5] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. Computational Mechanics, 10, 307–318, 1992.

[6] R. D. Neidinger. Introduction to automatic differentiation and Matlab object-oriented programming. SIAM Review, 52, 545-563, 2010.

[7] Y. Tampango, M. Potier-Ferry, Y. Koutsawa, and S. Belouettar. Convergence analysis and detection of singularities within a boundary meshless method based on Taylor series. Engineering Analysis with Boundary Elements, 36, 1465 – 1472, 2012.

[8] Y. Tampango, M. Potier-Ferry, Y. Koutsawa and S. Tiem. Coupling of polynomial approximations with application to a boundary meshless method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 95, 1094–1112, 2013.

[9] D. S. Zézé, M. Potier-Ferry, and N. Damil. A boundary meshless method with shape functions computed from the PDE. Engineering Analysis with Boundary Elements, 34, 747 – 754, 2010.