



**HAL**  
open science

# Réduction de modèle pour un problème de contact frottant: Couplage entre une technique de perturbation et une approche par contrôle

Franck Massa, Hai Quan Do, Thierry Tison, Antonio Gonzalez Sorribes, Jimmy Lauber, Thierry-Marie Guerra

## ► To cite this version:

Franck Massa, Hai Quan Do, Thierry Tison, Antonio Gonzalez Sorribes, Jimmy Lauber, et al.. Réduction de modèle pour un problème de contact frottant: Couplage entre une technique de perturbation et une approche par contrôle. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01516457

**HAL Id: hal-01516457**

**<https://hal.science/hal-01516457>**

Submitted on 4 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Réduction de modèle pour un problème de contact frottant : Couplage entre une technique de perturbation et une approche par contrôle

F. Massa<sup>1</sup>, H.D. Do<sup>1</sup>, T. Tison<sup>1</sup>, A. Gonzales<sup>1</sup>, J. Lauber<sup>1</sup>, T.M. Guerra<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LAMIH UMR CNRS 8201, Université de Valenciennes, {franck.massa, thierry.tison}@univ-valenciennes.fr, haiquan.do@etu.univ-valenciennes.fr, angonsor@gmail.com, {jimmy.lauber, thierry.guerra}@univ-valenciennes.fr

**Résumé** — L'objectif de cet article est de proposer une méthode pour réanalyser un problème de contact frottant où les structures mécaniques, modélisées par la méthode des éléments finis, sont modifiées de manière paramétrique. Pour diminuer les temps de calcul, on propose de coupler une approche par contrôle, pour calculer les efforts de contact, avec des développements homotopiques, pour réanalyser la matrice de projection associée au problème de contact réduit modifié. Une application numérique met en évidence l'efficacité de la méthode proposée.

**Mots clés** — Réduction de modèle, Contact frottant, Contrôle et régulation, Méthode de résolution.

## 1. Introduction

Le contact mécanique [1] joue un rôle fondamental dans les applications en calcul de structures. Avec l'augmentation des ressources informatiques, leur utilisation est de plus en plus fréquente dans les modèles numériques, de surcroît, de complexité croissante. En parallèle, de manière à proposer des conceptions de plus en plus robustes, la tendance actuelle consiste à multiplier les simulations numériques, en menant des études de sensibilité, des plans d'expériences ou des études non déterministes. Le contact mécanique est un problème complexe à gérer, qui engendre les non-linéarités les plus difficiles à prendre en compte. Son intégration dans des procédures incluant des tirages multiples peut générer des temps de calcul prohibitifs. Il s'avère donc nécessaire de développer de nouvelles méthodes de résolution en adéquation avec cette problématique actuelle.

Dans cet article, on expose une méthode multidisciplinaire permettant de réanalyser un problème de contact frottant. Cette proposition repose sur le couplage de deux méthodes. La première, issue du domaine de l'automatique, permet de calculer les efforts de contact en utilisant une approche par contrôle [2]. L'avantage principal est de décomposer le problème non linéaire de contact en une succession de problèmes linéaires réduits. La seconde méthode, basée sur des développements homotopiques [3], a pour objectif de réanalyser les matrices de projection utilisées pour réduire la taille des différents systèmes d'équations linéaires des analyses statiques dans le cas de modifications multiples.

## 2. Réanalyse du problème de contact frottant

### 2.1. Définition du problème dans un contexte éléments finis

En considérant une discrétisation des structures en contact par la méthode des éléments finis, l'équation d'équilibre gouvernant le problème non linéaire statique est appelée équation (1). De plus, pour transcrire les conditions de contact normal (Signorini) et de frottement (Coulomb) dans le cas de l'adhérence, deux autres équations sont ajoutées. On note respectivement  $K^{(0)}$ ,  $U^{(0)}$  et  $F_{\text{ext}}^{(0)}$  la matrice de rigidité des composants en contact (de taille  $[n_{\text{ddl}} \times n_{\text{ddl}}]$  où  $n_{\text{ddl}}$  caractérise le nombre de degrés de

liberté du problème éléments finis), le vecteur des déplacements statiques et le vecteur des chargements extérieurs.  $F_n^{(0)}(U^{(0)})$  et  $F_t^{(0)}(U^{(0)})$  sont les efforts de contact normaux et tangentiels calculés à l'interface de contact. Ceux-ci sont dépendants des déplacements statiques de chaque composant. Concernant les conditions de contact,  $d_n^{(0)}$  représente le gap normal initial,  $A_n^{(0)}$  et  $A_a^{(0)}$  les matrices de contact normal et tangentiel qui couplent les déplacements des nœuds maître et esclave afin d'assurer les conditions de non-pénétration et d'adhérence. L'indice  $^{(0)}$  est associé aux valeurs nominales du problème, tandis que, l'indice  $^{(m)}$  repère les valeurs dites modifiées.

$$\begin{aligned} K^{(0)}U^{(0)} + F_n^{(0)}(U^{(0)}) + F_t^{(0)}(U^{(0)}) &= F_{ext}^{(0)} \\ A_n^{(0)}U^{(0)} &= d_n^{(0)} \quad A_a^{(0)}U^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

## 2.2. Résolution du problème de contact par une approche par contrôle

Considérant une forme matricielle du problème de contact, on définit un système discret itératif (Equation 2) de manière à réguler les efforts de contact en fonction de la connaissance des gaps de contact.  $\Phi_k$  et  $\Phi_{k+1}$  représente respectivement le vecteur d'état, composé des inconnues en efforts et positions à l'interface de contact, à 2 itérations successive. Ensuite, on définit une erreur  $e_k$  à contrôler, correspondant à la différence entre le signal de référence  $r_k$  et la sortie du système  $y_k$  ainsi qu'une loi de contrôle  $u_k$  qui va corriger itérativement les inconnues du problème. Celle-ci est construite à partir de l'erreur  $e_k$ . La loi de contrôle est dépendante d'une matrice de contraintes  $C(\Phi_{xy,k})$  et des données initiales du problème  $W$ .

$$\begin{cases} \Phi_{k+1} = \Phi_k + u_k \\ e_k = r_k - y_k \end{cases} \quad (2)$$

Cette mise en donnée va permettre de décomposer le problème non linéaire en une succession de problèmes linéaires et de calculer itérativement la position d'équilibre et les efforts de contact. Ainsi, pour résoudre ce problème, défini sous un angle de vue automatique, il est nécessaire de proposer une loi de contrôle  $u_k$ . Dans le cas présent, un contrôle rétroactif statique  $f_u(e_k)$  est choisi ce qui nécessite l'introduction d'une matrice de gain  $K_c$ . Cette nouvelle approche est appelée CAC (Control Approach for Contact) dans la suite de l'article.

$$\begin{aligned} y_k &= -C(\Phi_{xy,k})\Phi_k \quad e_k = C(\Phi_{xy,k})\Phi_k + W \\ u_k &= f_u(e_k) \quad f_u(e_k) = K_c e_k \end{aligned} \quad (3)$$

## 2.3. Définition du problème de contact réduit

La nouvelle mise en donnée du problème de contact ne faisant intervenir que des structures indépendantes, il est possible de définir une matrice de projection  $T^{(0)}$  de manière à proposer une réduction de la taille du système étudié.  $q^{(0, i+1)}$  est le vecteur des coordonnées réduits associé à la matrice de projection  $T^{(0)}$ . Cette matrice est composée des  $n_{mod}$  modes propres de chaque composant en contact  $\phi_0$  ainsi que de  $n_{sta}$  modes statiques  $ms_0$  calculés à l'interface de contact pour garantir une bonne précision de l'approximation. La taille de chaque système à résoudre est donc  $[(n_{mod} + n_{sta} \times n_{mod} + n_{sta})]$ .

$$\begin{aligned}
\left[ T^{(0)T} K^{(0)} T^{(0)} \right] q^{(0, i+1)} &= T^{(0)T} \left( F_{ext}^{(0)} - F_n^{(0, i+1)}(U^{(0, i+1)}) - F_t^{(0, i+1)}(U^{(0, i+1)}) \right) \\
U^{(0, i+1)} &= T^{(0)} q^{(0, i+1)}
\end{aligned} \tag{4}$$

$$T^{(0)} = \begin{bmatrix} \phi_0^{(1)} & \dots & \phi_0^{(n_{mod})} & \dots & mS_0^{(1)} & \dots & mS_0^{(n_{ctt})} \end{bmatrix}$$

## 2.4. Réanalyse de la matrice de projection

Si on considère des nouvelles valeurs, dites modifiées, pour les paramètres mécaniques composant la matrice de rigidité ou le vecteur de chargement extérieur, on peut définir un nouveau problème de contact intégrant une matrice de rigidité modifiée  $K^{(m)}$  et un vecteur des chargements extérieurs modifié, noté  $F_{ext}^{(m)}$ . Ces quantités vont clairement impacter la position d'équilibre du système ainsi que son comportement mécanique. Dans ce cas, les déplacements et les efforts de contact sont respectivement notés  $U^{(m)}$ ,  $F_n^{(m)}$  et  $F_t^{(m)}$ . Afin d'éviter une nouvelle décomposition d'une matrice de rigidité, qui requiert des temps de calcul considérables lors de la manipulation de systèmes éléments finis de grande taille, nous proposons de réanalyser le problème de contact modifié et plus précisément la matrice de projection  $T^{(m)}$ . Dans ce cas, les matrices et vecteurs modifiés ( $K^{(m)}$  et  $F_{ext}^{(m)}$ ) sont décomposés (Equation 5) en fonction des données nominales ( $K^{(0)}$  et  $F_{ext}^{(0)}$ ) et de perturbations ( $\Delta K$  et  $\Delta F_{ext}$ ). Chaque donnée modifiée, utilisée dans la matrice de projection modifiée est décomposée en série en adoptant une approche de type développement homotopique.

$$\begin{aligned}
K^{(m)} &= K^{(0)} + \varepsilon \Delta K \quad \dots F_{ext}^{(m)} = F_{ext}^{(0)} + \varepsilon \Delta F_{ext} \\
mS_m &= mS_0 + \varepsilon^1 mS_1 + \dots + \varepsilon^{n_1} mS_{n_1} \quad \phi_m = \phi_0 + \varepsilon^1 \phi_1 + \dots + \varepsilon^{n_1} \phi_{n_1}
\end{aligned} \tag{5}$$

Où  $\varepsilon$  est un nouveau paramètre permettant de caractériser les différentes perturbations et d'identifier les vecteurs perturbés d'ordre élevé. Cette méthode de réanalyse est appelée HPP (Homotopy Perturbation and Projection) dans la référence [3], où l'ensemble des équations nécessaires aux calculs des vecteurs perturbés est intégralement décrit pour les cas statique et modal.

## 3. Application numérique

### 3.1. Description de l'étude

On considère un modèle numérique simplifié d'un système de freinage, composé d'un disque et de deux plaquettes, présenté Figure 1-a. Les degrés de liberté du disque sont bloqués en son centre. Une pression extérieure est appliquée sur les plaquettes, lesquelles sont bloquées dans un plan parallèle au disque sur la face arrière. Le coefficient de frottement est fixé à 0.4. Les résultats obtenus avec la méthode couplée, notée CAC-HPP, sont comparés à ceux du logiciel Abaqus.

### 3.2. Quelques résultats en modifications structurale et d'interface de contact

D'une part, on définit un modèle perturbé avec une augmentation de 10% du module d'Young du disque ainsi qu'une diminution de 10% de la masse volumique du disque vis-à-vis du modèle nominal.

La Figure 1-b présente une comparaison des efforts normaux à l'interface de contact. Une bonne adéquation est observée entre ces 2 calculs puisque l'erreur moyenne observée est de 5%.

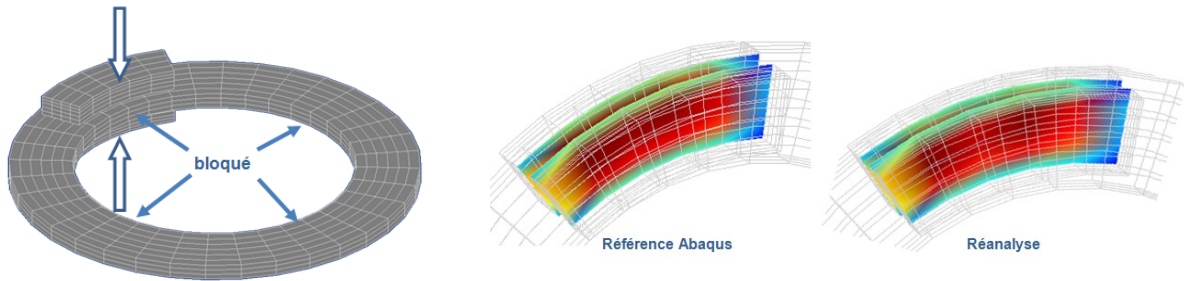


Figure 1 – (a) Modèle numérique nominal utilisé (b) Description des efforts de contact normaux perturbés (perturbations matérielles)

D'autre part, en plus des précédentes modifications, on impose une augmentation de 50% du coefficient de frottement ainsi qu'une modification de la topologie de surface de l'ordre de quelques dizaines de micromètres (profil issu d'un champ aléatoire). L'évolution des forces de contact est présentée Figure 2. Comme précédemment, les erreurs observées sont clairement acceptables (8% en moyenne) et le gain en temps s'élève à un facteur 3 ce qui confirme l'intérêt de développer des approches multidisciplinaires.

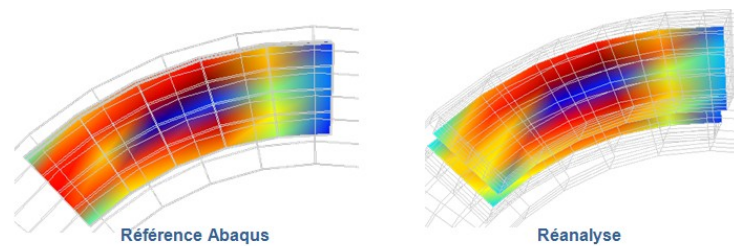


Figure 2 – Description des efforts de contact normaux perturbés (perturbations à l'interface de contact)

## Références

- [1] V.A. Yastrebov. Numerical Methods in Contact Mechanics, John Wiley & Sons, 2013.
- [2] A. Gonzales, J. Lauber, T.M. Guerra, F. Massa, T. Tison. Towards large time simulation reduction for large scale mechanical systems: A robust control approach, Intelligent Control and Automation Science, Vol. 3 Issue 1, page 417- page 422, 2013.
- [3] F. Massa, T. Tison, B. Lallemand, O. Cazier. Structural modal reanalysis methods using homotopy perturbation and projection techniques, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 200 Issue 45-46, page 2971-page 2982, 2011.
- [4] Z.Q. Feng. Some test examples of 2D and 3D contact problems involving coulomb friction and large slip, Mathematical and Computer Modelling, Vol. 28 Issue 4-8, page 469-page 477, 1998.