



**HAL**  
open science

## Résolution de problèmes quasi-singuliers avec la méthode X-FEM

Grégory Legrain, Nicolas Moes

► **To cite this version:**

Grégory Legrain, Nicolas Moes. Résolution de problèmes quasi-singuliers avec la méthode X-FEM. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01515067

**HAL Id: hal-01515067**

**<https://hal.science/hal-01515067>**

Submitted on 27 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

## Résolution de problèmes quasi-singuliers avec la méthode X-FEM

G. Legrain<sup>1</sup>, N. Moës<sup>1</sup>

<sup>1</sup> GeM, Ecole Centrale Nantes, {gregory.legrain,nicolas.moes}@ec-nantes.fr

**Résumé** — Cette contribution s'intéresse au comportement des méthodes de type domaines fictifs dans le cas de solutions quasi-singulières. De telles solutions apparaissent lorsque les problèmes comportent des singularités dont le centre est situé en dehors (mais très près) du domaine. Ce type de solution est commun dans le cas des structures industrielles car celles-ci contiennent généralement des coins rentrants à faible rayon de courbure. La convergence de la méthode étant fortement dégradée dans ce cas, on s'intéresse alors à la mise en œuvre de stratégies permettant de palier cette limitation.

**Mots clés** — X-FEM, domaines fictifs, singularités, haut ordre, convergence.

### 1 Introduction

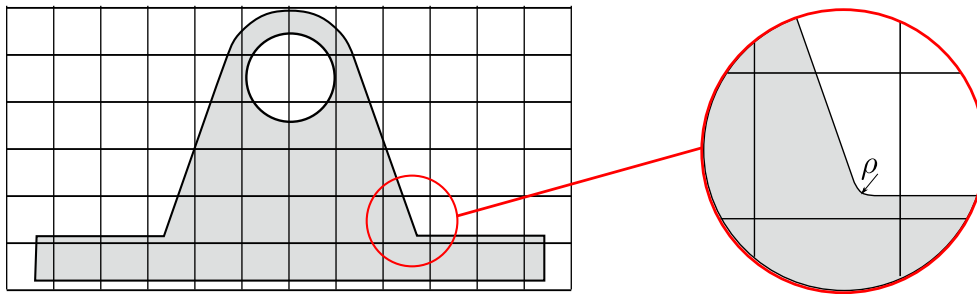


FIGURE 1 – Calcul par approche de type domaine fictif et zoom sur un coin rentrant comportant un congé de raccordement.

Les structures industrielles font communément apparaître des angles rentrants. Ces derniers sont généralement arrondis (congé de raccordement) afin de limiter l'amplitude des contraintes à leur proximité. La taille des congés de raccordement dépend fortement du procédé de fabrication, et en fonction de la quantité d'intérêt ces derniers peuvent être négligés lors de l'analyse. Si l'état de contrainte dans la zone d'un coin est grandeur d'intérêt, alors ces rayons ne peuvent être négligés. Cependant ces régions à forte courbure nécessitent l'utilisation de maillages extrêmement fins qui sont très pénalisants en terme de coûts de calcul. L'utilisation d'éléments à transformations géométriques [1, 2] permet alors de représenter exactement la géométrie avec un faible nombre d'éléments. La problématique de finesse du maillage peut aussi être résolue par l'utilisation d'approches de type domaines fictifs [3] telles les méthodes X-FEM [4] ou Finite Cell [5]. En effet, la taille de maille peut alors être indépendante de celle des détails géométriques (cf. figure 1). En contrepartie, la phase d'intégration de la forme faible devient fondamentale : si la géométrie est représentée par une level-set, il est nécessaire de la construire sur un maillage suffisamment fin. L'utilisation d'approches plus complexes telles que les sub-grid level-sets [6, ?], une représentation pixélisée fine [5] ou l'approche Nurbs-Enhanced X-FEM [7] permettent de s'affranchir de cette problématique, et donc représenter des détails très fins tout en gardant un maillage grossier. La solution étant alors régulière, on s'attend à obtenir des ordres de convergence optimaux. Cependant, même si les champs mécaniques sont réguliers, leur variation n'en demeure pas moins très rapide. On s'intéresse alors à l'étude de la convergence des méthodes de type domaine fictifs dans ce cas de figure. On s'intéressera en particulier aux méthodes de haut ordre (p-fem) dont les propriétés de convergence peuvent être avantageuses. Deux stratégies seront considérées :

1. Enrichissement de l'approximation grâce à la méthode de partition de l'unité [8] ;

2. Création de maillages non-conformes selon une progression géométrique définie.

Ces deux stratégies seront comparées en 1D, puis en 2D.

## 2 Champs mécaniques en fond de congé

Le comportement de la solution éléments finis est intimement liée aux caractéristiques de la solution continue du problème. Pour cela, on considère le problème d'un coin rentrant dans un domaine semi-infini soumis à une sollicitation uniforme à l'infini (cf figure 2).

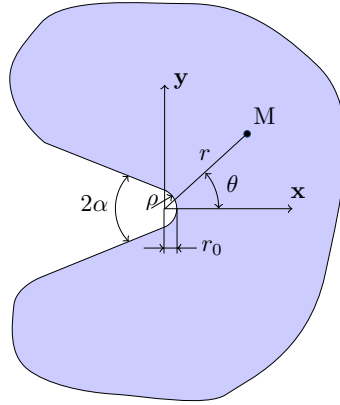


FIGURE 2 – Problème d'intérêt.

Les champs mécaniques sont obtenus en suivant l'approche proposée par Filippi et al. [9]. Cette dernière utilise un potentiel de Kolosov-Muskhelishvili et une transformation géométrique permettant de s'approcher de la géométrie du congé de raccordement. On peut alors montrer que le champ de contrainte asymptotique s'écrit :

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = K_1^* r^{\lambda_1 - 1} [f_{ij}^1(\alpha, \theta) + g_{ij}^1(r, \alpha, \theta)] + K_2^* r^{\lambda_2 - 1} [f_{ij}^2(\alpha, \theta) + g_{ij}^2(r, \alpha, \theta)] \quad (1)$$

Dans cette expression, il est important de remarquer que les fonctions  $f_{ij}^k$  sont identiques à celles obtenues dans le cas d'un angle aigu (solution de Williams). Les termes  $K_i^*$  sont des facteurs d'intensité de contrainte, et les exposants  $\lambda_i$  représentent la singularité des champs mécanique. Notons que les fonctions  $g_{ij}^k$  évoluent en  $r^{\mu_k - \lambda_k}$ , ce qui fait que le champ de contrainte est singulier quand  $r$  tend vers zéro. Néanmoins, le centre de la singularité est en dehors du domaine, comme illustré sur la figure 2 : la solution reste bien régulière dans le domaine. Le taux de convergence de la méthode des éléments finis en norme énergétique doit donc être borné par le degré des polynômes d'approximation dans le cas d'éléments finis raffinés en  $h$ . Dans le cas d'éléments finis  $p$ , la convergence est alors exponentielle. Lorsque le rayon de raccordement diminue, alors le centre de la singularité se déplace vers la frontière du domaine, pour finalement la toucher lorsque  $\rho = 0$ . La solution devient alors singulière, et la convergence est algébrique tant en éléments finis  $h$  que  $p$ .

## 3 Illustration numérique

L'influence du passage d'une solution régulière à une solution singulière sur la convergence de la méthode X-FEM est maintenant illustrée. On considère le problème présenté sur la figure 3(a). Les conditions limites sur le bord du domaine proviennent de la solution exacte présentée ci-dessous, ce qui permet alors de réaliser une étude de convergence. Le matériau est considéré linéaire, élastique et isotrope ( $E = 1.$ ,  $\nu = 0.3$ ) sous l'hypothèse des petites perturbations. Le problème est résolu avec la méthode X-FEM sur une grille régulière de triangles linéaires ( $4 \times 4$  à  $128 \times 128$  éléments par côté). La figure 3(b) présente la convergence de l'erreur relative en norme énergétique : on voit clairement l'influence du congé de raccordement sur le taux de convergence. En particulier, pour une solution quasi-singulière ( $\rho$  très petit) la convergence est analogue au cas du coin rentrant (i.e. singulière).

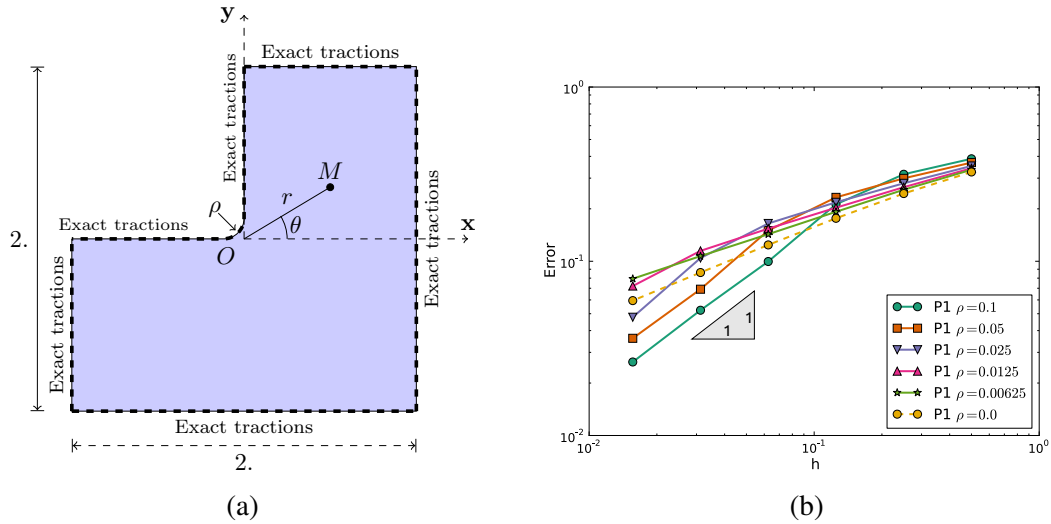


FIGURE 3 – (a) Problème modèle, (b) Convergence

## 4 Conclusion

On a montré l'influence de la taille des congés de raccordement sur la convergence d'une approche domaine fictif. On s'attachera ensuite à comprendre la raison de ce phénomène afin de le résoudre avec les deux approches proposées.

## Références

- [1] Barna a. Szabó and Ivo Babuška. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 1 edition, 1991.
- [2] Ruben Sevilla and Sonia Fern. NURBS-enhanced finite element method ( NEFEM ). *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76(February) :56–83, 2008.
- [3] V K Saulèv. On the solution of some boundary value problems on high performance computers by fictitious domain method. *Siberian Math. J.*, 4 :912–925, 1963.
- [4] Nicolas Moës, John E Dolbow, and Ted Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46 :131–150, 1999.
- [5] A ; Düster and E Rank. The p-version of the finite element method compared to an adaptive h-version for the deformation theory of plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :1925–1935, 2001.
- [6] Kristell Dréau, Nicolas Chevaugeon, and Nicolas Moës. Studied X-FEM enrichment to handle material interfaces with higher order finite element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(29-32) :1922–1936, 2010.
- [7] Grégory Legrain. A NURBS enhanced extended finite element approach for unfitted CAD analysis. *Computational Mechanics*, 52(4) :913–929, April 2013.
- [8] J M Melenk, I Babuška, and I Babuskab. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139 :289–314, 1996.
- [9] S Filippi, P. Lazzarin, and R Tovo. Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates. *International Journal of Solids and Structures*, 39(17) :4543–4565, August 2002.