



HAL
open science

Optimisation de forme appliquée aux matériaux micro-architecturés incluant la gestion d'interfaces graduées

Alexis Faure, Georgios Michailidis, Rafael Estevez, Guillaume Parry, Yves Bréchet, Natasha Vermaak, Grégoire Allaire, François Jouve

► To cite this version:

Alexis Faure, Georgios Michailidis, Rafael Estevez, Guillaume Parry, Yves Bréchet, et al.. Optimisation de forme appliquée aux matériaux micro-architecturés incluant la gestion d'interfaces graduées. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01516458

HAL Id: hal-01516458

<https://hal.science/hal-01516458>

Submitted on 1 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Optimisation de forme appliquée aux matériaux micro-architecturés incluant la gestion d'interfaces graduées

A. Faure¹, G. Michailidis²,

R. Estevez¹, G. Parry¹, Y. Bréchet¹, N. Vermaak⁴, G. Allaire², F. Jouve³

¹ Université de Grenoble, SIMaP, {rafael.estevez, guillaume.parry, alexis.faure}@simap.grenoble-inp.fr

² Ecole polytechnique, CMAP, {michailidis, allaire}@cmap.polytechnique.fr

³ Université Paris Diderot, jouve@ljl.univ-paris-diderot.fr

⁴ Lehigh University, USA

Résumé — Nous nous intéressons au problème d'optimisation de propriétés mécaniques ou thermo-mécaniques d'un volume élémentaire représentatif hétérogène constitué de phases thermo-élastiques linéaires isotropes. Cette question a déjà été abordé dans les approches d'optimisation et apparaît documentés dans la littérature, majoritairement pour des mélanges de deux constituants. Sur la base de travaux récents (Michailidis, 2014; Vermaak et al. 2014), nous proposons une analyse du problème multi-constituants en tenant compte des interfaces et de leurs effets sur les propriétés homogénéisées.

Mots clés — optimisation de forme. lignes de niveau. multi-matériaux. matériau architecturés. interface.

1 Introduction

Nous nous intéressons à l'optimisation des propriétés mécaniques ou thermomécaniques d'un matériau hétérogène constitués de phases thermo-élastiques linéaires isotropes, caractérisées par un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν , ainsi qu'un coefficient de dilatation thermique α . Nous définissons une cellule périodique de taille ε , suffisamment petite vis à vis de la taille globale du volume considérée, définissant le volume élémentaire représentatif.

On appelle $Y = (0, 1)^N$ la cellule unité de périodicité. Les propriétés matériau du domaine D de la cellule sont décrites par un tenseur d'élasticité périodique d'ordre 4 $A(y)$ et un second tenseur de contraintes thermiques périodique d'ordre deux $A^{th}(y)$, avec $y = x/\varepsilon \in Y$ et $x \in D$. Le tenseur des contraintes thermiques est défini comme $A^{th}(y) = A(y)\alpha^{th}(y)$, avec $\alpha^{th}(y)$ le tenseur des déformations thermiques, exprimé en K^{-1} .

Tenant compte de $f(x)$ les force extérieures et des conditions aux limites de Dirichlet, les équations de l'élasticité linéarisées s'écrivent :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e(u_\varepsilon) - A^{th}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta T \right) = f & \text{dans } D, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{le long de } \partial D, \end{cases} \quad (1)$$

avec u_ε le champ de déplacement, et $e(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}(\nabla u_\varepsilon + {}^T \nabla u_\varepsilon)$ le tenseur de déformation, égal au gradient symétrisé de u_ε et ΔT un champ de température uniforme.

Les propriétés moyennées du domaine hétérogène D sont obtenues par une analyse asymptotique décrite dans [1]. Nous essayons ici de distribuer une ou plusieurs phases dans la cellule unitaire de façon à atteindre des composantes A_{ijkl} et A_{ij}^{th} cible.

Par souci de simplicité, nous allons décrire le cas de deux phases, appelée phase 0 et 1. La phase 0 occupe le domaine Ω et la phase 1 occupe le domaine $Y \setminus \Omega$. L'interface entre ces deux phases, notée Γ , est définie implicitement à l'aide d'une fonction ligne de niveau ψ définie comme suit :

$$\begin{cases} \psi(x) = 0 & \text{pour } x \in \Gamma = \partial\Omega, \\ \psi(x) < 0 & \text{pour } x \in \Omega, \\ \psi(x) > 0 & \text{pour } x \in Y \setminus \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Dans le cas de multi-matériaux, un nombre m de fonctions lignes de niveau permet de gérer 2^m matériaux distincts, le cas correspondant à 2^2 matériaux étant illustré en Fig. 1.

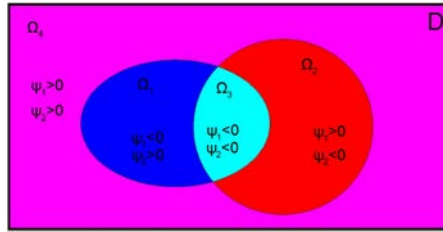


FIG. 1 – Cas avec plusieurs fonctions ligne de niveau, pouvant représenter jusqu'à 4 matériaux.

Les tenseurs d'élasticité et de contraintes thermiques sont définis sur dans la cellule unitaire Y . L'interpolation des propriétés de chaque phase est réalisée en utilisant la fonction distance signée à l'interface du domaine Ω . La fonction objectif du problème d'optimisation est définie comme une somme pondérée d'écart quadratiques des coefficients par rapport aux cibles fixées :

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \eta_{ijkl} (A_{ijkl}^* - A_{ijkl}^T)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mu_{ij} (A_{ij}^{th*} - A_{ij}^{thT})^2, \quad (3)$$

avec $(\cdot)^*$ et $(\cdot)^T$ désignant respectivement le coefficient issu de l'homogénéisation et la valeur cible, et η_{ijkl} et μ_{ij} les poids de chaque coefficient.

Les interfaces entre chaque matériau sont généralement définies comme variant de manière monotone (croissante ou décroissante) entre deux matériaux. Basé sur le travail de N. Vermaak et G. Michailidis [2, 3], nous tenons compte ici d'interfaces graduées, monotone ou non.

2 Application à plusieurs cas type

On retrouve dans la littérature [4, 5] de nombreux exemples de matériaux micro-architecturés présentant des propriétés extrêmes. A l'aide de la méthode d'optimisation décrite précédemment, il est possible de converger vers ce type d'architecture. Nous allons illustrer les possibilités de cette méthode sur quelques cas classiques. Seul des exemples 2D, traités en contraintes planes, sont présentés ici. On s'intéresse à l'optimisation des coefficients du tenseur d'élasticité et du tenseur des contraintes thermiques homogénéisés, définis comme suit :

$$\bar{A}^* = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1112} \\ & E_{2222} & E_{2212} \\ \text{sym} & & E_{1212} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}^{th*} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \text{sym} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Dans le cas d'un milieu thermoélastique linéaire et isotrope avec le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν , nous avons $E_{1111} = E/(1 - \nu^2)$ et les relations entre les composantes $E_{1122} = \nu E_{1111}$ ainsi que $E_{1212} = E/2(1 + \nu)$. En plus de ces contraintes, on ajoute un critère de fraction volumique maximale, nommé $volume_x$, où x est le numéro de la phase concernée.

2.1 Matériau pseudo-incompressible

Nous considérons un premier cas d'étude constitué d'un mélange matériau et vide avec $E_1 = 0.91\text{GPa}$ et $\nu_1 = 0.3$ pour le matériau, et un ersatz de vide en prenant un module d'Young faible ($\times 10^{-6}$ celui du matériau 1). Avec $E_1 = 0.91\text{GPa}$ et $\nu_1 = 0.3$, nous obtenons $E_{1111} = 1\text{GPa}$. Les valeurs cibles choisies sont données dans le tableau 1, et correspondent à un rapport entre les composantes homogénéisés $E_{1122}^T/E_{1111}^T = 1$. La fonction objectif fixée est :

$$J(\Omega, A, A_{th}) = \frac{1}{2} (A_{1111}^* - A_{1111}^T)^2 + \frac{1}{2} (A_{2222}^* - A_{2222}^T)^2 + 10 \cdot \frac{1}{2} (A_{1122}^* - A_{1122}^T)^2 \quad (5)$$

En Fig. 2.1, nous observons que la microstructure obtenue correspond à un motif avec des barres de matière à $+/- 45^\circ$. Les valeurs homogénéisées obtenues sont proches des cibles données. La phase bleu correspond au vide et la phase rouge, au matériau 1.

Coefficient	cible	valeur finale
$E_{1111}(GPa)$	0.1	0.0987
$E_{2222}(GPa)$	0.1	0.0987
$E_{1122}(GPa)$	0.1	0.0900

TAB. 1 – Récapitulatif des cibles

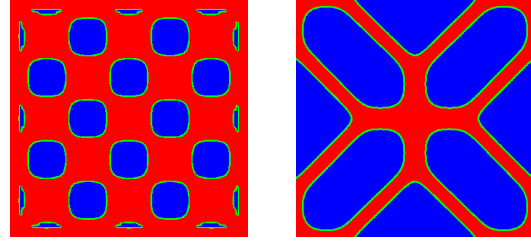


FIG. 2 – Design initial FIG. 3 – Design final

2.2 Matériau auxétique

Dans ce deuxième exemple, nous considérons un rapport entre les propriétés cibles $E_{1122}^T/E_{1111}^T = -0.5$, qui correspondrait à un matériau avec un coefficient de Poisson négatif si les propriétés homogénéisées obtenues sont isotropes. A nouveau, un mélange matériau + vide est considéré avec $E_1 = 0.91 GPa$, $\nu_1 = 0.3$. Les composantes cibles sont résumées dans le tableau 2. La fonction objectif fixée est :

$$\mathcal{J}(\Omega, A, A_{th}) = \frac{1}{2} (A_{1111}^* - A_{1111}^T)^2 + \frac{1}{2} (A_{2222}^* - A_{2222}^T)^2 + 10 \cdot \frac{1}{2} (A_{1122}^* - A_{1122}^T)^2 \quad (6)$$

Le résultat de l'optimisation est présenté en Fig.5. Nous observons dans ce cas un motif avec des barres de matière selon les directions 1 et 2, les valeurs homogénéisés respectant le rapport imposé mais pas exactement la valeur cible.

Coefficient	cible	valeur finale
$E_{1111}(GPa)$	0.2	0.1525
$E_{2222}(GPa)$	0.2	0.1524
$E_{1122}(GPa)$	-0.1	-0.068

TAB. 2 – Récapitulatif des cibles

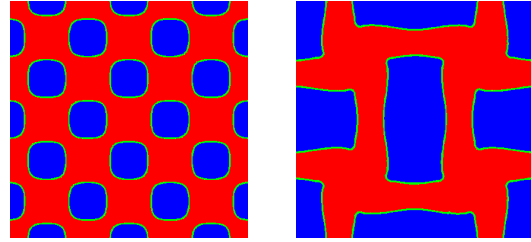


FIG. 4 – Design initial FIG. 5 – Design final

2.3 Matériau à faible coefficient de dilatation thermique

Nous cherchons ici à obtenir un matériaux composite ayant un faible coefficient de dilatation thermique (CTE) à partir de deux matériaux à CTE standard, on notera aussi la présence de vide, représenté comme précédemment par un ersatz. Nous considérons aussi des contraintes sur les propriétés élastique du composite. Les propriétés suivantes sont appliquées aux matériaux constitutifs : $E_1 = 0.91 GPa$, $\nu_1 = 0.3$, $\alpha_1 = 1.0 \text{ ppm/K}$, $E_2 = 0.455 GPa$, $\nu_2 = 0.3$, $\alpha_2 = 10 \text{ ppm/K}$. Les valeurs cibles sont résumées dans le tableau 3.

Coefficient	cible	valeur finale
$E_{1111}(GPa)$	0.05	0.05001
$E_{2222}(GPa)$	0.05	0.05001
$E_{1212}(GPa)$	≥ 0.05	0.05327
$A_{11}(GPa/K)$	10^{-7}	$9.63 \cdot 10^{-8}$
$A_{22}(GPa/K)$	10^{-7}	$9.62 \cdot 10^{-8}$

TAB. 3 – Récapitulatif des cibles

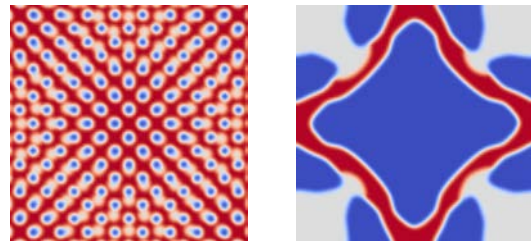


FIG. 6 – Design initial FIG. 7 – Design final

La fonction objectif utilisée est :

$$J(\Omega, A, A_{th}) = \frac{1}{2} (A_{1111}^* - A_{1111}^T)^2 + \frac{1}{2} (A_{2222}^* - A_{2222}^T)^2 + \frac{1}{2} (A_{11}^{th*} - A_{11}^{thT})^2 + \frac{1}{2} (A_{22}^{th*} - A_{22}^{thT})^2 \quad (7)$$

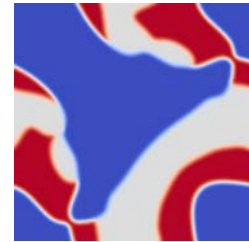
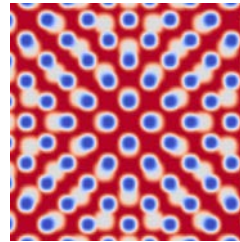
Le motif final obtenu est présenté en Fig. 7. On comprend que la phase 2 (en gris), ayant un CTE plus élevé, va, en se dilatant, venir solliciter en flexion le treillis formé par la phase 1 (en rouge), contenant ainsi la dilatation au sein de la structure.

2.4 Matériau à CTE négatif

Dans ce dernier cas, nous tentons d'obtenir un matériaux composite avec un CTE négatif à partir de deux matériaux ayant un CTE standard, positif, et de vide. Nous considérons aussi des contraintes sur les propriétés élastiques du composite. Les propriétés suivantes sont appliquées aux matériaux constituant le composite : $E_1 = 0.91\text{GPa}$, $\nu_1 = 0.3$, $\alpha_1 = 1.0\text{ppm/K}$, $E_2 = 0.455\text{GPa}$, $\nu_2 = 0.3$, $\alpha_2 = 10.0\text{ppm/K}$. Les valeurs cibles sont résumées dans le tableau 4. La fonction objectif utilisée est la suivante :

$$J(\Omega, A, A_{th}) = \frac{1}{2} (A_{1111}^* - A_{1111}^T)^2 + \frac{1}{2} (A_{2222}^* - A_{2222}^T)^2 + \frac{1}{2} (A_{11}^{th*} - A_{11}^{thT})^2 + \frac{1}{2} (A_{22}^{th*} - A_{22}^{thT})^2 \quad (8)$$

Coefficient	cible	valeur finale
$E_{1111}(\text{GPa})$	0.03	0.0269
$E_{2222}(\text{GPa})$	0.03	0.0269
$A_{11}(\text{GPa/K})$	$-4 \cdot 10^{-8}$	$-2.8 \cdot 10^{-8}$
$A_{22}(\text{GPa/K})$	$-4 \cdot 10^{-8}$	$-2.8 \cdot 10^{-8}$



TAB. 4 – Récapitulatif des cibles

FIG. 8 – Design initial FIG. 9 – Design final

En Fig. 9, nous observons que le composite obtenu est un mélange complexe, comportant notamment un grand nombre d'interfaces entre les constituants. Ce cas suggère que le type d'interfaces entre les constituants aura une influence sur les propriétés effectives du composite, ce qui sera discuté au cours de la présentation.

3 Conclusion

Les exemples présentés ici montrent comment la forme et la topologie d'un composite peuvent être optimisées afin d'atteindre des propriétés physiques "extrêmes" et distinctes de celles obtenues à partir d'une moyenne entre les propriétés des constituants. Il est possible d'approcher les limites théoriques des propriétés des matériaux telles qu'elles sont définies dans la littérature [5].

Références

- [1] Allaire G. *Conception optimale de structures*, volume 58. Springer, 2006.
- [2] Vermaak N. Michailidis G. Parry G. Estevez R. Allaire G. Bréchet Y. Material interface effects on the topology optimization of multi-phase structures using a level set method. *SMO Vol. 50, no. 4, 623-644*, 2014.
- [3] Michailidis G. *Manufacturing Constraints and Multi-Phase Shape and Topology Optimization via a Level-Set Method*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, January 2014.
- [4] Wang X. Level-set method for design of multi-phase elastic and thermoelastic materials. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, pages 213–239, 2005.
- [5] Sigmund O. Tailoring materials with prescribed elastic properties. *Mechanics of Materials, volume 20, issue 4, 351-368*, pages 351–368, 1994.