



HAL
open science

La méthode CGSM pour l'analyse statique des structures composites avec variabilité des propriétés matériaux et physiques

Qi Yin, Frédéric Druesne, Pascal Lardeur

► **To cite this version:**

Qi Yin, Frédéric Druesne, Pascal Lardeur. La méthode CGSM pour l'analyse statique des structures composites avec variabilité des propriétés matériaux et physiques. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01514306

HAL Id: hal-01514306

<https://hal.science/hal-01514306>

Submitted on 26 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

La méthode CGSM pour l'analyse statique des structures composites avec variabilité des propriétés matériaux et physiques

Q. Yin¹, F. Druesne¹, P. Lardeur¹

¹ *Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne, {qi.yin, frederic.druesne, pascal.lardeur}@utc.fr*

Résumé — La méthode CGSM (Certain Generalized Stresses Method) est développée pour l'analyse probabiliste des structures composites modélisées par éléments finis. Les propriétés matériaux et physiques sont considérées comme incertaines. La variabilité de la réponse est évaluée par une simulation de Monte Carlo (MC) en utilisant la formulation CGSM. L'exemple présenté est une plaque à stratification non symétrique soumise à un chargement réparti. La méthode CGSM évalue précisément la variabilité des déplacements et des contraintes, de plus elle est très performante en temps de calcul.

Mots clés — structure composite, analyse probabiliste, éléments finis, propriétés incertaines

1. Introduction

Du fait de leur bonne tenue mécanique et de leur faible masse volumique, les structures composites sont largement utilisées dans l'industrie. Mais les procédés de fabrication induisent une variabilité des propriétés d'une structure composite plus élevée que celle des structures classiques homogènes et isotropes. De nombreuses méthodes ont été développées pour prendre en compte les incertitudes portant sur les propriétés matériaux ou physiques dans les modèles numériques. Mais les méthodes existantes ne sont pas satisfaisantes, elles sont souvent coûteuses en temps de calcul ou ne fournissent pas des résultats de bonne qualité pour une variabilité élevée. Une méthode économique et fiable, prenant en compte la variabilité dans les calculs par éléments finis, est donc un défi très intéressant.

La méthode CGSM repose sur l'hypothèse des efforts généralisés certains. Cette méthode a déjà été présentée pour l'analyse probabiliste des treillis de barres ou de poutres par Lardeur et al. [3,4,5,6], ainsi que pour les plaques homogènes et isotropes en traction ou en flexion par Mahjudin et al. [7]. La méthode CGSM permet de prendre en compte un grand nombre de degrés de liberté et de variables aléatoires, ainsi qu'une variabilité d'entrée élevée. Elle est ici développée pour évaluer la variabilité du comportement statique d'une structure composite modélisée par éléments finis.

2. La méthode CGSM

2.1. Présentation de la méthode CGSM

Basée sur l'hypothèse considérant que les efforts généralisés n'évoluent pas avec les paramètres incertains, la méthode CGSM peut prendre en compte les variabilités des propriétés matériaux (modules d'élasticité...) et/ou des propriétés physiques (épaisseur...). L'hypothèse CGSM permet de calculer l'énergie interne de déformation de la structure pour toutes les valeurs des paramètres incertains. Une expression semi-analytique du déplacement d'un point est obtenue en utilisant le théorème de Castigliano. Les quantités statistiques du déplacement (moyenne, écart-type, coefficient de variation et distribution) peuvent être évaluées par une simulation de Monte Carlo en utilisant cette expression. Pour calculer la variabilité d'un déplacement, une analyse éléments finis à 2 cas de charge avec un logiciel standard (ex : Abaqus) est suffisante, puis un post-traitement est effectué. En plus du déplacement, la variabilité des déformations, des contraintes et des critères de rupture peut également être évaluée par la méthode CGSM.

2.2. Formulation de la méthode CGSM pour les structures composites

La méthode CGSM est proposée ici pour les plaques et coques composites. Tout d'abord, afin d'évaluer la variabilité d'un déplacement, l'énergie interne de déformation est exprimée :

$$\pi_{int} = \frac{1}{2} \int_V \langle \varepsilon \rangle [H] \{ \varepsilon \} dV \quad (1)$$

où $\{ \varepsilon \}$ est le vecteur des déformations, $[H]$ est la loi de comportement et V le volume de la structure. En utilisant la théorie des stratifiés et la relation entre les efforts et les déformations, l'équation (1) peut s'écrire pour les plaques minces :

$$\pi_{int} = \frac{1}{2} \int_A (\langle N \rangle [S_1] \{ N \} + \langle M \rangle [S_2] \{ N \} + \langle N \rangle [S_3] \{ M \} + \langle M \rangle [S_4] \{ M \}) dA \quad (2)$$

où $[S_1]$ est la matrice de souplesse de membrane, $[S_2]$ et $[S_3]$ sont les matrices de souplesse de couplage membrane-flexion, $[S_4]$ est la matrice de souplesse de flexion, A est l'aire de la structure, $\{ N \}$ et $\{ M \}$ sont respectivement les vecteurs des efforts normaux et des moments. Pour calculer le déplacement d'un point P , le théorème de Castigliano est utilisé :

$$U = \frac{\partial \pi_{int}}{\partial F} \quad (3)$$

avec F la charge appliquée au point P dans la direction d'intérêt. Afin d'utiliser le théorème de Castigliano, la charge F doit être introduite dans l'équation (2). On décompose les efforts normaux $\{ N \}_i$ et les moments $\{ M \}_i$ dans l'élément i en deux contributions :

$$\{ N \}_i = \{ N' \}_i + F \{ N'' \}_i \quad (4)$$

$$\{ M \}_i = \{ M' \}_i + F \{ M'' \}_i \quad (5)$$

où $\{ N' \}_i$ et $\{ M' \}_i$ sont respectivement les efforts normaux et les moments dans l'élément i , dus aux charges appliquées sur toute la structure à l'exception du point P dans la direction d'intérêt ; $\{ N'' \}_i$ et $\{ M'' \}_i$ sont respectivement les efforts normaux et les moments dans l'élément i , dus à une charge unitaire appliquée au point P dans la direction d'intérêt. Dans la formulation proposée, les efforts normaux $\{ N' \}_i$, $\{ N'' \}_i$ et les moments $\{ M' \}_i$, $\{ M'' \}_i$ sont considérés constants dans chaque élément. Ils sont obtenus par une analyse éléments finis à 2 cas de charge en configuration nominale. En utilisant les équations (4) et (5), le théorème de Castigliano donne une expression semi-analytique du déplacement :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_i (P_{1i} + P_{2i} + P_{3i} + P_{4i}) \quad (6)$$

avec n le nombre d'éléments finis, A_i l'aire de l'élément i et

$$\begin{aligned} P_{1i} &= \langle N'' \rangle_i [S_1]_i \{ N' \}_i + \langle N' \rangle_i [S_1]_i \{ N'' \}_i + 2F \langle N'' \rangle_i [S_1]_i \{ N'' \}_i \\ P_{2i} &= \langle M'' \rangle_i [S_2]_i \{ N' \}_i + \langle M' \rangle_i [S_2]_i \{ N'' \}_i + 2F \langle M'' \rangle_i [S_2]_i \{ N'' \}_i \\ P_{3i} &= \langle N'' \rangle_i [S_3]_i \{ M' \}_i + \langle N' \rangle_i [S_3]_i \{ M'' \}_i + 2F \langle N'' \rangle_i [S_3]_i \{ M'' \}_i \\ P_{4i} &= \langle M'' \rangle_i [S_4]_i \{ M' \}_i + \langle M' \rangle_i [S_4]_i \{ M'' \}_i + 2F \langle M'' \rangle_i [S_4]_i \{ M'' \}_i \end{aligned}$$

3. Exemple

Afin de valider la méthode CGSM pour les structures composites, trois exemples académiques ont été étudiés : une plaque soumise à un chargement réparti traitée par Noh [8] avec une méthode intégrale pondérée ; une plaque soumise à un chargement concentré traitée par Chen et Soares [2] avec une méthode spectrale ; une coque soumise à neuf chargements concentrés traitée par Antonio et Hoffbauer [1] avec une méthode de perturbation. Le premier exemple est présenté ici.

L'exemple, décrit par la Figure 1, est une plaque carrée ($20\text{m} \times 20\text{m}$) composite, soumise à un chargement uniformément réparti $q = 1\text{ Pa}$. La plaque est simplement supportée. L'épaisseur totale est 0.1m avec une stratification asymétrique $[0/90/0/90]_2$. Le matériau est du carbone-époxy (T300/934) dont les propriétés isotropes transverses sont : $E_1 = 131\text{ GPa}$ (module d'élasticité longitudinal), $E_2 = 10.34\text{ GPa}$ (module d'élasticité transversal), $\nu_{12} = 0.22$ (coefficient de Poisson) et $G_{12} = 6.895\text{ GPa}$ (module de cisaillement).

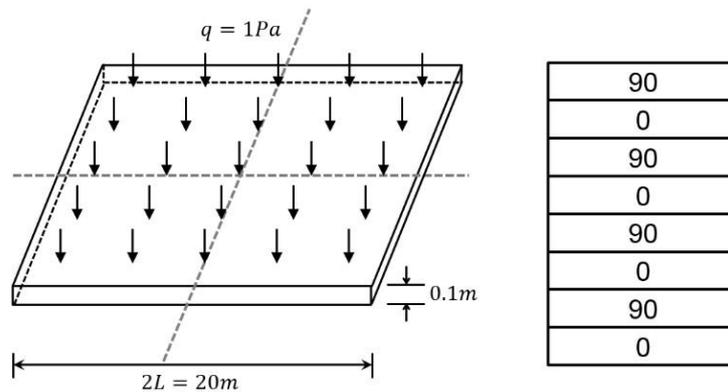


Figure 1 – Plaque composite constituée de huit couches soumise à un chargement réparti

Grâce à la symétrie géométrique, un quart de la plaque est modélisé par un maillage 6×6 avec l'élément S4R d'Abaqus. Ce maillage est assez fin selon l'étude de convergence. La variabilité du déplacement du point central est étudiée. Les paramètres incertains sont les propriétés matériaux E_1 , E_2 et G_{12} . Tous les paramètres sont dépendants et représentés par un champ aléatoire. Ce champ est discrétisé à l'aide de l'expansion de Karhunen-Loève avec la méthode de la moyenne locale. Le coefficient de variation (C.V.) d'entrée est 10% et la longueur de corrélation varie de $0.001L$ à $100L$. Les simulations de Monte Carlo avec le solveur éléments finis Abaqus et avec la formulation CGSM sont réalisées avec 7000 tirages.

Les coefficients de variation du déplacement calculés par la méthode CGSM sont comparés à ceux obtenus par une simulation de Monte Carlo directe et par Noh [8]. La Figure 2 montre les résultats. Les trois courbes sont très proches. On peut observer que le coefficient de variation du déplacement augmente avec la longueur de corrélation. Quand la longueur de corrélation est grande, le coefficient de variation du déplacement tend vers 10%. Considérant que les paramètres incertains sont dépendants, ce résultat était attendu.

Pour évaluer la variabilité d'un déplacement avec la méthode CGSM, une analyse éléments finis avec 2 cas de charge est nécessaire, le temps CPU est de quelques secondes. Le post-traitement, tenant compte des paramètres incertains, prend seulement une minute. En revanche, la simulation de Monte Carlo directe nécessite 7000 analyses éléments finis pour cet exemple, ce qui mène à un temps de calcul très long, d'environ 11 heures. En conclusion, pour cet exemple, la méthode CGSM est très efficace en ce qui concerne la qualité des résultats et le temps de calcul. Des observations similaires ont été faites pour les deux autres exemples introduits ci-dessus.

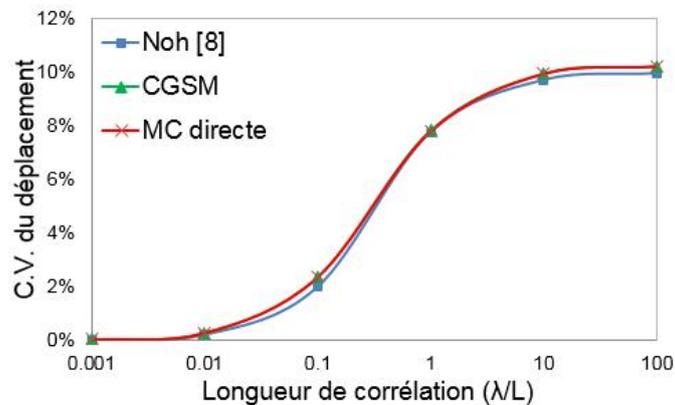


Figure 2 – Variabilité du déplacement en fonction de la longueur de corrélation

4. Conclusions

La méthode CGSM a été développée pour évaluer la variabilité du comportement statique des structures composites. Un exemple académique d'une plaque composite soumise à un chargement réparti a été traité. Les résultats obtenus par la méthode CGSM ont été comparés à ceux obtenus par une simulation de Monte Carlo directe, ainsi qu'aux résultats présentés dans la bibliographie. La méthode CGSM fournit des résultats de bonne qualité et elle est très performante en temps de calcul.

Références

- [1] C. Antonio, L. Hoffbauer. From local to global importance measures of uncertainty propagation in composite structures, *Composite Structures*, 85, 213-225, 2008.
- [2] N. Chen, C. Soares. Spectral stochastic finite element analysis for laminated composite plates, *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 197, 4830-4839, 2008.
- [3] P. Lardeur, M. Oudjene. La méthode MEGC pour le calcul de dispersion du comportement statique des treillis, *Congrès Français de Mécanique*, Nice, 2003.
- [4] P. Lardeur, M. Oudjene, E. Arnoult. Une méthode rapide pour la prise en compte des incertitudes dans les structures minces ; application aux treillis, *Colloque national en calcul des structures*, Giens, 2003.
- [5] P. Lardeur, A. Demri, C. Lionnet, E. Arnoult. Application de la méthode MEGC aux treillis de barres hyperstatiques, *Colloque national en calcul des structures*, Giens, 2005.
- [6] P. Lardeur, E. Arnoult, L. Martini, C. Knopf-Lenoir. The Certain Generalized Stresses Method for the static finite element analysis of bar and beam trusses with variability, *Finite Elements in Analysis and Design*, 50, 231-242, 2011.
- [7] M. Mahjudin, F. Druesne, I. Katili, P. Lardeur. La méthode CGSM pour l'analyse statique des plaques avec variabilité, *Colloque national en calcul des structures*, Giens, 2013.
- [8] H. Noh. Stochastic finite element analysis of composite plates considering spatial randomness of material properties and their correlations, *Steel and Composite Structures*, 11, 115-130, 2011.