



**HAL**  
open science

## Vers une approche PGD quasi-optimale pour les problèmes nonlinéaires de contact frottant

Anthony Giacomu, David Dureisseix, Anthony Gravouil, Michel Rochette

► **To cite this version:**

Anthony Giacomu, David Dureisseix, Anthony Gravouil, Michel Rochette. Vers une approche PGD quasi-optimale pour les problèmes nonlinéaires de contact frottant. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01516623

**HAL Id: hal-01516623**

**<https://hal.science/hal-01516623v1>**

Submitted on 2 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Vers une approche PGD quasi-optimale pour les problèmes non-linéaires de contact frottant

A. Giacomini<sup>1,2</sup>, D. Dureisseix<sup>2</sup>, A. Gravouil<sup>2,3</sup>, M. Rochette<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ANSYS France

<sup>2</sup>Université de Lyon, INSA-Lyon, LaMCoS, CNRS UMR 5259

<sup>3</sup>Institut Universitaire de France

**Résumé** — L'analyse des structures déformables impliquant du contact frottant est reconnue pour être particulièrement délicate à aborder. En effet, les lois régissant de tels phénomènes sont non-linéaires et non-différentiables (non-réguliers) pouvant mettre en difficulté (temps de calcul) les méthodes numériques classiques utilisées dans le cadre de la méthode des éléments finis. Dans ce qui suit, nous proposons de mettre en œuvre une méthode de base réduite *a priori* quasi-optimale de type PGD afin d'accélérer les temps de calcul et d'ouvrir des pistes pour traiter efficacement des approches paramétriques.

**Mots clés** — Contact frottant, méthode LATIN, PGD, quasi-optimalité.

## 1 Introduction et définition du problème de référence

La simulation numérique de systèmes mécaniques mettant en jeu des contacts frottants entre solides déformables n'est pas sans difficulté. L'ajout de non-linéarités supplémentaires (*e.g.* loi de comportement matérielle), de grandes surfaces de contact, grands coefficients de frottement mettent à rude épreuve les techniques classiques de résolution. Bien qu'en se plaçant dans un cadre d'évolution quasi-statique, certains codes industriels peuvent aboutir à des temps de résolution prohibitifs.

La problématique des temps de calculs a suscité un important et récent intérêt pour les techniques dites de réduction de modèle [1, 2] et à ses applications dans divers et nombreux domaines. Cependant, le caractère non-régulier des lois de contact frottant semble peu propice à l'utilisation de telles techniques. L'objectif de ce travail est de proposer une stratégie d'accélération de temps de calculs pour les problèmes de contact frottant dans le cadre de la simulation par éléments finis. Nous nous plaçons de ce cadre de la mécanique élastique, linéaire, isotrope, homogène pour le comportement des solides évoluant dans un régime quasi-statique. Puis, les lois de contact sont appliquées à chacun des solides impliquant un comportement non-linéaire et non-régulier localisé à leurs frontières. Pour résoudre ce problème, la méthode LATIN (LARGE Time INcrement) est utilisée. Cette méthode non-incrémentale adopte une stratégie de résolution espace-temps lui conférant une efficacité certaine face aux problèmes présentant diverses non-linéarités (contact, lois de comportement matérielle...) [8, 2].

Le problème de référence (figure 1) consiste à étudier un milieu déformable  $\Omega$  de l'espace tridimensionnel ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ) au cours du temps  $t \in [0, T]$  : trouver un champ de déplacement  $\mathbf{u}$  sur  $\Omega$  et un champ des efforts de contact  $\lambda$  sur la frontière en contact  $\partial_3\Omega$  telles que soient satisfaites :

— les conditions d'admissibilités :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}) \quad (1)$$

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\mathbf{u} |_{\partial_1\Omega \times [0, T]} = \mathbf{u}_p \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} |_{\partial_2\Omega \times [0, T]} = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} |_{\partial_3\Omega \times [0, T]} = \lambda \quad (5)$$

— les lois constitutives :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{K}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{Loi matérielle de Hooke} \quad (6)$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{u} \mid_{\partial_3\Omega \times [0,T]}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad \text{Lois du contact frottant} \quad (7)$$

On note formellement par l'opérateur  $\mathcal{R}$  la loi du contact frottant (7) donnée par les conditions de Signorini pour la partie normale et Amontons-Coulomb pour la partie tangentielle. Lorsque le champ de déplacement et le champ des efforts de contact vérifient ces conditions,  $\mathcal{R}$  est annulé. Ce problème de référence est facilement généralisable au cas multicorps.

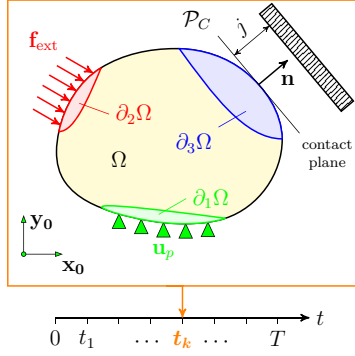


FIGURE 1 – Problème de contact.

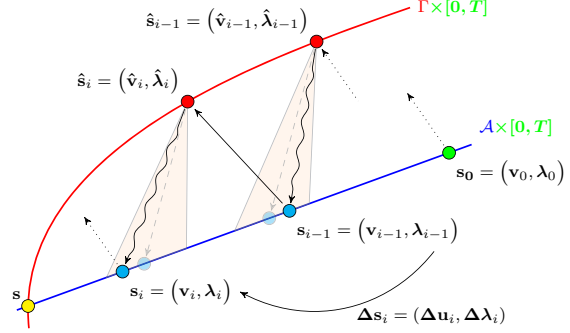


FIGURE 2 – Principe de la méthode LATIN.

## 2 La méthode à grand large incrément de temps (LATIN)

Les actuelles méthodes PGD (méthodes de base réduite dites *a priori*) ont été présagées par la méthode LATIN [8] incluant l'approximation radiale, ou encore, la séparation des variables espace et temps, comme suit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\sum_{i=1}^p \mathbf{v}_i(\mathbf{x})\phi_i(t)}_{\text{mode PGD espace-temps}} \quad (8)$$

Cette décomposition n'impose aucune condition de normalité ou d'orthogonalité entre ces fonctions. Cependant, il est d'usage d'imposer une condition d'orthonormalité pour les fonctions spatiales (à gauche).

Le solveur non-linéaire LATIN consiste en la réalisation des principes suivant :

1. **Séparation des difficultés.** Les solutions vérifiant les conditions d'admissibilité et la loi de Hooke (linéaire) sont regroupées dans l'ensemble linéaire global (en bleu sur la figure 2). Les solutions vérifiant le comportement local et non-linéaire (conditions du contact frottant) sont regroupées dans l'ensemble non-linéaire (en rouge sur la figure 2). Ces ensembles de solution sont définis sur l'espace et le temps.
2. **Itérations avec des directions de recherche.** La méthode LATIN consiste à itérer entre les deux ensembles précédemment décrits à l'aide d'équation de direction de recherche jusqu'à trouver une solution à l'intersection de ceux-ci (*i.e.* la solution du problème de référence).
3. **L'approximation radiale.** Des solutions définies sur l'espace et le temps sont itérées engendrant une importante occupation mémoire. Afin d'y remédier, l'approximation radiale consiste à rechercher la solution du problème de référence sous la forme (8).

L'implémentation de la méthode LATIN incluant l'approximation radiale donne lieu à un gain mémoire mais aussi à un allègement de la charge calculatoire (*i.e.* l'effort du calcul est focalisé sur un vecteur spatial et un vecteur temporel au lieu d'une approximation globale espace et temps). Une telle méthode est notamment proposée dans [5, 4]. Néanmoins et de manière générale, l'application d'une telle méthode pour le problème de contact frottant peut mener à une convergence lente et à un nombre important de modes PGD itérés. Ces points faibles proviennent notamment du caractère non-optimal des modes PGD (*i.e.* les modes PGD itérés ne sont pas les meilleurs au regard de la solution du problème contrairement aux modes SVD de la solution).

### 3 Vers une méthode PGD quasi-optimale

#### 3.1 La LATIN-PGD quasi-optimale

Dans cet exposé, nous proposons une LATIN-PGD quasi-optimale solutionnant les difficultés évoquées. Le caractère quasi-optimal est permis grâce à l’extension de l’étape préliminaire, d’une part. Puis à l’ajout d’une étape de *downsizing* consistant à compresser efficacement et à moindre coût l’expansion PGD de la solution sans recalculer une SVD coûteuse, d’autre part.

Auparavant, l’étape préliminaire consistait en l’amélioration des modes temporels préexistants avant de procéder à un enrichissement des modes PGD. Désormais, cette amélioration est aussi portée sur les modes spatiaux. L’étape de *downsizing* a pour but de limiter l’inflation de l’expansion PGD par compression et élimination des modes peu contribuant. Il s’agit d’un algorithme autonome et itératif calculant la SVD d’une approximation de rang faible. Dans notre cas, une itération de cet algorithme produit une compression efficace et maintenue à chaque itération LATIN. Dans la section suivante, une application et un comparatif est proposé entre la LATIN originale et la LATIN-PGD quasi-optimale.

#### 3.2 Application



FIGURE 3 – Accouplement rigide par brides.

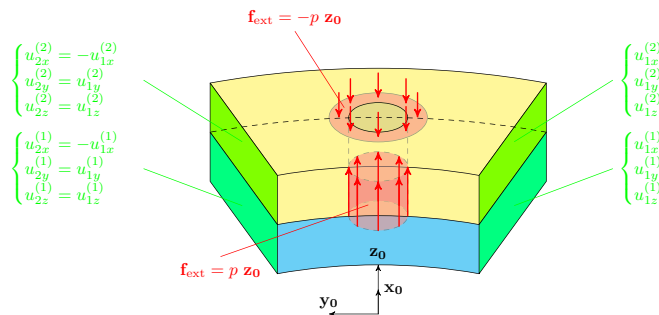


FIGURE 4 – Modèle continu traité.

L’exemple d’application consiste en une bride boulonnée transmettant par adhérence un couple. Le modèle numérique est construit à partir d’un secteur des surfaces en adhérence en présence de conditions cycliques imposées. Des efforts sont imposés de manière à simuler le pincement de la boulonnerie, ainsi que des déplacements sur les tranches des secteurs afin d’activer le frottement.

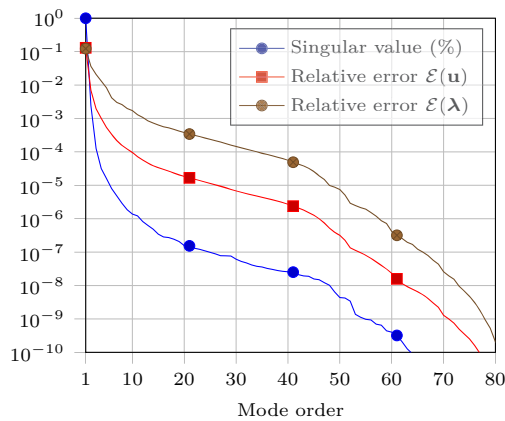


FIGURE 5 – Analyse SVD de la solution.

Une analyse SVD de la solution permet d’illustrer le caractère compressible des champs solution (figure 5). Quarante modes sont nécessaires afin de reconstruire la solution du problème numérique avec une erreur relative de  $10^{-10}$  sur le champ des efforts de contact. Néanmoins, en ne considérant, par exemple, que dix modes, la solution reconstruite commet une erreur relative de  $10^{-4}$  sur le champ de déplacement et de  $10^{-2}$  sur les champs des efforts de contact. Les modes SVD sont optimaux (i.e. ils captent le maximum d’énergie de la solution) et ordonnés. Ainsi, ces modes SVD sont les modes références. Dans l’idéal, un algorithme PGD optimal serait en mesure d’itérer les modes SVD au cours des enrichissements afin de reconstruire la solution de manière optimale.

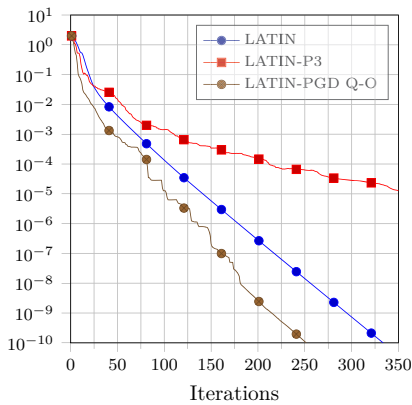


FIGURE 3 – Graphes de convergence des méthodes LATIN.

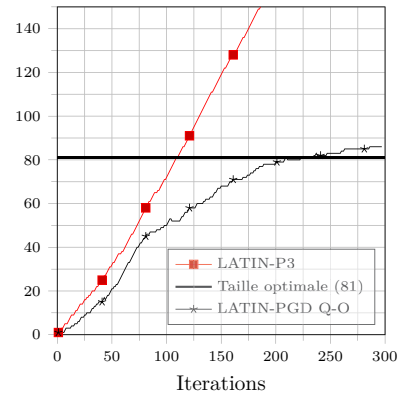


FIGURE 4 – Évolution des tailles des bases.

En figures 3 et 4 sont comparées, la méthode LATIN (sans considération de l'approximation radiale, solveur non-linéaire de référence), la méthode LATIN dite P3 incluant l'approximation radiale et la LATIN-PGD quasi-optimale. À partir de 200 itérations, la convergence de la LATIN-P3 devient délicate et le nombre de modes espace-temps devient trop important. En revanche, la LATIN-PGD quasi-optimale montre une convergence plus rapide et plus robuste. Remarquablement, le nombre de modes PGD itérés par cette dernière tend vers le nombre optimal de modes nécessaire pour générer la solution du problème (*i.e.* 81). Afin de qualifier les modes itérés, des diagrammes de MAC peuvent être utilisés montrant ainsi leur proximité avec les modes SVD de référence et ainsi leur donner un caractère quasi-optimal.

## 4 Conclusion

Une stratégie de base réduite *a priori* pour le problèmes non-linéaires du contact frottant est proposée. Celle-ci repose sur la méthode LATIN et les approches PGD. Les approches PGD classiques peuvent mener à des approximations de rang faible inexploitable (trop grand nombre de modes espace-temps) ainsi qu'à des vitesses de convergence lentes. L'extension de l'étape préliminaire ainsi que l'ajout d'une étape dite de *downsizing* permet d'apporter une solution efficace à ces problèmes. Par ailleurs, le contexte de la méthode LATIN permet d'étendre l'approche précédemment décrite aux études paramétriques [6, 7, 4], ou aussi à d'autres type de non-linéarités (*e.g.* matérielle, telle que la plasticité).

Nous remercions l'association nationale pour la recherche et la technologie (ANRT, CIFRE 2011/0705).

## Références

- [1] P. Kerfriden, P. Gosselet, S. Adhikari, S. Bordas. *Bridging Proper Orthogonal Decomposition methods and augmented Newton-Krylov algorithms : an adaptive model order reduction for highly nonlinear mechanical problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 850-866, 2010.
- [2] J. V. Aguado, A. Huerta, F. Chinesta, E. Cueto. *Real-time monitoring of thermal processes by reduced order modeling*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 2013.
- [3] L. Champaney, J.-Y. Cognard, D. Dureisseix, P. Ladevèze. *Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method*, Computational Mechanics, Springer, 253-263, 1997.
- [4] C. Heyberger, P.-A. Boucard, D. Néron. *A rational strategy for the resolution of parametrized problems in the PGD framework*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 40-49, 2013.
- [5] N. Relun, D. Néron, P.-A. Boucard. *A model reduction technique based on the PGD for elastic-viscoplastic computational analysis*, Computational Mechanics, Springer, 83-92, 2013.
- [6] M. Vitse, D. Néron, P.-A. Boucard. *Virtual charts of solutions for parametrized nonlinear equations*, Computational Mechanics, Springer, 2014.
- [7] A. Ammar, E. Cueto, F. Chinesta. *Nonincremental proper generalized decomposition solution of parametric uncoupled models defined in evolving domains*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley, 887-904, 2013.
- [8] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Methods : New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*, Springer-Verlag New York Inc., 1999.