



HAL
open science

Sur une méthode de conversion d'images de mesures de champs: Application au problème inverse de conductivité

Cédric Bellis, Hervé Moulinec

► **To cite this version:**

Cédric Bellis, Hervé Moulinec. Sur une méthode de conversion d'images de mesures de champs: Application au problème inverse de conductivité. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01515062

HAL Id: hal-01515062

<https://hal.science/hal-01515062>

Submitted on 27 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Sur une méthode de conversion d'images de mesures de champs : Application au problème inverse de conductivité

C. Bellis, H. Moulinec

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS, Aix-Marseille Univ, Centrale Marseille, {bellis,moulinec}@lma.cnrs-mrs.fr

Résumé — Dans cette communication nous présentons une méthode numérique permettant de convertir des images de mesures de champs en cartes de propriétés du matériau correspondant. Le cadre simplifié adopté est celui du modèle de conductivité scalaire périodique. L'algorithme proposé vise alors à résoudre, par approximation successives, une équation de Lippmann-Schwinger pour le champ de conductivité inconnu du matériau. Un ensemble de résultats numériques sera présenté afin d'illustrer les performances de la méthode.

Mots clés — Problèmes inverses, Mesures de champs, Conductivité

1 Introduction

Contexte et motivations. Dans cette étude nous nous intéressons à l'identification des propriétés constitutives d'un matériau donné. Ce problème inverse est abordé dans le cadre des avancées récentes en mesures de champs. Les évolutions des moyens de mesure permettent aujourd'hui d'aborder la reconstruction des paramètres d'une équation aux dérivées partielles modèle (l'équation d'équilibre) à partir de la donnée d'une famille de champs solutions mesurés de façon interne dans le milieu. Ainsi, l'objectif de cette communication est de présenter une méthode de reconstruction permettant d'effectuer une conversion entre de telles images de mesures de champs et un paramètre matériau objectif. Pour simplifier la présentation de la méthode, le cadre adopté est celui du modèle de diffusion périodique, électrique ou thermique, pour lequel les techniques expérimentales et les méthodes numériques d'inversion récentes sont discutées dans [1]. L'approche proposée ici dérive des méthodes numériques développées pour le calcul de réponses de milieux composites [4], qui sont combinées à l'approche de reconstruction [2], formulée dans le cas de l'élasticité isotrope.

Position du problème. Considérons un milieu périodique avec pour volume élémentaire représentatif $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^d$ ainsi que le problème de conductivité associé suivant

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\gamma(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) &= 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d \\ \langle \nabla u \rangle &= \mathbf{E}, \quad u \text{ est } \mathcal{V}\text{-périodique,} \end{aligned} \quad (1)$$

où $\gamma \in L^\infty_{\text{per}}(\mathcal{V}, \mathbb{R}_+ \setminus \{0\})$ représente le champ \mathcal{V} -périodique de conductivité constitutif du matériau et u est un potentiel scalaire. Le champ de gradient correspondant est défini par $\mathbf{e} = \nabla u$, et la notation $\langle \cdot \rangle$ est utilisée pour décrire la moyenne spatiale sur \mathcal{V}

$$\langle \mathbf{e} \rangle = \frac{1}{|\mathcal{V}|} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{e}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (2)$$

de sorte que \mathbf{E} représente dans le problème (1) une intensité moyenne imposée. Ainsi, il existe une unique solution $u \in H^1_{\text{per}}(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ à ce problème.

Cette étude suppose que N expériences peuvent être réalisées en variant l'intensité moyenne imposée selon $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\ell$ avec $\ell = 1, \dots, N$ dans le problème (1), et qu'il est possible de mesurer de façon interne les champs de gradients solutions correspondants, à savoir $\mathbf{e}_\ell(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$. Dans ce cadre, cette communication s'intéresse à la formulation d'une méthode numérique utilisant les images de ces mesures des champs $\mathbf{e}_\ell(\mathbf{x})$ afin de reconstruire la distribution de conductivité du matériau, i.e. $\mathbf{x} \mapsto \gamma(\mathbf{x})$ dans \mathcal{V} ou son contraste relatif à sa valeur moyenne $\langle \gamma \rangle$.

2 Formulation intégrale

La méthode numérique proposée vise à résoudre une équation de Lippmann-Schwinger satisfaite par la fonction de conductivité $\gamma(\mathbf{x})$ recherchée. Nous établissons ci-après cette équation intégrale.

Problèmes auxiliaires. Soit $\bar{\mathbf{e}}_k \in \mathbb{R}^d$ pour $k = 1, \dots, d$, et étant donnés $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ainsi que les termes sources $\boldsymbol{\tau}_k \in L^2_{\text{per}}(\mathcal{V}, \mathbb{R}^d)$, considérons les problèmes auxiliaires suivants qui sont satisfaits par le champ inconnu γ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\gamma(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{e}}_k) &= -\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{x}) \quad \text{dans } \mathcal{V} \\ \langle \gamma \rangle &= \bar{\gamma}, \quad \gamma \text{ est } \mathcal{V}\text{-périodique.} \end{aligned} \quad (3)$$

En définissant pour toute fonction \mathcal{V} -périodique la décomposition en série de Fourier

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}[f](\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\mathcal{V}|} \int_{\mathcal{V}} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\mathbf{x}, \quad f(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](\mathbf{x}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}},$$

alors, pour tout $k = 1, \dots, d$, le problème (3) se traduit dans l'espace de Fourier par

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\gamma}(\boldsymbol{\xi}) \bar{\mathbf{e}}_k = -\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_k(\boldsymbol{\xi}).$$

Ce système surdéterminé est associé à des conditions de compatibilité que nous ne décrivons pas ici. Ces conditions seront cependant naturellement vérifiées pour le choix que nous ferons pour les champs $\boldsymbol{\tau}_k$. Supposant dorénavant que $\{\bar{\mathbf{e}}_k\}_k$ constitue une base, non nécessairement normalisée, de \mathbb{R}^d , alors ces d équations permettent d'obtenir

$$\hat{\gamma}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\xi} = -\sum_{k=1}^d \frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_k)}{|\bar{\mathbf{e}}_k|^2} \bar{\mathbf{e}}_k.$$

En introduisant l'opérateur de Green périodique $\hat{\Gamma} = \frac{\boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2}$ pour le problème de conductivité (1), alors le champ constitutif γ solution de l'ensemble des d problèmes (3) satisfait

$$\hat{\gamma}(\mathbf{0}) = \bar{\gamma} \quad \text{et} \quad \hat{\gamma}(\boldsymbol{\xi}) = -\hat{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) : \sum_{k=1}^d \frac{\bar{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\boldsymbol{\tau}}_k}{|\bar{\mathbf{e}}_k|^2}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}. \quad (4)$$

En introduisant le produit doublement contracté et convolué en espace \ast alors les équations (4) se traduisent dans l'espace réel par

$$\gamma(\mathbf{x}) = \bar{\gamma} - \frac{1}{|\mathcal{V}|} \left[\Gamma \ast \sum_{k=1}^d \frac{\bar{\mathbf{e}}_k \otimes \boldsymbol{\tau}_k}{|\bar{\mathbf{e}}_k|^2} \right] (\mathbf{x}). \quad (5)$$

Équation de Lippmann-Schwinger. Nous montrons maintenant comment utiliser les problèmes auxiliaires et leur solution associée (5). Pour tout $k = 1, \dots, d$, on associe un indice $\ell_k \in \{1, \dots, N\}$ de sorte que le problème original (1) avec moyenne imposée \mathbf{E}_{ℓ_k} et sa solution e_{ℓ_k} peut être réécrit comme le problème auxiliaire (3) pour le champ de conductivité $\gamma(\mathbf{x})$ avec comme terme source

$$\boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}) \delta \mathbf{e}_k(\mathbf{x}) \quad \text{avec} \quad \delta \mathbf{e}_k(\mathbf{x}) = (\mathbf{e}_{\ell_k}(\mathbf{x}) - \bar{\mathbf{e}}_k), \quad 1 \leq k \leq d, \ell_k \in \{1, \dots, N\}.$$

La relation (5) constitue alors l'équation de Lippmann-Schwinger recherchée pour le champ γ , à savoir

$$\gamma(\mathbf{x}) + \frac{1}{|\mathcal{V}|} \left[\Gamma \ast \sum_{k=1}^d \frac{\bar{\mathbf{e}}_k \otimes (\gamma \delta \mathbf{e}_k)}{|\bar{\mathbf{e}}_k|^2} \right] (\mathbf{x}) = \bar{\gamma}. \quad (6)$$

3 Reconstruction du champ de conductivité

Algorithme itératif de résolution. Une équation intégrale telle que (6) peut être résolue par la méthode des approximations successives. Lorsque les termes δe_k , pour $k = 1, \dots, d$, sont suffisamment petits, une méthode de point fixe peut être utilisée à cette fin. Ainsi, nous proposons ci-après un algorithme itératif permettant de résoudre l'équation (6).

$$\begin{array}{l}
 \text{Initialisation} \\
 \text{Itérer pour tout } n \geq 0
 \end{array}
 \left[\begin{array}{l}
 \text{(i)}_0 \quad \gamma_0(\mathbf{x}) = \bar{\gamma} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \\
 \text{(ii)}_0 \quad \mathbf{j}_{k,0}(\mathbf{x}) = \gamma_0(\mathbf{x})\delta e_k(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, 1 \leq k \leq d \\
 \\
 \text{(i)} \quad \hat{\mathbf{j}}_{k,n}(\boldsymbol{\xi}) = \mathcal{F}[\mathbf{j}_{k,n}](\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi}, 1 \leq k \leq d \\
 \text{(ii)} \quad \hat{\gamma}_{n+1}(\boldsymbol{\xi}) = -\hat{\Gamma}(\boldsymbol{\xi}) : \sum_{k=1}^d \frac{\bar{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{j}}_{k,n}(\boldsymbol{\xi})}{|\bar{\mathbf{e}}_k|^2} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0} \\
 \text{(iii)} \quad \hat{\gamma}_{n+1}(\mathbf{0}) = \bar{\gamma} \\
 \text{(iv)} \quad \gamma_{n+1}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\gamma}_{n+1}](\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V} \\
 \text{(v)} \quad \mathbf{j}_{k,n+1}(\mathbf{x}) = \gamma_{n+1}(\mathbf{x})\delta e_k(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, 1 \leq k \leq d
 \end{array} \right. \quad (7)$$

Dans la perspective du problème inverse d'identification du champ de conductivité γ , il est essentiel d'utiliser une méthode de reconstruction qui requiert le moins d'information a priori. Ainsi, il est préférable de rechercher le contraste relatif de conductivité par rapport à la moyenne $\bar{\gamma}$ que nous notons alors

$$\bar{\delta}\gamma_n(\mathbf{x}) = \frac{\gamma_n(\mathbf{x}) - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}}.$$

Un algorithme itératif modifié peut alors être aisément dérivé de (7) et sera utilisé ci-après.

Convergence de l'algorithme. Nous abordons ici la question de la convergence des approximations successives. Il est connu [3], que cette approche converge sous des conditions suffisantes sur la norme du noyau de l'opérateur intégral intervenant dans (6). En introduisant le tenseur du deuxième ordre

$$\mathcal{E} = \sum_{k=1}^d \frac{\bar{\mathbf{e}}_k \otimes \delta e_k}{|\bar{\mathbf{e}}_k|^2}, \quad (8)$$

cette condition s'exprime alors, dans une norme à préciser, par $\frac{1}{|\mathcal{V}|} \|\mathbf{\Gamma} * \mathcal{E}\| < 1$.

Dans le contexte considéré de traitement d'images issues de mesures de champs qui sont discrétisées en pixels (2D) ou voxels (3D), les données disponibles sont moyennées en espace. On peut ainsi supposer que les champs mesurés satisfont l'hypothèse : $e_{\ell_k} \in L_{\text{per}}^\infty(\mathcal{V}, \mathbb{R}^d)$ pour tout $k = 1, \dots, d$. En utilisant les propriétés de l'opérateur de Green $\mathbf{\Gamma}$, nous pouvons alors établir la convergence de l'algorithme (7) dans l'espace fonctionnel $L_{\text{per}}^2(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ si la condition suffisante suivante est satisfaite

$$\frac{1}{|\mathcal{V}|} \|\mathbf{\Gamma} * \mathcal{E}\|_2 \leq \sup_{\mathcal{V}} \|\mathcal{E}\|_F < 1, \quad (9)$$

en utilisant la norme de Frobenius $\|\mathcal{E}\|_F = [\mathcal{E}^* : \mathcal{E}]^{1/2}$. Cette condition sur les mesures peut alors être interprétée de deux façons différentes : (i) pour construire les expériences à réaliser en vue d'obtenir une reconstruction optimale par l'algorithme (7), ou (ii) pour choisir la base $\{\bar{\mathbf{e}}_k\}_k$ de façon optimale pour un ensemble de mesure donné.

4 Résultats numériques

Nous présentons ici un exemple numérique illustrant la méthode de reconstruction proposée. Les mesures utilisées sont des données synthétiques. Toutefois pour éviter les connections implicites entre

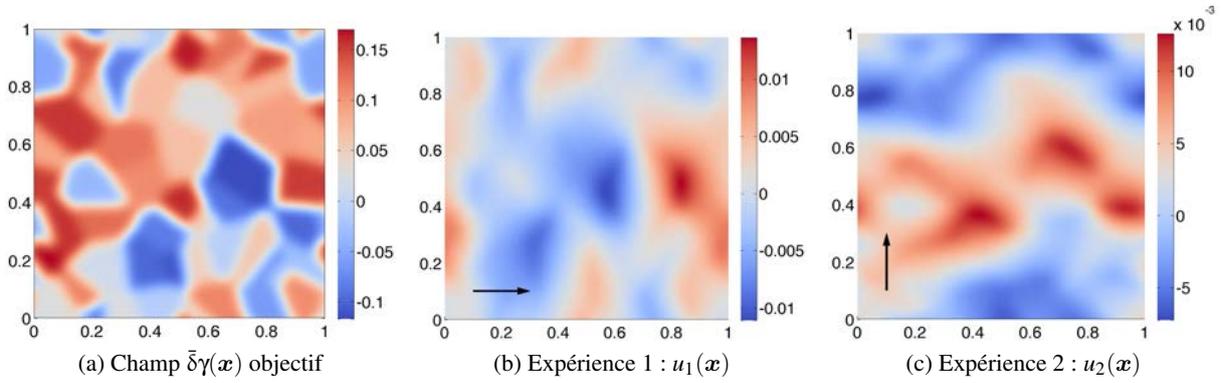


FIGURE 1 – (a) Configuration utilisée pour générer les données. (b–c) Champs scalaires u_k calculés par la méthode des éléments-finis. Les flèches représentent les gradients moyens $\langle \nabla u_k \rangle$ normalisés.

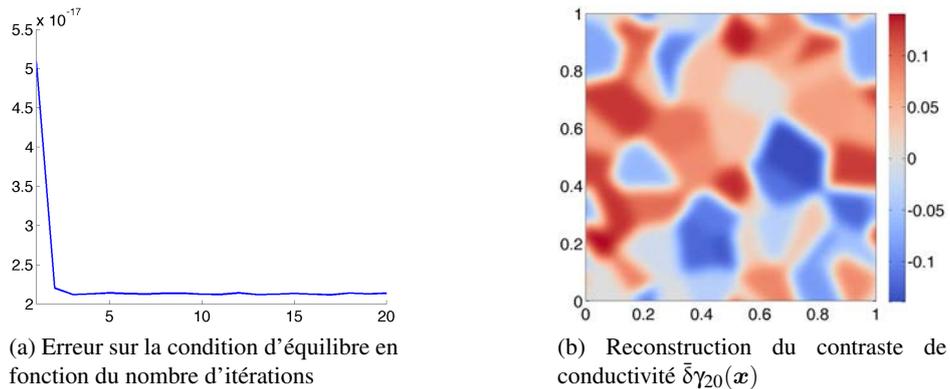


FIGURE 2 – Résultat obtenus grâce à l’algorithme itératif de reconstruction

les solveurs direct et inverse, les données sont générées par un code éléments-finis permettant de résoudre le problème (1) alors que l’algorithme (7) utilise des images des champs solutions correspondants. L’exemple 2D de la figure 1 montre la configuration considérée : le champ de conductivité périodique à reconstruire est représenté Fig. 1a, et les solutions représentées sur les figures 1b et 1c sont calculées en imposant les conditions $\langle \nabla u_1 \rangle = (1, 0)$ et $\langle \nabla u_2 \rangle = (0, 1)$ respectivement. L’algorithme (7) utilise les figures 1b et 1c non bruitées comme images de mesures de champs et la convergence est vérifiée en calculant l’erreur sur la condition d’équilibre $\text{div}((1 + \bar{\delta}\gamma_n(\mathbf{x}))\mathbf{e}_k) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ et $k = 1, 2$. L’erreur totale est représentée Fig. 2a et la reconstruction obtenue à l’itération $n = 20$ est donnée Fig. 2b.

5 Conclusion

La méthode de reconstruction proposée repose sur l’utilisation d’images issues de mesures de champs afin de reconstruire la carte quantitative de distribution de conductivité d’un matériau considéré. Afin de réduire la complexité du calcul numérique, le schéma itératif introduit alterne entre l’espace réel et l’espace de Fourier, et requiert donc l’application des transformées de Fourier directe et inverse de façon répétée. Les performances de cet algorithme sont illustrées sur des exemples numériques. Les perspectives de ce travail incluent l’adaptation de cette méthode au cas de l’élasticité linéaire isotrope.

Références

- [1] G. Bal. *Hybrid inverse problems and internal functionals*, Inside Out II, MSRI Publications, 2012.
- [2] G. Bal, C. Bellis, S. Imperiale, F. Monard. *Reconstruction of constitutive parameters in isotropic linear elasticity from noisy full-field measurements*, Inverse Problems, 125004, 2014.
- [3] R. Kress *Linear Integral Equations*, Springer, 2014.
- [4] H. Moulinec, P. Suquet *A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg, 69–94, 1998.