



HAL
open science

Sur une méthode d'homogénéisation stochastique en temps

Guillaume Puel, Karam Sab

► **To cite this version:**

Guillaume Puel, Karam Sab. Sur une méthode d'homogénéisation stochastique en temps. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. <hal-01514303>

HAL Id: hal-01514303

<https://hal.science/hal-01514303v1>

Submitted on 26 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC0 1.0 - Universal - International License

Sur une méthode d'homogénéisation stochastique en temps

G. Puel¹, K. Sab²

¹ Laboratoire MSSMat, École Centrale Paris, guillaume.puel@ecp.fr

² Laboratoire Navier, École des Ponts ParisTech, karam.sab@enpc.fr

Résumé — Le but de cette communication est de préciser les ingrédients permettant de définir une méthode d'homogénéisation stochastique en temps. Le principe est de considérer deux échelles de temps caractéristiques très différentes : l'une lente et déterministe, l'autre rapide et stochastique. Sous certaines hypothèses, il est alors possible de les séparer afin de traiter la résolution d'un problème homogénéisé à l'échelle lente seulement. La méthode est illustrée sur un exemple académique mettant en œuvre un comportement viscoplastique non linéaire.

Mots clés — multiéchelle en temps, homogénéisation stochastique, viscoplasticité, fatigue, durée de vie.

1 Introduction

La prédiction de l'évolution à long terme d'une structure sous sollicitations de service pose la question du coût de calcul dès lors qu'une résolution numérique dans le domaine temporel est requise (par exemple dans le cas d'une loi d'évolution matérielle fortement non linéaire). Ceci est d'autant plus crucial lorsque le problème traité doit décrire des phénomènes très rapides qui nécessitent de considérer un pas de temps très petit par rapport à la durée de l'étude. Cependant, lorsque l'on peut mettre en évidence deux échelles de temps bien séparées, il peut être très efficace de mettre en œuvre une méthode d'homogénéisation afin de résoudre un problème « moyen » défini sur des piquets de temps « macro » (c'est-à-dire lents) seulement.

C'est dans cette perspective qu'une méthode d'homogénéisation périodique en temps a été proposée dans [2] et détaillée récemment pour différents modèles et cadres d'étude, pour des simulations du comportement de structures soumises à des chargements de fatigue bipériodiques [1, 3]. Toutefois, une hypothèse fondamentale est la nécessaire périodicité des chargements rapides, condition qui peut s'avérer trop restrictive lorsque l'on s'intéresse à des sollicitations de service. Le but de cette communication est ainsi de proposer une alternative, quand les chargements rapides sont définis par des processus aléatoires : l'idée consiste à transposer sur des échelles de temps ce qui est classiquement défini dans le cadre de l'homogénéisation stochastique en espace [4, 5].

2 Cadre de la méthode

On présente ici un problème générique aléatoire (vis-à-vis du temps) afin d'exposer les étapes permettant d'obtenir la version homogénéisée des équations de référence.

2.1 Équations du problème générique de référence

Le problème que l'on cherche à traiter consiste à déterminer dans le domaine Ω les champs (aléatoires vis-à-vis de la variable de temps t) de déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega, t)$, de déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \omega, t)$, de déformation viscoplastique $\boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{x}, \omega, t)$ et de contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \omega, t)$ au cours du temps. Ceux-ci vérifient les

équations suivantes :

$$\mathbf{Div}_x \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_v = \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \quad (1a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (1b)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{D}_x \mathbf{u} + \mathbf{D}_x \mathbf{u}^T) \quad (1c)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{dt} = a(\boldsymbol{\sigma}) \quad (1d)$$

où \mathbf{Div}_x et \mathbf{D}_x désignent respectivement les opérateurs divergence et gradient par rapport à la variable d'espace \mathbf{x} . Tandis que ρ , \mathcal{C} et a caractérisent le matériau (masse volumique, tenseur d'élasticité et loi d'évolution viscoplastique respectivement), les chargements peuvent être de deux natures : une force volumique déterministe $\mathbf{F}_v(\mathbf{x}, t)$ en tout point de Ω et une force surfacique aléatoire (vis-à-vis du temps) $\mathbf{F}_s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, t)$ sur sa frontière $\partial\Omega$:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{F}_s \quad (1e)$$

où \mathbf{n} désigne la normale unitaire extérieure en chaque point de $\partial\Omega$.

2.2 Chargement extérieur

On suppose qu'en chaque point de la frontière, le chargement surfacique considéré est un processus stochastique $F(\boldsymbol{\omega}, t)$, stationnaire et ergodique, dont la densité spectrale de puissance (DSP) $S_F(f)$ est à largeur de bande fréquentielle étroite :

$$S_F(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[\int_{-T/2}^{T/2} |F(\boldsymbol{\omega}, t)|^2 e^{-j2\pi ft} dt \right] = \begin{cases} S_0 \text{ constant} & \text{si } f \in [f_1; f_2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2)$$

où $\mathbb{E}[\cdot]$ désigne l'espérance.

De plus, cette bande fréquentielle $[f_1; f_2]$ est supposée à bien plus haute fréquence que la fréquence caractéristique associée au phénomène de viscoplasticité, autrement dit :

$$\frac{1}{f_1 T_c} = \xi \ll 1 \quad (3)$$

où T_c est le temps caractéristique de la loi d'évolution de viscoplasticité (1d). Ce rapport ξ permet d'introduire l'échelle de temps rapide τ telle que $\tau = t/\xi$, où la variable t est désormais considérée comme l'échelle de temps lente.

2.3 Équations du problème homogénéisé

En procédant comme dans [3], c'est-à-dire en introduisant dans les équations (1) une décomposition asymptotique de chaque champ inconnu en fonction des puissances du rapport ξ , et en supposant de plus que $\rho L^2 F^2 / \|\mathcal{C}\| = \beta \xi^2$, il est possible d'obtenir les équations homogénéisées en temps suivantes :

$$\mathbf{Div}_x \mathbb{E}[\boldsymbol{\sigma}_0] + \mathbf{F}_v = \mathbf{0} \quad (4a)$$

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\sigma}_0] = \mathcal{C} (\mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_0] - \boldsymbol{\varepsilon}_0^p) \quad (4b)$$

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_0] = \frac{1}{2} (\mathbf{D}_x \mathbb{E}[\mathbf{u}_0] + \mathbf{D}_x \mathbb{E}[\mathbf{u}_0]^T) \quad (4c)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_0^p}{\partial t} = \mathbb{E}[a(\boldsymbol{\sigma}_0)] \quad (4d)$$

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\sigma}_0] \mathbf{n} = \mathbb{E}[\mathbf{F}_s] \quad (4e)$$

On utilise pour cela les analogies démontrées dans le cas de l'homogénéisation stochastique en espace dans [4, 5]. Les équations (4) peuvent alors être résolues à l'échelle de temps lente seulement, entraînant un gain significatif en termes de coût de calcul par rapport à la résolution des équations (1).

3 Application à un exemple académique

3.1 Équations du problème

Le cas d'étude proposé pour illustrer la démarche précédente consiste en une barre rectiligne de longueur L et de section S , encastée à une extrémité ($x = 0$), et soumise à un chargement normal F_s de type (2) à l'autre extrémité ($x = L$). Le matériau constitutif est un acier « standard » (module de Young $E = 200$ GPa) dont la loi d'évolution viscoplastique est de type Norton (paramètres $K = 100 \cdot 10^6$ u.SI et $n = 10$). Enfin, on suppose que la sollicitation est quasi-statique, ce qui implique que la contrainte σ est homogène, et égale au chargement F_s . Les équations du problème de référence, à résoudre sur $[0;L] \times [0;T]$, sont alors les suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{F_s}{E} + \varepsilon^p \quad (5a)$$

$$\frac{d\varepsilon^p}{dt} = \left(\frac{|F_s|}{K} \right)^n \text{sign} F_s \quad (5b)$$

Les équations du problème homogénéisé permettent alors de déterminer l'espérance du déplacement d'ordre zéro $\mathbb{E}[u_0]$ et la déformation viscoplastique d'ordre zéro ε_0^p :

$$\frac{\partial \mathbb{E}[u_0]}{\partial x} = \frac{\mathbb{E}[F_s]}{E} + \varepsilon_0^p \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_0^p}{\partial t} = \mathbb{E} \left[\left(\frac{|F_s|}{K} \right)^n \text{sign} F_s \right] \quad (6b)$$

3.2 Résultats

Le chargement normal en $x = L$ est obtenu selon [6] comme une somme de cosinus et sinus dont les amplitudes vérifient une loi normale centrée :

$$F_s(\omega, t) = F_{s0} + \sum_{i=1}^{N_f} (A_i(\omega) \cos(2\pi f_i t) + B_i(\omega) \sin(2\pi f_i t)) \quad \text{avec } f_i = f_1 + (i-1) \frac{f_2 - f_1}{N_f - 1} \quad (7)$$

où $A_i(\omega), B_i(\omega) = \mathcal{N}(\bar{m} = 0, \sigma = \sqrt{S_0(f_2 - f_1)/(N_f - 1)})$. Le zoom d'un exemple de réalisation de ce processus gaussien est représenté sur la figure 1.

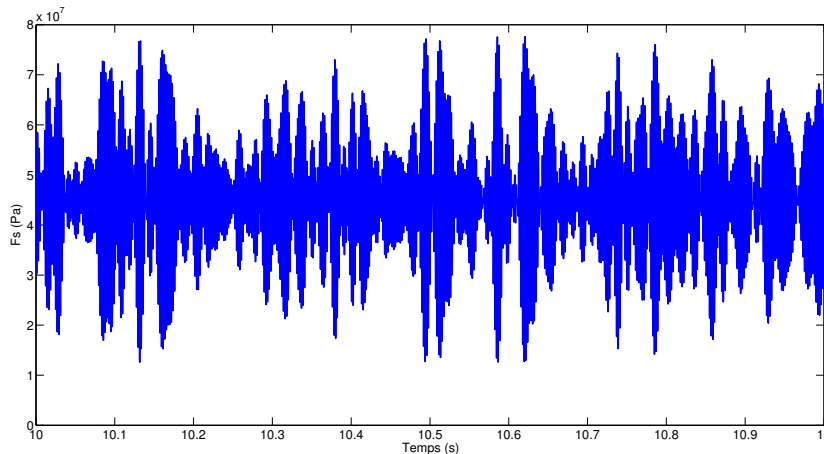


FIGURE 1 – Exemple de réalisation pour le chargement normal F_s (zoom)

Afin de limiter le coût de résolution du système (6), on utilise la propriété d'ergodicité du chargement (7) pour substituer à la moyenne d'ensemble \mathbb{E} de la loi d'évolution homogénéisée (6b) la moyenne temporelle associée à une réalisation particulière. Même si cette moyenne devrait être estimée sur un intervalle de temps de durée infinie, elle peut être approchée en calculant la moyenne temporelle de la

loi d'évolution homogénéisée sur un intervalle de durée Δ finie, comme le montre la figure 2 : dès que $\Delta \geq 0,1$ s, l'évolution de la déformation viscoplastique d'ordre zéro devient très proche de l'évolution obtenue par une moyenne d'ensemble sur plusieurs résolutions des équations de référence (1), représentée en rouge sur la figure 2.

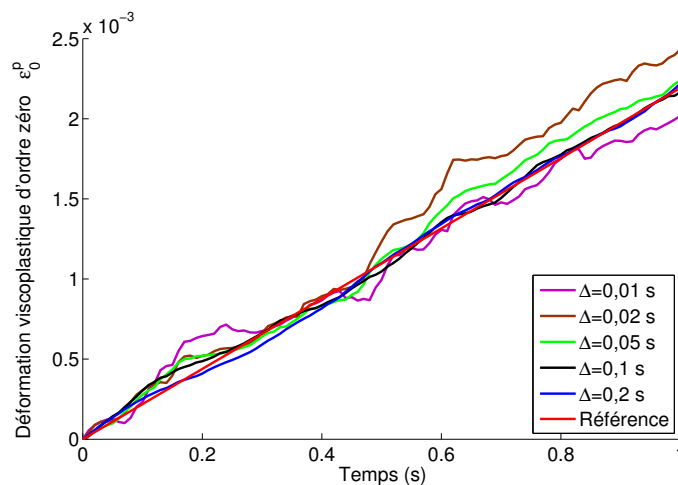


FIGURE 2 – Estimation de la déformation viscoplastique d'ordre zéro pour différentes durées Δ d'estimation de la moyenne temporelle

4 Conclusion

Une méthode d'homogénéisation stochastique est proposée dans le cas de structures soumises à des chargements aléatoires : un système d'équations homogénéisé est déterminé afin de calculer avec un coût de calcul réduit l'évolution moyenne de la structure, et notamment sa déformation viscoplastique qui suit une loi d'évolution fortement non linéaire. La méthode repose sur l'hypothèse que le chargement aléatoire, stationnaire et ergodique, évolue selon une échelle de temps bien plus rapide que le temps caractéristique associé à l'évolution de la viscoplasticité. L'étude d'un premier exemple académique simple permet de vérifier la pertinence de l'approche, mais des études complémentaires doivent encore permettre d'affiner les limites d'utilisation de la méthode ainsi que les gains numériques associés, pour pouvoir aborder la prédiction de durée de vie de structures soumis à des sollicitations de fatigue aléatoires.

Références

- [1] A. Devulder, D. Aubry et G. Puel. *Two-time scale fatigue modelling : application to damage*, Computational Mechanics, 45 :6, 637–646, 2010.
- [2] T. Guennouni et D. Aubry. *Réponse homogénéisée en temps de structures sous chargements cycliques*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série II, 303 :20, 1765–1768, 1986.
- [3] G. Puel et D. Aubry. *Efficient fatigue simulation using periodic homogenization with multiple time scales*, Journal for Multiscale Computational Engineering, 12 :4, pp. 291–318, 2014.
- [4] K. Sab. *On the homogenization and the simulation of random materials*, European Journal of Mechanics. A. Solids, 11 :5, pp. 587–607, 1992.
- [5] K. Sab. *Contributions à l'homogénéisation des matériaux aléatoires*, Habilitation à diriger des recherches, Université Paris VI, 1994.
- [6] M. Suptille, E. Pagnacco, L. Khalij, J. E. Souza de Cursi et J. Brossard. *Generation of Gaussian stationary processes and extreme values distributions for high-cycle fatigue models – Application to tidal stream turbines*, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering, 34 :SI2, pp. 640-651, 2012.