



**HAL**  
open science

# Solution semi-analytique de la déformée d'une structure membranaire de forme cylindrique circulaire sous pression externe en grandes transformations

Rabah Bouzidi, Eric Véron

## ► To cite this version:

Rabah Bouzidi, Eric Véron. Solution semi-analytique de la déformée d'une structure membranaire de forme cylindrique circulaire sous pression externe en grandes transformations. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01515054

**HAL Id: hal-01515054**

**<https://hal.science/hal-01515054>**

Submitted on 27 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Solution semi-analytique de la déformée d'une structure membranaire de forme cylindrique circulaire sous pression externe en grandes transformations

R. Bouzidi<sup>1</sup>, E. Véron<sup>2</sup>

<sup>1</sup> GeM, Université de Nantes, rabah.bouzidi@univ-nantes.fr

<sup>2</sup> GeM, Université de Nantes, eric.veron@univ-nantes.fr

**Résumé** — Ce travail s'intéresse à la détermination de la déformée, en hypothèses de grandes transformations, d'une structure membranaire de forme cylindrique circulaire sous pression externe et sous tension à ses extrémités. Sous ces sollicitations mécaniques, l'état d'équilibre stable de la structure membranaire présente des plis consécutifs à des flambements locaux. La recherche de l'état d'équilibre statique par des méthodes numériques classiques converge lentement voire peut ne pas converger vers la solution (méthodes de type longueur d'arc, Riks, relaxation dynamique, ...). Des méthodes s'appuyant sur le principe du minimum de l'énergie potentielle totale permettent alors d'obtenir efficacement une solution à moindre coût. Une solution semi-analytique de l'état d'équilibre est obtenue en utilisant le principe du minimum de l'énergie potentielle totale. Les expressions analytiques de l'énergie potentielle totale, du gradient de l'énergie et du jacobien sont dans un premier temps établies. La recherche de la solution au problème mécanique est ensuite effectuée numériquement au moyen d'un algorithme de Newton dont les opérateurs sont mis à jour à l'aide des expressions analytiques. Les résultats obtenus par cette approche originale sont finalement comparés à ceux obtenus avec le code de calcul éléments finis ABAQUS pour différentes valeurs de chargements mécaniques (tension, pression).

**Mots clés** — *Structure membranaire, Grandes transformations, Minimum de l'énergie potentielle totale.*

## 1 Hypothèses

La structure étudiée est un cylindre circulaire membranaire sous pression externe et sous tension à ses extrémités. Le problème mécanique est décrit par la figure suivante :

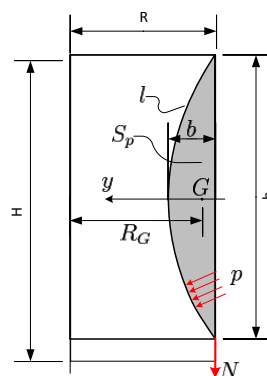


FIGURE 1 – Cylindre membranaire sous pression externe et sous tension

Les hypothèses retenues pour la résolution du problème mécanique sont les suivantes :

- Les rayons  $R$  supérieur et inférieur sont constants ;
- La membrane est extensible de module d'Young  $E$  et de paramètre de Poisson  $\nu$  ;
- La pression externe  $p$  est supposée constante ;
- Les dimensions initiales du cylindre sont  $H$  et  $R$  et les dimensions finales (déformées) sont  $h$  et  $R$  ;
- Les forces extérieures qui travaillent sont la pression extérieure  $p$  et la tension axiale  $N$  ;

- La déformée est supposée parabolique ( $f(z) = b(1 - 4z^2/h^2)$ ).

Les paramètres cinématiques du système mécanique sont :

- $h$  : la hauteur finale de la structure membranaire ;
- $b$  : la réduction du rayon de la structure à mi hauteur.

## 2 Mise en équation

La mise en équation du problème est réalisée à l'aide du théorème du minimum de l'énergie potentielle totale du système.

### 2.1 Energie potentielle interne

L'état de déformation de la structure est supposé homogène et est défini dans le repère  $(r, \theta, z)$  par le tenseur de déformation de Green-Lagrange :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\theta\theta} & E_{\theta z} \\ 0 & E_{\theta z} & E_{zz} \end{bmatrix}$$

La densité volumique d'énergie de déformation s'écrit :

$$\pi_{int} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_{\theta\theta} & E_{zz} & E_{\theta z} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} D_{\theta\theta} & D_{\theta z} & 0 \\ D_{\theta z} & D_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{\theta\theta} \\ E_{zz} \\ E_{\theta z} \end{pmatrix}$$

Les hypothèses suivantes concernant l'état de contrainte et de déformation sont retenues :

- Sous pression externe, l'état stable de la structure membranaire présente des plis consécutifs à des flambements locaux. La contrainte circonférentielle  $\Sigma_{\theta\theta}$  doit être annulée. Pour désactiver la composante  $\Sigma_{\theta\theta}$ , il suffit d'annuler les termes  $D_{\theta\theta}$  et  $D_{\theta z}$  ;
- En faisant abstraction des perturbations liées aux plis, les directions  $\theta$  et  $z$  sont considérées comme principales (la contrainte  $\Sigma_{\theta z}$  est partout nulle) ;
- La composante  $E_{zz}$  est supposée uniforme (avec  $l(h, b)$  la longueur curviligne de la membrane déformée) :

$$E_{zz} = \frac{l(h, b)^2 - H^2}{2H^2}$$

Sous ces hypothèses, l'énergie potentielle interne se réduit alors à :

$$\Pi_{int}(h, b) = 2\pi RH \frac{E}{2(1-\nu^2)} \frac{(l(h, b)^2 - H^2)^2}{4H^4} \quad (1)$$

L'hypothèse de déformée parabolique permet d'établir une expression analytique de la longueur curviligne  $l(h, b)$  de la structure déformée en fonction des deux paramètres cinématiques  $h$  et  $b$  :

$$l(h, b) = \frac{1}{8} \frac{h^2}{b} \left( \operatorname{asinh} \left( \frac{4b}{h} \right) + \frac{4b}{h} \cosh \left( \operatorname{asinh} \left( \frac{4b}{h} \right) \right) \right)$$

### 2.2 Energie potentielle des efforts extérieurs

Le travail de l'effort de tension est calculé comme le produit scalaire de la force par le déplacement. Celui de la pression est donné par le produit de la pression et du volume balayé par la surface sous pression (volume calculé par le théorème de Guldin) :

$$\Pi_{ext}(h, b) = -N(h - H) - p2\pi \left( R - \frac{2}{5}b \right) \frac{2}{3}bh \quad (2)$$

### 2.3 Energie potentielle totale

L'énergie potentielle totale du système est déterminée à partir des expressions des énergies potentielles interne (1) et externe (2) :

$$\Pi_{tot}(h, b) = \Pi_{int}(h, b) + \Pi_{ext}(h, b)$$

### 3 Recherche de la solution

A l'équilibre, les forces généralisées correspondant aux paramètres cinématiques sont nulles. Cette condition est traduite par la stationnarité de l'énergie potentielle totale par rapport aux paramètres cinématiques solution du problème :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi_{tot}}{\partial h} \\ \frac{\partial \Pi_{tot}}{\partial b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

La solution analytique de l'équation (3) n'est pas simple à obtenir, on peut néanmoins procéder à la résolution numérique par une méthode itérative de Newton en linéarisant l'équation (3) :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi_{tot}}{\partial h} \\ \frac{\partial \Pi_{tot}}{\partial b} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi_{tot}}{\partial h^2} & \frac{\partial^2 \Pi_{tot}}{\partial h \partial b} \\ \frac{\partial^2 \Pi_{tot}}{\partial b \partial h} & \frac{\partial^2 \Pi_{tot}}{\partial b^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où les opérateurs  $\partial \Pi_{tot}$  et  $\partial^2 \Pi_{tot}$  sont déterminés analytiquement.

### 4 Résultats numériques

L'application numérique est réalisée sur une structure dont les paramètres physiques, matériaux et géométriques sont les suivants :

- Rayon :  $R = 2.5m$  ;
- Hauteur :  $H = 3.0m$  ;
- Epaisseur :  $e = 0.001m$  ;
- Module d'Young  $E = 5.0GPa$  ;
- Coefficient de Poisson :  $\nu = 0.05$ .

Les résultats obtenus par l'approche proposée sont comparés à ceux obtenus avec le code de calcul industriel ABAQUS pour différentes valeurs de chargement :

Chargement ( $p, N$ )	Solution anal. ( $h, b$ )	Solution ABQ ( $h, b$ )
(2e+04 Pa, 2e+06 N)	(3.055m, 0.177m)	(3.050m, 0.171m)
(2e+04 Pa, 3e+06 N)	(3.106m, 0.117m)	(3.097m, 0.120m)
(3e+04 Pa, 2e+06 N)	(3.031m, 0.251m)	(3.026m, 0.243m)
(3e+04 Pa, 3e+06 N)	(3.094m, 0.183m)	(3.085m, 0.175m)

TABLE 1 – Résultats numériques

L'approche proposée donne des résultats en bon accord avec une approche élément finis classique et se révèle particulièrement efficace par rapport aux codes industriels en ce qui concerne le temps de résolution. La figure suivante présente l'état déformé obtenu avec le code de calcul ABAQUS pour une combinaison des paramètres de chargement  $p$  et  $N$  :

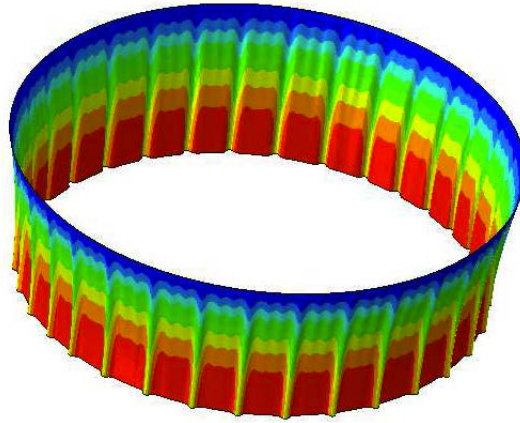


FIGURE 2 – Déformée calculée avec ABAQUS - Cartographie : amplitude des déplacements

## Références

- [1] R. Bouzidi, A. Le Van. *Numerical solution of hyperelastic membranes by energy minimization*, Computers & Structures, 1961 - 1969, 2004.
- [2] Y. Lecieux, R. Bouzidi. *Numerical wrinkling prediction of thin hyperelastic structures by direct energy minimization*, Advances in Engineering Software, 57 - 68, 2012.