



**HAL**  
open science

## Etude du comportement post-bifurqué des matériaux architecturés

Christelle Combescure, Ryan Elliott, Nicolas Triantafyllidis

► **To cite this version:**

Christelle Combescure, Ryan Elliott, Nicolas Triantafyllidis. Etude du comportement post-bifurqué des matériaux architecturés. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01515073

**HAL Id: hal-01515073**

**<https://hal.science/hal-01515073>**

Submitted on 27 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Etude du comportement post-bifurqué des matériaux architecturés

C. Combescure<sup>1,2</sup>, R.S. Elliott<sup>2</sup>, N. Triantafyllidis<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Aerospace Engineering and Mechanics Dpt, Univ. of Minnesota (MN, USA), {ccombesc,elliott}@umn.edu

<sup>2</sup> LMS, Ecole Polytechnique, {combesc,nick}@lms.polytechnique.fr

---

**Résumé** — Les matériaux à microstructure régulière tels que les matériaux architecturés présentent un grand nombre de symétries géométriques internes et leur comportement à la ruine peut ainsi devenir compliqué à étudier du fait d'instabilités multiples pouvant subvenir simultanément. Les techniques usuelles d'étude de la bifurcation comprennent alors un risque de passer à côté d'une instabilité critique. Nous proposons ici une technique d'étude systématique des matériaux à grand nombre de symétries basée sur la théorie des groupes et des représentations et permettant d'accéder à toutes les bifurcations possibles dans le matériau de manière exhaustive.

**Mots clés** — matériaux architecturés, bifurcation, théorie des groupes.

---

## 1 Introduction

Les matériaux à microstructure régulière de type nids d'abeilles sont largement utilisés dans l'industrie de par leurs propriétés élastiques intéressantes (haut ratio raideur/masse) et leur comportement de ruine par écrasement successif de bandes de microstructure favorisant une haute dissipation d'énergie sous sollicitations dynamiques de type écrasement. Il a été récemment montré que ces matériaux, lorsqu'ils sont sollicités dans leur plan, peuvent montrer des comportements intéressants, via notamment des instabilités élastiques. Par exemple, selon l'arrangement de la microstructure régulière de ces matériaux, ces instabilités peuvent mener à des effets de structure correspondant à un coefficient de Poisson négatif [2] pour le matériau global ou à un stockage d'énergie via des flambements internes bistables.

Par ailleurs, l'étude des instabilités se fait, traditionnellement, par l'utilisation de perturbations introduites comme des imperfections dans le modèle initial de manière à mener à l'instabilité recherchée. Il a été démontré [6] que cette technique peut, dans certains cas, mener à un risque de ne pas détecter une instabilité critique pour la structure. Or, dans les systèmes comprenant un grand nombre de symétries internes, il est possible de voir apparaître des modes multiples de bifurcations voire des modes simples très rapprochés le long du chemin de charge. De manière à lever le risque précédemment évoqué, il est nécessaire d'avoir accès à tout l'espace des bifurcations possibles afin de pouvoir suivre l'ensemble des chemins bifurqués de manière exhaustive et ainsi être capable de déterminer le chemin stable critique suivi par le système. Dans le domaine des matériaux cellulaires que sont les alliages à mémoire de forme, de telles méthodologies ont été mises en place [4] [3] pour expliquer les nuances de martensite et d'austénite constatées lors des changements de phase à l'origine des propriétés constitutives de ces matériaux. Ces méthodologies se basent sur l'utilisation de la théorie des groupes de symétries et utilisent des algorithmes de suivi des branches de bifurcation pour, *in fine*, établir une cartographie des chemins de bifurcations stables et instables auquel le système a accès.

Les matériaux architecturés se situent à l'interface des deux problématiques présentés ci-avant. Dans une démarche industrielle de *Material-by-Design*, où il est nécessaire de maîtriser les bifurcations que subit le matériau que l'on souhaite créer, voire de diriger le matériau vers une bifurcation particulière qui lui conférerait une propriété d'intérêt, avoir accès à la cartographie complète des chemins bifurqués possibles du matériau est alors une information cruciale pour le concepteur. Ainsi, comme suggéré dans [6], on présente ici une technique d'étude des systèmes à grand nombre de symétries en se basant sur l'exemple simple et bien documenté des nids d'abeilles, éventuellement étendu aux nids d'abeille à structure fractale tronquée.

## 2 Theorie

Ce travail s'intéresse à l'analyse du comportement post-bifurqué des matériaux périodiques architecturés tels les nids d'abeilles. La géométrie de matériaux de ce type peut être décrite à l'aide de groupes de symétries via la théorie des groupes d'espace, à l'image de ce qui est fait en cristallographie pour l'étude de la structure interne des cristaux. Ainsi, un nid d'abeille classique à structure hexagonale peut être décrit par le groupe d'espace P622 selon la notation des Tables Internationales de la Cristallographie [5]. La procédure que nous suivons pour conduire l'analyse de stabilité d'un matériau périodique débute par une analyse par ondes de Bloch sur une cellule primitive de manière à déterminer les longueurs d'ondes critiques correspondant aux différentes instabilités pouvant survenir dans le système étudié. Une cellule de base correspondant à ces longueurs d'ondes est ensuite construite et son groupe de symétries associé est identifié. En se basant sur les outils de la théorie des représentations, de nombreuses informations sur les bifurcations du système découlent de cette identification et les branches bifurquées peuvent alors être identifiées puis suivies pour une cartographie complète des chemins d'équilibre possibles du système.

### 2.1 Ondes de Bloch

Dans un système périodique infini, il est nécessaire de détecter les instabilités à l'échelle microscopique qui peuvent survenir à l'échelle de une à plusieurs cellules primitives. A partir de calculs effectués sur la cellule de base la plus petit possible, *la cellule primitive*, la théorie des ondes de Bloch permet de déterminer les différentes longueurs d'ondes associées aux instabilités du système. Cette théorie considère des perturbations en déplacement de type ondes planes avec toutes les longueurs d'ondes possibles et aucune déformation globale, sur la cellule primitive. Ces ondes planes sont paramétrisées par un vecteur d'onde  $k$  comme suit :

$$u(X) = p(X)e^{ik \cdot X} \quad (1)$$

où  $u$  est la perturbation en déplacement,  $X$  est le vecteur position et  $p$  est une fonction périodique sur la cellule primitive. La fonction périodique  $p$  correspond à l'amplitude d'une onde plane donnée tandis que le vecteur d'onde  $k$  donne son orientation (direction de  $k$ ) et sa longueur d'onde (inverse de la longueur de  $k$ ) et prend des valeurs, sur la cellule de base comprises entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

Pour une configuration d'équilibre donnée, un critère de stabilité, basé sur les ondes de Bloch peut être défini à partir de la matrice Hermitienne *dynamique*.

$$K(k) = \phi(m, n)e^{ik \cdot (X(m) - X(n))} \quad m \neq n \in \mathbb{N}^2 \quad (2)$$

où  $m$  et  $n$  sont des points différents du maillage et  $\phi(m, n)$  est la matrice de rigidité entre ces deux points.

*Critère de stabilité des ondes de Bloch* : Pour chaque vecteur d'onde  $k$ , la matrice  $K$  est calculée et ses valeurs propres sont déterminées. Une instabilité est détectée quand une quelconque valeur propre de  $K$  devient négative. Le vecteur d'onde  $k$  correspondant donne alors la longueur d'onde de cette instabilité.

### 2.2 Groupe de symétries

Une fois une longueur d'onde d'intérêt identifiée, une cellule de base correspondante est construite en translatant la cellule primitive le long des vecteurs d'onde critiques déterminés par l'analyse par ondes de Bloch. Cette cellule de base sera affectée de conditions aux limites périodiques.

Les symétries d'un système sont catégorisées en deux types : les rotations, qui forment le groupe de symétries ponctuelles (ou groupe de point) du système, et les translations qui, alliées aux rotations, forment son groupe d'espace. Les symétries de translations se répétant à l'infini sans jamais revenir sur un élément du groupe déjà existant, les groupes d'espaces sont des groupes de dimension infinie, difficiles à manier en pratique. Cependant, un groupe d'espace réduit peut être associé à la nouvelle cellule de base, en restreignant le groupe des translations aux seules translations qui permettent de construire la cellule à partir de la cellule primitive, *i.e.* aux translations associées au vecteur d'onde  $k$  des ondes de Bloch. On crée ainsi un groupe de symétries de dimensions finies et la périodicité de la cellule, au delà de ces translations internes, permet de recréer la structure infinie sur laquelle on travaille.

Grâce à la théorie des représentations, des éléments théoriques appelés *représentations irréductibles*, qui prennent la forme de matrices, décrivent les symétries de notre système. On peut distinguer les représentations irréductibles associées au groupe de point, qui vont décrire des transformations identiques pour chaque cellule primitive composant notre cellule de base, et les représentations associées aux translations qui vont décrire des transformations différentes (voir Figure 1).

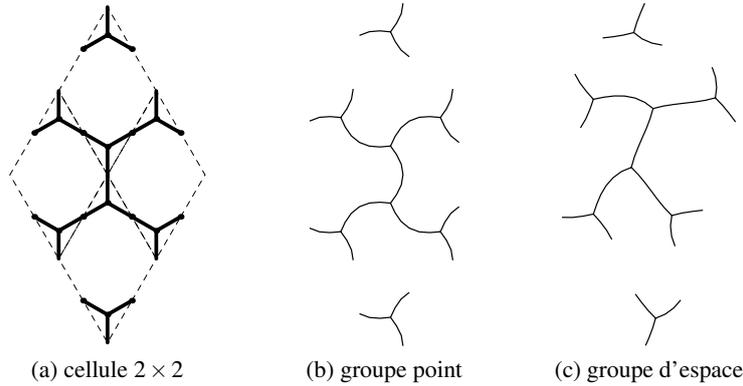


FIGURE 1 – Cellule  $2 \times 2$  (a) non déformée et exemples de déformations associées à une représentation (b) du groupe de point et (c) du groupe d'espace

Le groupe de symétries du système étant appliqué non seulement au système lui-même mais aussi au chargement que ce système subit, toutes les équations constitutives et d'équilibre du problème peuvent se projeter dans un espace réduit adapté aux symétries. Ainsi, lorsqu'une instabilité apparaît, celle-ci mène à la perte d'une ou plusieurs symétries, caractérisée par la projection du système dans une et une seule représentation irréductible.

### 3 Resultats

#### 3.1 Systèmes étudiés

La procédure évoquée précédemment est appliquée à plusieurs systèmes de manière à la valider puis à produire des résultats nouveaux. La validation se fait sur des nids d'abeille classiques hexagonaux en 2 dimensions dans le plan, et les résultats sont comparés aux résultats théoriques et expérimentaux nombreux existants dans la littérature. Par la suite, le système de nids d'abeilles fractaux proposé dans [1] est étudié pour plusieurs ratios de tailles d'hexagones à densité constante (voir Figure 2). A ces deux types de systèmes sont appliqués des chargements généraux dans le plan en déplacements et en efforts.

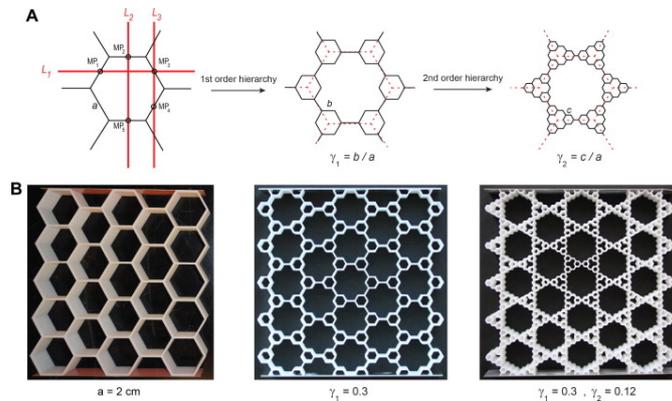


FIGURE 2 – Structures en nids d'abeilles fractaux d'ordre 0, 1 et 2 [1].

#### 3.2 Resultats

Les résultats usuels cités dans la littérature, tant expérimentaux que numériques et théoriques sont retrouvés par notre procédure :

- le chargement equibiaxial en déplacement mène à une première bifurcation triple, en accord avec les résultats théoriques de [7] et [10], avec un mode stable de plus faible énergie totale de type *mode de fleur* tel que trouvé expérimentalement dans [8]
- le chargement uniaxial en déplacement dans un sens ne mène à aucune bifurcation et dans l'autre sens à une bifurcation telle que présentée également dans les expériences de [8] et dans les résultats numériques de [9].
- le chargement equibiaxial en efforts présente un mode stable de plus faible énergie de type *mode antiroll* retrouvé par le travail présenté en [7].

Une fois cette validation effectuée, nous explorons l'espace complet des sollicitations dans le plan du nid d'abeille mais également hors plan, puis nous nous intéressons au système proposé en [1]. Nous verrons ainsi que les groupes de symétries utilisés pour l'analyse de notre problème doivent tenir compte de la symétrie du chargement et pourrons juger des différences entre un chargement en déplacement et en effort.

## Références

- [1] A. Ajdari, B.H. Jahromi, J. Papadopoulos, H. Nayeb-Hashemi, A. Vaziri, *Hierarchical honeycombs with tailorable properties*. Int. J. of Solids and Structures, Elsevier, 49 :1413-1419, 2012.
- [2] K. Bertoldi, P.M. Reis, S. Willshaw, T. Mullin *Negative Poisson's ratio behavior induced by an elastic instability*, Advanced Materials, 22(3), 361-366, 2010
- [3] R.S. Elliott, *Multiscale bifurcation and stability of multilattices*, J. of Computer-Aided Materials Design, Springer, 1(14),143-157, 2007.
- [4] R.S. Elliott, J.A. Shaw, N. Triantafyllidis *Stability of thermally-induced martensitic transformations in bi-atomic crystals*, J. of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, 11(50),2463-2493, 2002.
- [5] T. Hahn, *International tables for crystallography*. D. Reidel Publishing Company, 2005.
- [6] T. J. Healey, *A group-theoretic approach to computational bifurcation problems with symmetry*, Comp. Methods in App. Mech. and Eng. 67(3) :257-295, 1988
- [7] D. Okumura, N. Ohno, H. Noguchi, *Post-buckling analysis of elastic honeycombs subject to in-plane biaxial compression*. Int. J. of Solids and Structures 39, 3487-3503, 2002.
- [8] S.D. Papka, S. Kyriakides, *Biaxial crushing of honeycombs : Part 1 : Experiments*. Int. J. of Solids and Structures, Elsevier, 36(29) :4367-4396, 1999.
- [9] N. Triantafyllidis, M. Schraad, *Onset of failure in aluminum honeycombs under general loading*. J. of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, 46, 1089-1124, 1998.
- [10] I. Saiki, K. Ikeda, K. Murota, *Flower patterns appearing in a honeycomb structure and their bifurcation mechanism*. Int. J. of Bifurcation and Chaos 15, 497-515, 2005.