



HAL
open science

Stratégies de prise en compte et d'approximation des conditions de contact/frottement entre solides déformables (cas statiques et dynamiques)

Yves Renard

► **To cite this version:**

Yves Renard. Stratégies de prise en compte et d'approximation des conditions de contact/frottement entre solides déformables (cas statiques et dynamiques). 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01515058

HAL Id: hal-01515058

<https://hal.science/hal-01515058v1>

Submitted on 27 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Stratégies de prise en compte et d'approximation des conditions de contact/frottement entre solides déformables (cas statiques et dynamiques)

Y. Renard¹

¹ LAMCOS, ICI, INSA-Lyon yves.renard@insa-lyon.fr

Résumé — L'objectif de cette présentation est de faire le point sur les différentes stratégies de prise en compte consistant des conditions de contact/frottement entre structures élastiques. On discutera de la genèse théorique des différentes méthodes, de leurs éventuels liens et on essaiera de comparer leur intérêt pratique dans le cadre de la discrétisation par éléments finis et la résolution numérique dans les cadres statique et dynamique.

Mots clés — Lagrangien augmenté, contact, frottement, éléments finis, solides déformables.

1 Introduction

Une difficulté bien connue concernant les conditions contact avec frottement est qu'elles font intervenir des graphes discontinus (graphe contrainte-déplacement pour le contact unilatéral et contrainte-vitesse pour le frottement de Coulomb). L'enjeu, tant du point de vue théorique que numérique, est alors souvent de trouver des alternatives à l'utilisation de ces graphes discontinus qui, par exemple, ne permettent pas de faire des passages à la limite directement dans les équations. La première alternative, qui a été largement utilisée dès les premiers travaux de Fichera [5] sur le problème de Signorini est l'utilisation du concept d'inéquation variationnelle, concept qui a été ensuite repris largement dans le cadre plus général de l'optimisation convexe avec contraintes.

Les inéquations variationnelles sont intéressantes pour les études théoriques en raison de la facilité que l'on peut avoir à passer à la limite dans une inégalité. C'est donc le cadre favorable pour les preuves d'unicité et de convergence. En revanche, les inéquations variationnelles ne sont pas un cadre très favorable pour le développement de stratégies numériques car il n'existe pas de méthode générale pour résoudre un système d'inéquations. Si le problème est strictement un problème d'optimisation sous contraintes (problème de contact sans frottement) on peut lui appliquer un certain nombre d'algorithmes d'optimisation avec contraintes (Gradient conjugué projeté, méthodes de points intérieurs ...). On peut également transformer un problème de contact avec frottement en problème de complémentarité (linéaire ou pas) et appliquer là aussi des algorithmes adaptés (algorithme de Lemke, par exemple). Toutefois, les principaux logiciels qui traitent le contact avec frottement de solides déformables, en dehors des calculs en dynamique explicite, utilisent quasi-exclusivement l'algorithme de Newton-Raphson parfois en interaction avec un algorithme d'Uzawa sur le lagrangien augmenté.

L'objectif de cette présentation sera d'essayer de faire le tour des techniques mathématiques utilisables pour représenter et approcher numériquement une condition de contact avec ou sans frottement et d'en comparer les propriétés du point de vue théorique et de la mise en œuvre de stratégies numériques.

2 Lagrangien augmenté proximal pour une condition de contact, pour une condition de frottement. Lien avec la régularisation de Yosida.

Le lagrangien augmenté proximal a été utilisé pour la première fois par P. Alart et A. Curnier dans [1] pour la prise en compte des conditions de contact avec frottement. Son utilisation a été ensuite popularisée par T. Laursen [8] et P. Wriggers [11] et s'est très largement répandue dans les logiciels de calcul. On donnera les bases théoriques de cette approche et en particulier le lien avec la régularisation

de Yosida.

3 Autres fonctions de complémentarité

Un des intérêts du lagrangien proximal est qu'il fournit une fonction, dite de complémentarité, qui transforme le système d'inégalité de la relation de complémentarité en une seule et unique égalité. Une fonction de complémentarité est une fonction régulière $\varphi(a, b)$ telle que

$$\varphi(a, b) = 0 \iff a \geq 0, ab = 0, b \geq 0.$$

Un grand nombre de fonctions de complémentarité ont été répertoriées (voir par exemple [6]). La fonction de complémentarité issue du lagrangien proximal est seulement continue et C^1 par morceaux. Obtenir des fonctions de complémentarité plus régulières n'est pas une difficulté mais n'est pas forcément souhaitable dans la perspective d'une résolution par l'algorithme de Newton-Raphson.

4 Formulation de type Nitsche et lien avec le Lagrangien augmenté et l'approche par pénalisation

Les formulations de type Nitsche sont traditionnellement utilisées pour traduire des conditions de type Dirichlet ou des conditions de transmissions. Leur application aux conditions de contact avec ou sans frottement est très récente [3, 9, 2]. On présentera les avantages et inconvénients de cette technique du point de vue théorique et numérique.

5 Grandes déformations et difficultés de l'obtention d'une formulation continue par rapport aux inconnues

Malgré l'utilisation d'une stratégie de Lagrangien augmenté, la plupart des formulations du contact en grandes déformations souffrent de problèmes de non-continuité [7]. On présentera différentes manières de prendre en compte le contact avec frottement en grandes déformation avec les avantages et inconvénients en particulier du point de vue de la régularité de la formulation.

6 Application aux problèmes d'impact en élastodynamique. Schémas et formulations adaptées

L'approximation des conditions de contact en élastodynamique pose de sérieux problèmes de stabilité et d'oscillations parasites. Il est difficile de produire des schémas numériques qui soient à la fois stables, non oscillants et qui ne dissipent pas de manière exagérée l'énergie lors des impacts. Ici également, les différentes stratégies de prise en compte du contact seront comparées en vue de l'obtention de schémas numériques stables, non oscillants et respectant au mieux la conservation de l'énergie (voir en particulier [10, 4]).

Références

- [1] P. Alart, A. Curnier. *A generalized Newton method for contact problems with friction*. J. Mech. Theor. Appl., 7 :1, 67–82, 1988.
- [2] C. Annavarapu, M. Hautefeuille, J.E. Dolbow. *A Nitsche stabilized finite element method for frictional sliding on embedded interfaces. Part II : Intersecting interfaces*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 267, pp. 318–341, 2013.
- [3] F. Chouly, P. Hild. *A Nitsche-based method for unilateral contact problems : numerical analysis*. SIAM J. Numer. Anal., 51, pp. 1295–1307, 2013.
- [4] F. Chouly, P. Hild, Y. Renard. *A Nitsche finite element method for dynamic contact : 1. Semi-discrete problem analysis and time-marching schemes*. to appear in ESAIM Math. Model. Numer. Anal.

- [5] G. Fichera. *Sul problema elastostatico di Signorini con ambigue condizioni al contorno*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 8 :34, 138–142, 1963.
- [6] A. Galántai. *Properties and construction of NCP functions*, Comput. Optim. Appl. 52, pp 805–824, 2012.
- [7] K. Poullos, Y. Renard. *An unconstrained integral approximation of large sliding frictional contact between deformable solids*. <hal-00937569v2>, 2014.
- [8] T.A. Laursen. *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [9] Y. Renard. *Generalized Newton's methods for the approximation and resolution of frictional contact problems in elasticity*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 256, 38–55, 2013.
- [10] Y. Renard. *The singular dynamic method for constrained second order hyperbolic equations. application to dynamic contact problems*. J. Comput. Appl. Math., 234(3) :906-923, 2010.
- [11] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics, Second Edition*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.