



HAL
open science

Une condition de contact locale de type "mortar" implémentable dans un code éléments finis industriel

Guillaume Drouet, Patrick Hild, Mickaël Abbas

► To cite this version:

Guillaume Drouet, Patrick Hild, Mickaël Abbas. Une condition de contact locale de type "mortar" implémentable dans un code éléments finis industriel. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01515055

HAL Id: hal-01515055

<https://hal.science/hal-01515055>

Submitted on 27 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Une condition de contact locale de type "mortar" implémentable dans un code éléments finis industriel

G. Drouet^{1,2}, P. Hild², M. Abbas¹

¹ LaMSID, UMR 8193, EDF, CNRS, CEA, France, {guillaume.drouet,mickael.abbas}@edf.fr

² IMT, UMR 5219, Université Toulouse 3, CNRS, France, phild@math.univ-toulouse.fr

Résumé — On s'intéresse dans ce travail à la gestion de l'incompatibilité des maillages pour le contact dans un cadre industriel. On introduit une condition de contact en moyenne locale qui permet à la fois de satisfaire les patchs tests courants (à l'instar des méthodes de type "mortar") et d'obtenir une analyse mathématique optimale tout en conservant un aspect local et une définition analytique des espaces d'approximation utilisés. Ces dernières conditions sont primordiales pour pouvoir réaliser l'implémentation de cette nouvelle méthode dans le code éléments finis industriel *Code_Aster* développé par EDF R&D.

Mots clés — Contact unilatéral, Local Average Contact (LAC), méthode "mortar".

1 Introduction

La méthode des éléments finis est actuellement massivement utilisée en mécanique numérique pour simuler les problèmes de contact unilatéral entre deux objets déformables [6, 10]. Ce sont des problèmes possédant une condition limite non linéaire, à savoir respecter une condition de non interpénétration pour le champ de déplacement, une condition de signe pour la pression normale sur la zone de contact et une condition de complémentarité entre ces deux champs. Dans le cas général, de tels problèmes amènent à la gestion de maillages incompatibles (i.e. dont les nœuds des zones de contact des objets considérés sont non coïncidents).

Dans ce travail, on s'intéresse à la modélisation de ce type de problème dans un code éléments finis industriel. Les méthodes les plus utilisées dans le milieu industriel sont basées sur des algorithmes de type nœud-segment en 2D et de type nœud-facette en 3D. Ces méthodes sont connues pour échouer aux patchs tests dans le cas général des maillages incompatibles et pour mener à des analyses mathématiques sous optimales. D'autre part, le milieu académique a été très productif dans ce domaine ces quinze dernières années. Les méthodes les plus abouties sont les méthodes "mortar" (voir [2]) adaptées au contact (premiers travaux [1, 4, 5, 8]). Ces méthodes consistent à utiliser une simple projection L^2 sur un espace joint, i.e., espace d'éléments finis définis entre les deux objets. Les différents choix d'espaces joints engendrent toute une famille de méthodes de type "mortar". Cependant ces méthodes possèdent d'importants désavantages lorsque l'on considère leur implémentation de manière générique dans un code industriel. Les deux principaux inconvénients dans notre cas sont la non-localité de la méthode (méthodes "mortar" standard [1, 4, 8, 9]) et la définition non analytique des espaces éléments finis joints pour certains types d'éléments (méthode mortar dual [5, 7]).

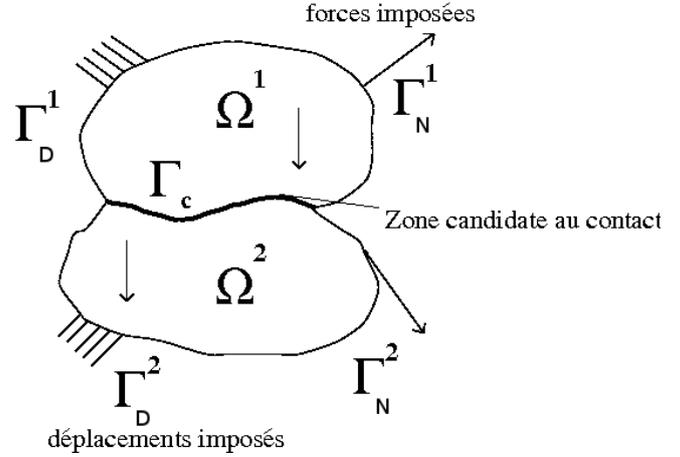
Le but de ce travail (voir [3]) est donc de définir une méthode donnant des résultats numériques et mathématiques d'aussi bonne qualité que ceux obtenus par les méthodes "mortar" tout en gardant les aspects (localité, définition analytique des espaces joints, etc...) nécessaires à l'implémentation dans *Code_Aster* lorsque l'on considère tous les types d'éléments utilisés (tétraèdres à 4 et 10 nœuds, hexaèdres à 8, 20 et 27 nœuds pour les cas 3D; triangles à 3 et 6 nœuds, quadrangles à 4 et 8 nœuds pour les cas 2D). Pour ce faire, on va définir une condition de contact simple qui consiste à satisfaire les conditions de contact en moyenne sur chaque macro-élément d'un macro-maillage défini de manière idoine.

2 La méthode "Local Average Contact" (LAC) définition et résultats mathématiques :

2.1 Formulation forte du problème de contact unilatéral entre deux objets déformables

On cherche le champ de déplacement $u = (u_1, u_2)$:
 $\overline{\Omega^1} \times \overline{\Omega^2} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou $d = 3$) tel que (1)–(8)
 soient satisfaites :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u_\ell) &= f_\ell && \text{dans } \Omega^\ell, && (1) \\ \sigma(u_\ell) &= \mathcal{A}\varepsilon(u_\ell) && \text{dans } \Omega^\ell, && (2) \\ \sigma(u_\ell)n_\ell &= F_\ell && \text{sur } \Gamma_N^\ell, && (3) \\ u_\ell &= 0 && \text{sur } \Gamma_D^\ell, && (4) \\ [u_N] &\leq 0, && \text{sur } \Gamma_C, && (5) \\ \sigma_N &\leq 0, && \text{sur } \Gamma_C, && (6) \\ \sigma_N[u_N] &= 0 && \text{sur } \Gamma_C, && (7) \\ \sigma_\tau &= 0. && \text{sur } \Gamma_C. && (8) \end{aligned}$$



Les équations (1) à (4) correspondent au problème considéré où \mathcal{A} est un tenseur de quatrième ordre elliptique, symétrique et à composantes dans L^∞ provenant de la loi de comportement associée au solide Ω^ℓ avec condition de Dirichlet sur le bord Γ_D^ℓ et condition de Neumann sur le bord Γ_N^ℓ . A ces équations, on ajoute les conditions de contact sur Γ_C , à savoir une condition de non interpénétration pour le saut de déplacement $[u_N]$ (5), une condition de signe pour la pression normale σ_N la zone de contact (6) et une condition de complémentarité entre ces deux derniers champs (7). La dernière équation vient du fait que l'on considère le contact sans frottement dans ce travail.

2.2 Inéquations variationnelles discrètes associées

L'inéquation variationnelle discrète est la suivante,

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^h = (u_1^h, u_2^h) \in K^h \text{ tel que :} \\ a(u^h, v^h - u^h) \geq l(v^h - u^h), \quad \forall v^h \in K^h, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \mathcal{A}_\ell \varepsilon(u_\ell) : \varepsilon(v_\ell) d\Omega^\ell, \\ l(v) &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_\ell \cdot v_\ell d\Omega^\ell + \int_{\Gamma_N^\ell} F_\ell \cdot v_\ell d\Gamma^\ell. \end{aligned}$$

Pour définir une méthode, on doit choisir les espaces d'approximation V^h , ainsi que $K^h \subset V^h$, le cône convexe discret des déplacements admissibles.

Soit \mathcal{T}_ℓ^h une triangulation ou tétrahédralisation régulière de $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$, où $d = 2, 3$, on définit alors

$$V_\ell^h = \left\{ v_\ell^h \in (C(\overline{\Omega}^\ell))^d : v_\ell^h|_T \in (P_k(T))^d, \forall T \in \mathcal{T}_\ell^h, v_\ell^h = 0 \text{ sur } \Gamma_D^\ell \right\},$$

où $k = 1, 2$, désigne le degré des éléments. L'espace d'approximation est alors,

$$V^h = V_1^h \times V_2^h.$$

La méthode LAC consiste à choisir K^h défini comme suit,

$$K^h = \left\{ v^h \in V^h : \int_{T^m} [v_N^h] d\Gamma \leq 0 \quad \forall T^m \in T^M \right\},$$

où T^M est un macro-maillage d'éléments T^m qui sont des unions d'éléments d'un des maillages traces $\mathcal{T}_\ell^h \cap \Gamma_C$ et $[v_N^h]$ est le saut de déplacement normal discret au travers de l'interface de contact Γ_C .

2.3 Résultats mathématiques

Hypothèse 1 Pour tout macro-élément $T^m \in T^M$, il existe un degré de liberté x_i de V_1^h tel que $\text{supp}(\phi_i) \subset T^m$, où ϕ_i est la fonction de base associée à x_i .

Remarque 1 On note qu'il existe une taille minimum pour les macro-maillages permettant à la fois de satisfaire l'hypothèse 1 et de garantir la localité de la méthode. On note aussi que le choix du maillage trace support pour définir le macro-maillage est libre, ici on a choisi le maillage 1.

Théorème 1 Soient u et u^h les solutions des problèmes de contact continu et discret (LAC). On suppose que $u \in (H^s(\Omega^1))^d \times (H^s(\Omega^2))^d$ avec $d = 2, 3$ et $3/2 < s \leq 2$ ($3/2 < s < 5/2$ si $k = 2$). Si l'hypothèse 1 est satisfaite alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h_1, h_2 (où h_1 et h_2 sont les paramètres de discrétisation du solide 1 et du solide 2 respectivement) et u telle que

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega^1,\Omega^2} \leq C(h_1 + h_2)^{s-1} \|u\|_{s,\Omega^1,\Omega^2}.$$

3 Résultats numériques

La définition de la méthode LAC a rendu possible l'implémentation de la méthode sous *Code_Aster* pour tous les types d'éléments couramment utilisés (éléments linéaires et quadratiques en 2D et 3D). De plus, la méthode a montré sa capacité à gérer l'incompatibilité des maillages de manière optimale en passant le patch test de Taylor dans ce cas (peu importe le type d'élément utilisé), voir Figure 1. On note que l'on passe ce patch test à 10^{-9} près, la solution analytique en pression et en σ_{zz} étant de -25 MPa.

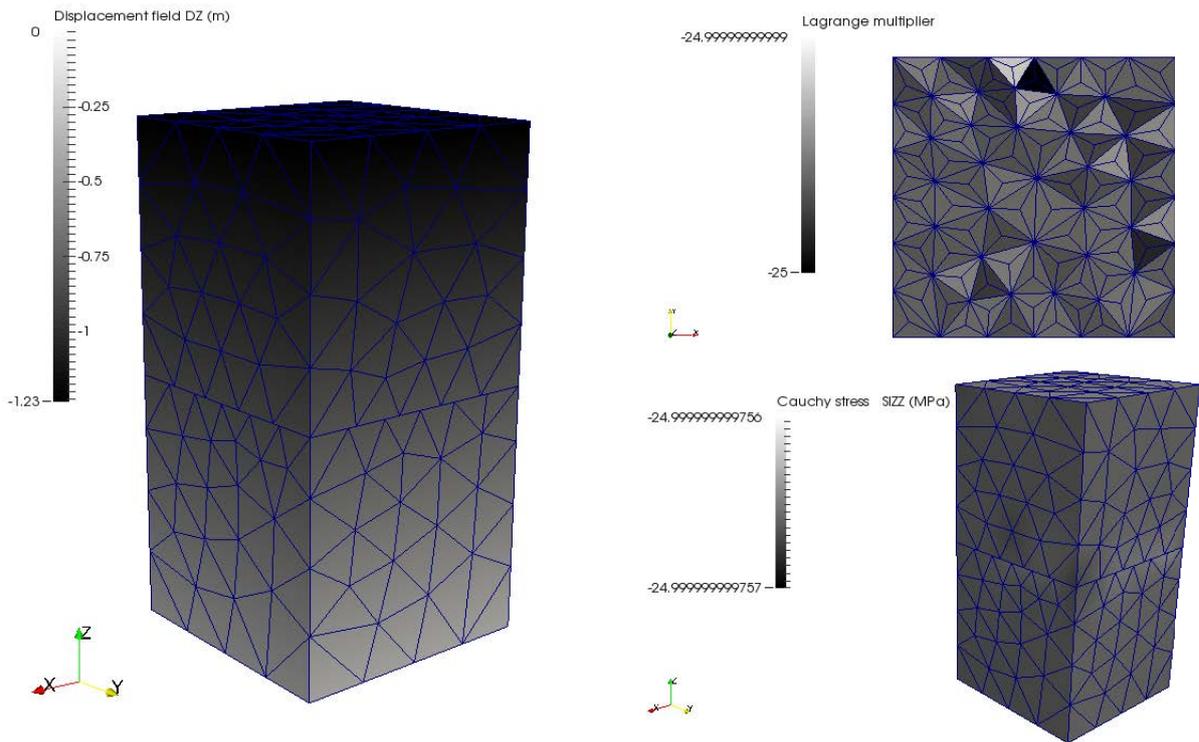


FIGURE 1 – Patch test de Taylor. A gauche : Champ de déplacement selon Z, à droite en haut : Lagrangien de contact et en bas champ de contrainte σ_{zz} .

Cette nouvelle méthode est aussi robuste et permet de réaliser des simulations en grandes déformations, comme on peut le voir dans le test du demi anneau écrasé sur un bloc mou en 3D, figure 2.

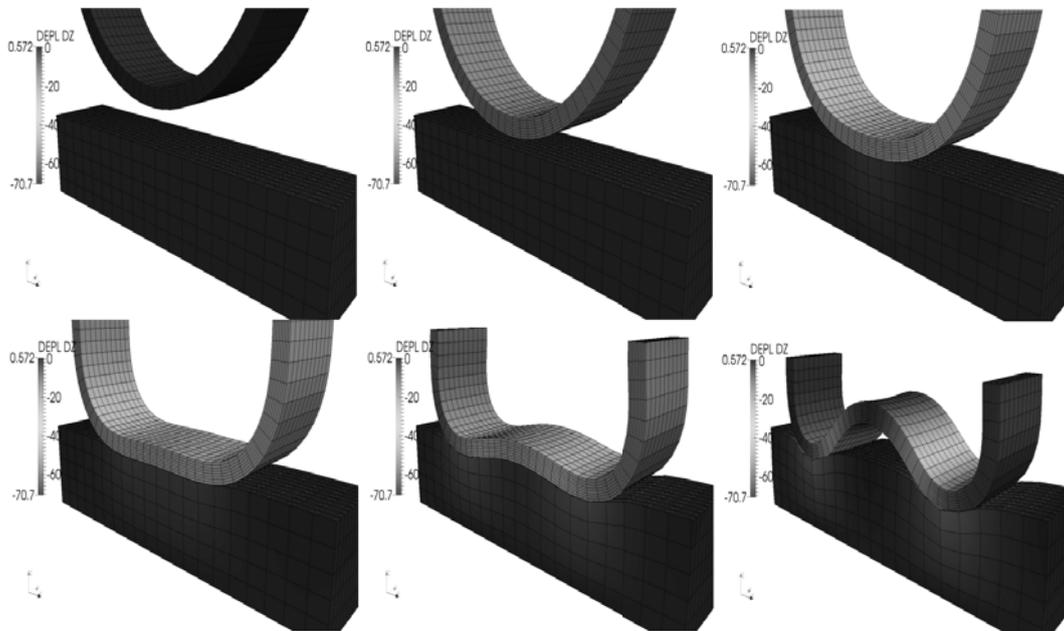


FIGURE 2 – Ecrasement d'un anneau élastique sur un bloc élastique en quasi-statique 3D (pas de "chargement" : 0/30, 6/30, 12/30, 18/30, 24/30, 30/30).

4 Conclusion

On a introduit une méthode de type "mortar" implémentable de manière générique dans un code de niveau industriel. Les résultats numériques et mathématiques obtenus sont très encourageants et motivent la poursuite des travaux sur cette approche. Plusieurs pistes de recherche peuvent être envisagées comme l'extension de la méthode au cas dynamique et au frottement ainsi que la parallélisation de l'algorithme.

Références

- [1] F. Ben Belgacem, P. Hild and P. Laborde, *Extension of the mortar finite element method to a variational inequality modeling unilateral contact*, Math. Models Methods Appl. Sci. 9, 287–303, 1999.
- [2] C. Bernardi, Y. Maday and A. T. Patera, *A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method*, Collège de France Seminar, H. Brezis, J.-L. Lions, Pitman, 13–51, 1994.
- [3] G. Drouet, Ph.D. thesis, University of Toulouse III, France, en préparation.
- [4] P. Hild, *Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 184, 99–123, 2000.
- [5] S. Hüeber and B. Wohlmuth, *A primal-dual active set strategy for non-linear multi body contact problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 194, 3147–3166, 2005.
- [6] T. Laursen, *Computational contact and impact mechanics*, Springer-Verlag, 2002.
- [7] A. Popp, B. I. Wohlmuth, M. W. Gee, W. A. Wall, *Dual quadratic mortar finite element methods for 3D finite deformation contact*. SIAM J. Sci. Comput. 34, no. 4, B421–B446, 2012.
- [8] M. A. Puso and T. Laursen, *A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 193, 601–629, 2004.
- [9] M. A. Puso, T. Laursen and J. Solberg, *A mortar segment-to-segment contact method for quadratic elements and large deformations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 197, 555–566, 2008.
- [10] P. Wriggers, *Computational contact mechanics*, Wiley, 2002.